

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 65 (1967)

**Heft:** 3

**Artikel:** Die Bestimmung der Bahnstörungen künstlicher Erdsatelliten mit Hilfe von Schwereanomalien

**Autor:** Koch, K.R.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-221524>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

darstellt und daß wir am falschen Ort sparen, wenn wir bei Neuvermessungen unsichere Grenzpunkte, wie zum Beispiel diejenigen an Wegrändern, als Polygonpunkte auswählen.

Da vom Staat an die Neuvermessung hohe Beiträge, an die Nachführung nur kleinere Beiträge ausgerichtet werden und das Verfahren darauf beruht, durch die Nachführung zur Neuvermessung zu kommen, wird der Grundeigentümer, der Nachführungen verursacht, vermehrt belastet. Eine bedeutende Mehrbelastung wird aber kaum entstehen, da ihm einerseits auch bei einer Neuvermessung gewisse Restkosten überbunden werden und er mit den Nachführungskosten sowieso belastet würde. Wesentlich ist, daß wir unsere Mittel nur dort einsetzen, wo das Bedürfnis nach neuen Plänen besteht, und heute Kosten für Neuvermessungen von Gebieten vermeiden, wenn diese vielleicht erst in dreißig Jahren überbaut werden und eine jetzt durchgeführte Vermessung in diesem fernen Zeitpunkt schon wieder Mängel haben wird.

## **Die Bestimmung der Bahnstörungen künstlicher Erdsatelliten mit Hilfe von Schwereanomalien**

*Von K. R. Koch, Bonn*

### *Zusammenfassung*

Sind die Bahnelemente eines künstlichen Erdsatelliten zu einem bestimmten Zeitpunkt gegeben, lassen sich durch numerische Integration der Störungsgleichungen die Änderungen der Bahnelemente mit der Zeit und daraus die Positionen des Satelliten berechnen, sofern die Schwereanomalien auf der gesamten Erdoberfläche bekannt sind. Umgekehrt kann man unbekannte Schwereanomalien bestimmen, falls bei bekannten Bahnelementen die Positionen von Satelliten beobachtet sind. In einem Rechenbeispiel wird der Einfluß von Schwereanomalien und von Fehlern in den Bahnelementen auf die Bahnstörung eines Satelliten angegeben und die Bestimmung unbekannter Schwereanomalien erläutert.

### *Résumé*

Si les éléments orbitaux d'un satellite artificiel sont donnés dans un moment, on peut calculer l'orbite perturbée et la position du satellite par l'intégration numérique des équations donnant les perturbations pour le cas où les anomalies de la pesanteur sont connues sur la terre. En outre on peut déterminer les anomalies inconnues de la pesanteur si les éléments orbitaux et la position d'un satellite sont donnés. Un exemple montre l'influence des anomalies de la pesanteur et des fautes des éléments orbitaux sur l'orbite perturbée d'un satellite. De plus la détermination des anomalies inconnues de la pesanteur est expliquée.

Ist die Bahn eines Satelliten im Raum bekannt, läßt sich aus den Beobachtungen des Satelliten die Lage der Beobachtungspunkte auf der Erde angeben [6, 14]. Diese sogenannte Bahnmethode ist das einfachste Verfahren, durch Satellitenbeobachtungen die Positionen von Neupunkten an der Erdoberfläche zu erhalten. Da immer genauere Methoden entwickelt werden, Bahnelemente von Satelliten zu bestimmen, werden auch die Möglichkeiten zur Anwendung der Bahnmethode immer größer. Im folgenden sollen daher die Formeln angegeben werden, mit denen die Bahnstörungen von Satelliten und ihre Positionen berechnet werden können, wenn die Bahnelemente für einen bestimmten Zeitpunkt gegeben sind.

Bedeutet  $W$  das Potential der Erdschwere,  $t$  die Zeit und  $x, y, z$  die Koordinaten des astronomischen Äquatorsystems mit dem Nullpunkt im Schwerpunkt der Erde, der  $xy$ -Ebene in der Äquatorebene und der  $x$ -Achse in Richtung auf den Frühlingspunkt, ergeben sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen (nichtrelativistisch) eines Satelliten, dessen Masse im Vergleich zur Erdmasse vernachlässigbar klein ist, zu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial W}{\partial z} \quad (1)$$

Ist das Schwerepotential  $W$  im Außenraum der Erde bekannt und sind für einen Satelliten die Anfangsbedingungen  $x_0, y_0, z_0$  und  $dx_0/dt, dy_0/dt, dz_0/dt$  der Differentialgleichungen (1) gegeben, lassen sich durch numerische Integration der Gleichungen (1) mit Hilfe von Rechenanlagen die Koordinaten  $x, y, z$  des Satelliten für einen beliebigen Zeitpunkt angeben [16].

Da sich die Koordinaten  $x, y, z$  bereits während eines Satellitenumlaufs sehr rasch ändern, eignen sich die Differentialgleichungen (1) nicht sehr gut für die numerische Integration. Es empfiehlt sich eher, die in der Astronomie unter den Namen «Variation der Elemente» oder «Störungsgleichungen» bekannten Differentialgleichungen zu verwenden, die den Gleichungen (1) äquivalent sind und die Änderungen der Bahnelemente des Satelliten mit der Zeit angeben. Diese Änderungen werden bekanntlich dadurch hervorgerufen, daß nicht nur die Kraft auf den Satelliten wirkt, die der Anziehung einer als Massenpunkt zu betrachtenden Erde entspricht, sondern zusätzliche Störkräfte, die vor allem durch die Abplattung der Erde verursacht werden. Während eines Umlaufs ändern sich die Bahnelemente jedoch nur langsam [13, 15], so daß sich die Störungsgleichungen mit weniger Integrationsschritten als die Gleichungen (1) integrieren lassen.

Bezeichnet man mit  $K_1$  die Komponente der Störbeschleunigung senkrecht auf der Bahnebene des Satelliten mit der positiven Richtung zum Nordpol, mit  $K_2$  die Komponente in der Bahnebene, die senkrecht zum Radiusvektor wirkt und deren positive Richtung in die Bewegungsrichtung des Satelliten zeigt, mit  $K_3$  die Komponente in Richtung des Radiusvektors, positiv nach außen, ergeben sich die Störungsgleichungen in der von Gauß entwickelten Form [1, 2, 12, 15]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin(\omega + v)}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} K_1, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r \cos(\omega + v)}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}} K_1, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{-\sqrt{1 - e^2} \cos v}{n a e} K_3 + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n a e} \left(1 + \frac{r}{a(1 - e^2)}\right) \sin v K_2 - \\
&\quad - \frac{r \sin(\omega + v) \cot i}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}} K_1, \tag{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2e \sin v}{n \sqrt{1 - e^2}} K_3 + \frac{2a \sqrt{1 - e^2}}{n r} K_2, \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin v}{n a} K_3 + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n a^2 e} \left(\frac{a^2(1 - e^2)}{r} - r\right) K_2, \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{1}{n a} \left(\frac{2r}{a} - \frac{1 - e^2}{e} \cos v\right) K_3 - \frac{1 - e^2}{n a e} \left(1 + \frac{r}{a(1 - e^2)}\right) \sin v K_2
\end{aligned}$$

Es bedeuten  $\Omega$  die Rektaszension des aufsteigenden Knotens,  $i$  die Bahnneigung,  $\omega$  das Argument des Perigäums,  $a$  die große Halbachse der Bahnellipse,  $e$  ihre Exzentrizität und  $M$  die mittlere Anomalie.  $r$  ist der Betrag des Radiusvektors,  $v$  die wahre Anomalie und  $n$  die mittlere Winkelgeschwindigkeit. Es gilt, wobei  $k$  die Gravitationskonstante und  $\mu$  die Erdmasse bedeuten:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad v = M + 2e \sin M + \dots, \quad n^2 = \frac{k\mu}{a^3} \tag{3}$$

Sind die Bahnelemente eines Satelliten im Zeitpunkt  $t_0$  gegeben, erhält man durch numerische Integration von (2) zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t_0 + t$  die Änderungen der Bahnelemente und mit [15]:

$$\begin{aligned}
x &= r (\cos \Omega \cos(\omega + v) - \sin \Omega \sin(\omega + v) \cos i), \\
y &= r (\sin \Omega \cos(\omega + v) + \cos \Omega \sin(\omega + v) \cos i), \\
z &= r \sin(\omega + v) \sin i
\end{aligned} \tag{4}$$

die Koordinaten  $x, y, z$  des Satelliten im astronomischen Äquatorsystem. Um das Anwachsen von Rechenungenauigkeiten zu vermeiden, darf allerdings nur über wenige Satellitenumläufe integriert werden. Voraussetzung für die Integration ist, daß die Komponenten  $K_1, K_2, K_3$  der Störbeschleunigung bekannt sind, die, wie im folgenden gezeigt wird, aus dem Schwerepotential  $W$  zu gewinnen sind.

Da die harmonischen Koeffizienten höherer Ordnungen in der Kugelfunktionsentwicklung für das Schwerepotential  $W$  der Erde mit Hilfe der dynamischen Satellitengeodäsie nur unsicher zu bestimmen sind [3, 4], soll hier, wie von *Arnold* [1] vorgeschlagen,  $W$  durch die Randwertaufgabe der physikalischen Geodäsie erhalten werden.

Das Schwerepotential  $W$  wird zerlegt in

$$W = U + T, \quad (5)$$

wobei  $U$  das Anziehungspotential eines Rotationsellipsoides, das mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde um seine mit der Erdachse zusammenfallende, kleine Achse rotiert, und  $T$  das Störpotential bedeuten. Ersetzt man die Erdoberfläche durch die Oberfläche der Erdkugel mit dem Radius  $R$ , ergibt sich, sofern die Masse der Erde und der Erdkugel gleich sind und ihre Schwerpunkte zusammenfallen, das Störpotential  $T$  aus der verallgemeinerten Formel von Stokes zu [5, 9]:

$$T(P) = \frac{r}{4\pi} \int \int_q \Delta g S(P, Q) dq \quad (6)$$

$\Delta g$  ist die Freiluftanomalie,  $r$  der Abstand des Satelliten  $P$  vom Kugelmittelpunkt,  $Q$  der variable Punkt auf der Erdkugel,  $dq$  das Flächenelement der Einheitskugel und  $S(P, Q)$  die verallgemeinerte Stokessche Funktion. Sie lautet:

$$S(P, Q) = \tau^2 \left( \frac{2}{D} + 1 - 3D - \tau \cos \psi \left( 5 + 3 \ln \frac{D+1-\tau \cos \psi}{2} \right) \right) \quad (7)$$

mit  $D^2 = 1 - 2\tau \cos \psi + \tau^2$ ,  $\tau = \frac{R}{r}$ ,

$$\cos \psi = \sin \varphi_s \sin \varphi_Q + \cos \varphi_s \cos \varphi_Q \cos(\lambda_Q - \lambda_s)$$

Das Produkt  $rD$  ergibt den räumlichen Abstand zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$ ,  $\psi$  bedeutet den sphärischen Abstand zwischen  $P$  und  $Q$ , gemessen im Mittelpunkt der Erdkugel, und  $\varphi_Q$ ,  $\lambda_Q$ , beziehungsweise  $\varphi_s$ ,  $\lambda_s$  sind die sphärische Breite und Länge des variablen Punktes  $Q$  beziehungsweise des Subsatellitenpunktes  $P_s$ ; das ist der Punkt auf der Erdkugel, in dessen Zenit der Satellit steht.

Wegen der großen Entfernung des Satelliten von der Erdoberfläche brauchen die nur geringfügigen Verbesserungen der Formel von Stokes infolge der Topographie (vgl. [10]) nicht berücksichtigt zu werden.

Wenn man sich auch zur Ermittlung von  $T$  nach (6) die Freiluftanomalien  $\Delta g$  auf der Erdkugel ausgebreitet denkt, wird doch bei der Berechnung der  $\Delta g$  ein Rotationsellipsoid zugrunde gelegt. Theoretisch ist die Wahl des Ellipsoides beliebig, praktisch wird man aber wegen Unkenntnis der für die Berechnung der  $\Delta g$  erforderlichen Ellipsoidhöhen dasjenige Ellipsoid wählen, dessen Abmessungen mit den Erddimensionen am besten übereinstimmen. Anstelle des in der gravimetrischen Geodäsie ge-

bräuchlichen, Internationalen Ellipsoides soll daher hier ein Ellipsoid mit Konstanten eingeführt werden, die von der Internationalen Astronomischen Union (IAU) empfohlen wurden und die sich auf neuere Schwere-messungen und Satellitenbeobachtungen gründen.

Bedeutet  $f$  die Abplattung, dann läßt sich bei Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung  $f^3$  das Anziehungspotential  $U$  eines Ellipsoides durch die Kugelfunktionsentwicklung darstellen [7, 8]:

$$U = \frac{k\mu}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{a_e}{r} \right)^2 P_2(\sin \varphi) - J_4 \left( \frac{a_e}{r} \right)^4 P_4(\sin \varphi) \right] \quad (8)$$

$J_2$  und  $J_4$  sind die Stokesschen Konstanten,  $P_2(\sin \varphi)$  und  $P_4(\sin \varphi)$  die zonalen Kugelfunktionen 2. und 4. Ordnung, und  $a_e$  ist die große Ellipsoidhalbachse. Um das Potential  $U$  für Punkte an der Ellipsoidoberfläche zu erhalten, muß zu (8) das Potential der Fliehkraft  $\frac{1}{2} w^2 r^2 \cos^2 \varphi$  addiert werden, worin  $w$  die Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeutet.

Setzt man in (8) die folgenden, von der IAU empfohlenen Werte [19], S. 27: ein:

$$\begin{aligned} k\mu &= 398603 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{ sec}^{-2}, \\ J_2 &= 0,0010827, \\ a_e &= 6378160 \text{ m}, \\ w &= 0,000072921 \text{ sec}^{-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

ist das Potential  $U$  des Ellipsoides eindeutig bestimmt. Aus der Beziehung [7], S. 136:

$$J_2 = \frac{2}{3} f - \frac{1}{3} f^2 - \frac{1}{3} m \left( 1 - \frac{2}{7} f \right) \quad \text{mit} \quad m = \frac{w^2 a_e^3 (1-f)}{k\mu} \quad (10)$$

läßt sich  $f$  durch sukzessive Annäherung berechnen, womit sich  $J_4$  ergibt zu:

$$J_4 = -\frac{4}{35} f (7f - 5m) \quad (11)$$

Die Schwerkraft  $\gamma$  auf dem Ellipsoid beträgt:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{k\mu}{a_e^2} \left( 1 + f - \frac{3}{2} m \right) \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - f + \frac{15}{4} m^2 - \frac{17}{14} fm \right) \sin^2 B \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{8} f^2 - \frac{5}{8} fm \right) \sin^2 2B \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$B$  bedeutet die geographische Breite. Mit den Konstanten (9) erhält man:

$$\begin{aligned} f &= 1:298,25, \quad J_4 = -0,0000238, \\ \gamma &= 978042,7 (1 + 0,0053022 \sin^2 B - 0,0000058 \sin^2 2B) [\text{mGal}] \end{aligned} \quad (13)$$



Infolge der bereits erwähnten, unzureichenden Kenntnisse über die Ellipsoidhöhen muß man annehmen, daß sich die bei der Berechnung der Freiluftanomalien  $\Delta g_F$  auf dem Internationalen Ellipsoid benutzten Ellipsoidhöhen mit der Einführung der neuen Ellipsoidparameter nicht ändern. Es ergeben sich dann aus den  $\Delta g_F$  des Internationalen Ellipsoids die hier benötigten Anomalien  $\Delta g$  mit der folgenden Beziehung, in der  $\gamma_I$  die Normalschwere auf dem Internationalen Ellipsoid bedeutet:

$$\Delta g = \Delta g_F + \gamma_I - \gamma \quad (14)$$

Da in der verallgemeinerten Stokesschen Funktion  $S(P, Q)$  in (6) die Kugelfunktionen 0. und 1. Ordnung fehlen, braucht in (14) das konstante Glied nicht berücksichtigt zu werden, und man erhält für das hier gewählte Ellipsoid:

$$\Delta g = \Delta g_F - 13,434 \sin^2 B - 0,078 \sin^2 2B \text{ [mGal]} \quad (15)$$

Subtrahiert man in (8) das Potential  $k\mu/r$  der Erde als Massenpunkt, ergibt sich mit (5) das Potential  $P_K$  der in (2) benötigten Störkraft zu:

$$P_K = V + T \quad (16)$$

$$\text{mit } V = -\frac{k\mu}{r} \left[ J_2 \left( \frac{a_e}{r} \right)^2 P_2(\sin \varphi) + J_4 \left( \frac{a_e}{r} \right)^4 P_4(\sin \varphi) \right]$$

Aus Abbildung 1 folgt für die Komponenten  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  der Störkraft [1, 11]:

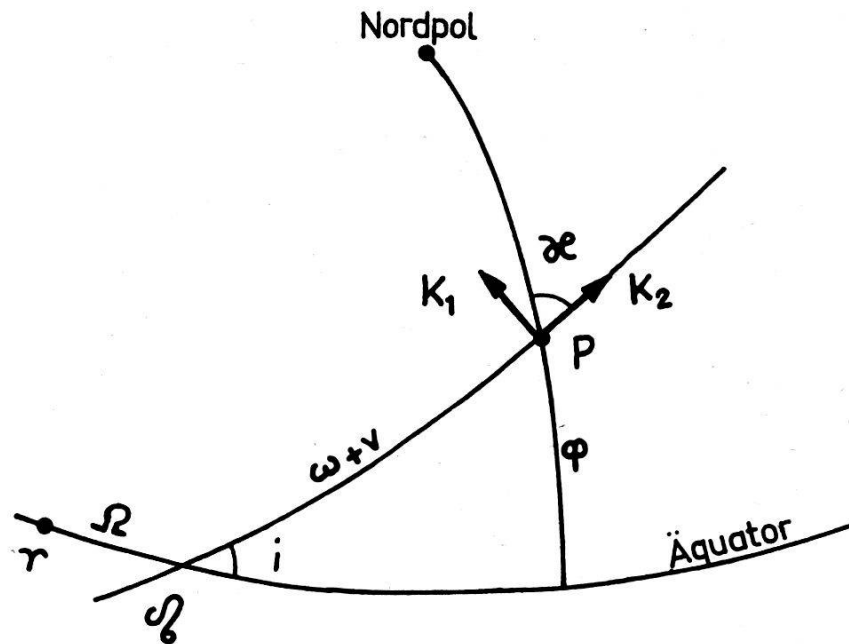


Abbildung 1

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \sin \kappa + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \sin \kappa - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \cos \kappa, \\
K_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cos \kappa + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \cos \kappa + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \sin \kappa, \\
K_3 &= \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial r}
\end{aligned} \tag{17}$$

und nach Differentiation von  $V$  und einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}
K_1 &= -\frac{k\mu}{r^2} F \cos i + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\cos i}{\cos \varphi} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \frac{\cos(\omega + v)}{\cos \varphi} \cos i, \\
K_2 &= -\frac{k\mu}{r^2} F \cos(\omega + v) \sin i + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\cos(\omega + v)}{\cos \varphi} \cos i + \\
&\quad + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \frac{\cos i}{\cos \varphi},
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
K_3 &= \frac{k\mu}{r^2} \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{a_e}{r} \right)^2 (3 \sin^2(\omega + v) \sin^2 i - 1) + \frac{5}{8} J_4 \left( \frac{a_e}{r} \right)^4 \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot (35 \sin^4(\omega + v) \sin^4 i - 30 \sin^2(\omega + v) \sin^2 i + 3) \right] + \frac{\partial T}{\partial r}
\end{aligned}$$

mit  $\cos \varphi = (1 - \sin^2(\omega + v) \sin^2 i)^{\frac{1}{2}},$

$$\begin{aligned}
F &= 3 J_2 \left( \frac{a_e}{r} \right)^2 \sin(\omega + v) \sin i + J_4 \left( \frac{a_e}{r} \right)^4 \left( \frac{35}{2} \sin^3(\omega + v) \sin^3 i - \right. \\
&\quad \left. - \frac{30}{4} \sin(\omega + v) \sin i \right)
\end{aligned}$$

Die Ableitungen des Störpotentials  $T$  ergeben sich zu [1, 5]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{1}{4\pi} \iint_q \Delta g \frac{\partial S(P, Q)}{\partial \varphi} dq, \\
\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} &= \frac{1}{4\pi} \iint_q \Delta g \frac{\partial S(P, Q)}{\cos \varphi \partial \lambda} dq, \\
\frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{4\pi} \iint_q \Delta g \frac{\partial}{\partial r} [r S(P, Q)] dq
\end{aligned} \tag{19}$$



mit

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial S}{\cos \varphi \partial \lambda} \end{array} \right\} = \tau^3 \left\{ \begin{array}{l} \sin \psi \cos A \\ \sin \psi \sin A \end{array} \right\} \left[ \frac{2}{D^3} + \frac{6}{D} + 3 \frac{D-1+\tau \cos \psi}{D \sin^2 \psi} - \right. \\ \left. - 8 - 3 \ln \frac{D+1-\tau \cos \psi}{2} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r S) = -2 S(P, Q) - \tau^2 \left[ \frac{1-\tau^2}{D^3} - 1 - 3 \tau \cos \psi \right],$$

$$\sin \psi \cos A = \cos \varphi_S \sin \varphi_Q - \sin \varphi_S \cos \varphi_Q \cos(\lambda_Q - \lambda_S),$$

$$\sin \psi \sin A = \cos \varphi_Q \sin(\lambda_Q - \lambda_S)$$

$A$  bedeutet das Azimut des variablen Punktes  $Q$ , gemessen im Subsatellitenpunkt  $P_S$ . Zur Berechnung von (19) wird die strenge Integration durch Summation über eine endliche Anzahl von Flächenelementen ersetzt.

Die Breite  $\varphi_S$  des Subsatellitenpunktes erhält man aus  $\sin \varphi_S = \sin(\omega + v) \cdot \sin i$ . Bei der Berechnung von  $\lambda_S$  muß die Erdrotation berücksichtigt werden. Ist  $\lambda_{\odot}$  die Länge des aufsteigenden Knotens zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $\alpha$  die Rektaszension des Satelliten, ergibt sich:

$$\lambda_S = \lambda_{\odot} + (\alpha - \Omega) - \omega t \quad (20)$$

mit  $\tan(\alpha - \Omega) = \tan(\omega + v) \cos i$

Damit sind die erforderlichen Formeln zusammengestellt, um durch numerische Integration der Differentialgleichungen (2) die Änderungen bekannter Bahnelemente eines Satelliten mit der Zeit zu ermitteln, so daß aus (4) seine Positionen erhalten werden können. Benötigt werden hierzu die Schwereanomalien der gesamten Erdoberfläche.

Große Teile der Erdoberfläche sind zurzeit noch gravimetrisch unvermessen, so daß die Bahnmethod der Satellitengeodäsie nur dann befriedigende Ergebnisse erzielen wird, wenn der zu beobachtende Satellit über Gebiete fliegt, deren Schwereanomalien bekannt sind. Wie von *Arnold* [1] dargelegt, kann aber die Bahnmethode auch zur Bestimmung unbekannter Schwereanomalien benutzt werden. In diesem Fall müssen bei bekannten Bahnelementen die Positionen von Satelliten gegeben sein, um die Schwereanomalien der gravimetrisch unvermessenen Teile der Erde zu bestimmen, während bei der Ableitung obiger Formeln davon ausgegangen wurde, daß die Schwereanomalien bekannt und die Positionen von Satelliten gesucht sind. Im folgenden Rechenbeispiel soll die Bestimmung unbekannter Schwereanomalien kurz erläutert werden.

### Rechenbeispiel

Um Vorstellungen über den Einfluß von Schwereanomalien und von fehlerhaften Bahnelementen auf die Bahnstörung eines Satelliten zu er-

halten und um Kenntnis von der Genauigkeit von Näherungslösungen zu gewinnen, wurde das folgende Beispiel mit Hilfe der IBM 7090 des Instituts für Instrumentelle Mathematik der Universität Bonn durchgerechnet. Die numerische Integration erfolgte nach dem *Runge-Kutta*-Verfahren mit dem Share-Programm SDA 3010, dessen Schrittweite durch eine Genauigkeitsschranke gesteuert wird. Die Schranke wurde so gesetzt, daß die nach (4) zu ermittelnden Koordinaten des Satelliten nach einem Umlauf auf  $\pm 0,5$  m genau berechnet werden.

Die folgenden Bahnelemente des «Explorer 9» wurden als Anfangswerte verwendet:

$$\Omega = 203^\circ, 6802, \quad i = 38^\circ, 828, \quad \omega = 265^\circ, 8568$$

$$a = 7967\,500 \text{ m}, \quad e = 0,1062, \quad M = 110^\circ, 1682$$

Setzt man in (20)  $\lambda_{\odot} = 129^\circ, 5$ , dann fliegt der Satellit bei einem Umlauf weitgehend über die mit Schwereanomalien bedeckten Teile der Erdoberfläche (vgl. Abb. 2), die der Veröffentlichung von *Uotila* [18] als Mittelwerte von  $5^\circ \times 5^\circ$  großen Flächenelementen entnommen werden können. Damit die Schwereanomalie eines Flächenelementes die Satellitenbahn spürbar ändert, werden aus diesen Mittelwerten der Freiluftanomalien  $\Delta g_F$ , die mit der Internationalen Schwereformel berechnet sind, die Mittelwerte für  $15^\circ \times 15^\circ$  große Flächenelemente gebildet, wobei die Anomalien in den gravimetrisch unvermessenen Teilen der Erde zu Null angenommen werden. Aus diesen Mittelwerten ergeben sich dann nach (15) die Mittelwerte der hier benötigten Anomalien  $\Delta g$ .

Die oben angegebenen Bahnelemente sollen sich auf den Zeitpunkt  $t = 0$  beziehen. Integriert wird dann bis zur Zeit  $t = u = 2\pi \sqrt{a^3/k\mu}$ , die der Umlaufszeit des Satelliten bei ungestörter Bewegung entspricht. Aus den zur Zeit  $t = 0$  und  $t = u$  nach (4) zu berechnenden Koordinaten des Satelliten ergibt sich der Betrag  $s$  der Abweichung des Satelliten aus der ungestörten Bahn nach einem Umlauf zu

$$s = [(x_{t=0} - x_{t=u})^2 + (y_{t=0} - y_{t=u})^2 + (z_{t=0} - z_{t=u})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

In dem hier gewählten Beispiel resultiert aus dem Schwerefeld der Erde eine Abweichung von

$$s = 61\,421 \text{ m} \quad (22)$$

Der Hauptanteil der Bahnstörung wird von dem Glied mit  $J_2$  in (16), das heißt von der Abplattung der Erde, hervorgerufen. Setzt man in (16)  $J_4 = 0$  und  $T = 0$ , ergibt sich

$$s_z = 60\,890 \text{ m} \quad (23)$$

Um die Einwirkungen von Schwereanomalien auf die Bahnstörungen kennenzulernen, wird der Mittelwert  $\Delta g = -4,38 \text{ mGal}$  in dem  $15^\circ \times 15^\circ$  Flächenelement gleich Null gesetzt, in dem der Subsatellitenpunkt des Perigäums  $P_e$  liegt (vgl. Abb. 2). Man erhält:

$$s_P = 61\,455 \text{ m und } s_P - s = 34 \text{ m} \quad (24)$$

Setzt man  $\Delta g = -4,83$  mGal in der Fläche gleich Null, in der der Subsatellitenpunkt des Apogäums  $Ap$  liegt (vgl. Abb. 2), ergibt sich:

$$s_A = 61\,426 \text{ m und } s_A - s = 5 \text{ m} \quad (25)$$

Im Perigäum bzw. Apogäum fliegt der Satellit in einer Höhe von etwa 730 km bzw. 2430 km über der Erdoberfläche. Aus dem Vergleich von (24) und (25) ist ersichtlich, wie schnell mit wachsender Flughöhe der Einfluß der Schwereanomalien abnimmt.

Sollen umgekehrt aus bekannten Bahnabweichungen  $x_s, y_s, z_s$  mit  $x_s = x_{t=0} - x_{t=u}, y_s = y_{t=0} - y_{t=u}, z_s = z_{t=0} - z_{t=u}$  unbekannte Mittelwerte für Schwereanomalien bestimmt werden, kann man für den Fall von drei unbekannten Mittelwerten  $\Delta g_1, \Delta g_2, \Delta g_3$  folgendermaßen verfahren. Es wird zunächst die aus den bekannten Schwereanomalien herührende Bahnabweichung  $x_b, y_b, z_b$  mit  $x_b = x_{b,t=0} - x_{b,t=u}$  usw. sowie  $\Delta g_1 = \Delta g_2 = \Delta g_3 = 0$  ermittelt und anschließend die Bahnabweichungen  $x_1, y_1, z_1$  aus den bekannten Anomalien und  $\Delta g_1 = 1 \text{ mGal}, \Delta g_2 = \Delta g_3 = 0$ ;  $x_2, y_2, z_2$  aus den bekannten Anomalien und  $\Delta g_1 = 0, \Delta g_2 = 1 \text{ mGal}, \Delta g_3 = 0$  sowie  $x_3, y_3, z_3$  entsprechend. Man erhält dann die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_s - x_b &= (x_1 - x_b) \Delta g_1 + (x_2 - x_b) \Delta g_2 + (x_3 - x_b) \Delta g_3, \\ y_s - y_b &= (y_1 - y_b) \Delta g_1 + (y_2 - y_b) \Delta g_2 + (y_3 - y_b) \Delta g_3, \\ z_s - z_b &= (z_1 - z_b) \Delta g_1 + (z_2 - z_b) \Delta g_2 + (z_3 - z_b) \Delta g_3, \end{aligned} \quad (26)$$

aus denen die unbekannten Schwereanomalien  $\Delta g_1, \Delta g_2, \Delta g_3$  ermittelt werden können. Bei mehr als drei unbekannten Anomalien müssen die Bahnstörungen weiterer Satellitenumläufe gegeben sein.

Nach dieser Methode wurden drei (bereits bekannte) Anomalien-Mittelwerte für die  $15^\circ \times 15^\circ$  Flächenelemente bestimmt, die in Abbildung 2 schraffiert sind, indem die Bahnabweichungen als gegeben und die drei Anomalien als unbekannt angenommen wurden. Es ergab sich:

$$\Delta g_1 = -2,23 \text{ mGal}, \Delta g_2 = 10,63 \text{ mGal}, \Delta g_3 = -4,51 \text{ mGal}$$

Die Sollwerte betragen:

$$\Delta g_1 = -2,23 \text{ mGal}, \Delta g_2 = 10,33 \text{ mGal}, \Delta g_3 = -4,38 \text{ mGal}$$

Bei mehr als drei zu bestimmenden Schwereanomalien muß mit größeren Fehlern gerechnet werden.

Die Genauigkeit der Bahnmethode ist entscheidend von der Genauigkeit abhängig, mit der die Bahnelemente des Satelliten gegeben sind. Während sich bei einem Umlauf die Bahnelemente des «Explorer 9» bei  $i$  um  $0,000\,05^\circ$ , bei  $a$  um  $-58 \text{ m}$  und bei  $e$  um  $-0,000\,0025$  ändern, beträgt die Änderung bei  $\Omega$   $-0^\circ,3021$  und bei  $\omega$   $0^\circ,3898$ . Am stärksten variiert die mittlere Anomalie  $M$ , und zwar um  $360^\circ$  nach einem anomali-

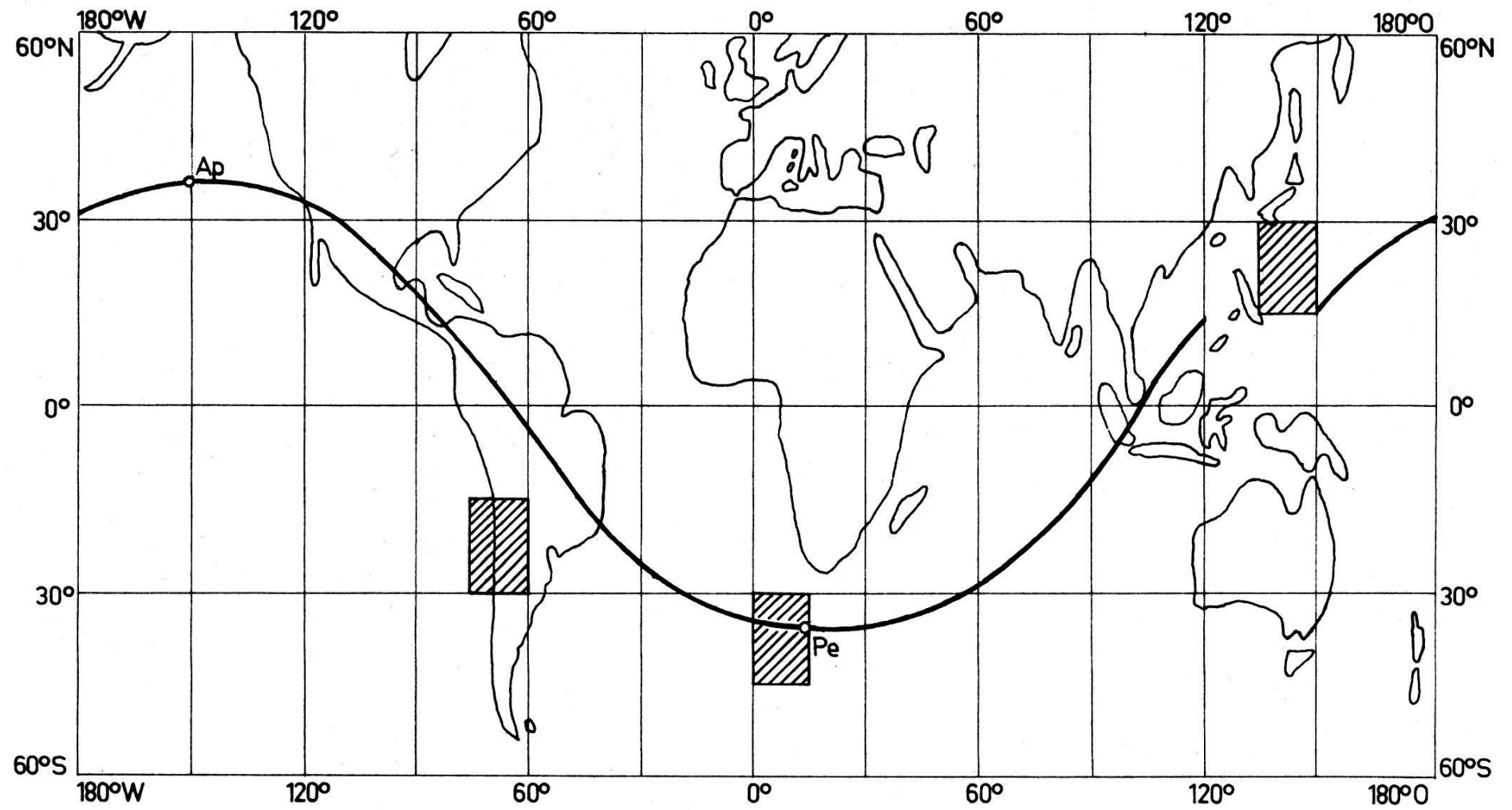


Abbildung 2

stischen Umlauf. Nimmt man an, von den Bahnelementen des «Explorer 9» seien  $i$ ,  $a$  und  $e$  fehlerfrei gegeben, während die Fehler in  $\Omega$ ,  $\omega$  und  $M - 0^\circ,03$ ,  $0^\circ,04$  und  $0^\circ,04$  betragen, so ergibt das zur Zeit  $t = 0$  einen Fehler in der nach (4) berechneten Position des Satelliten von  $x_F = 4387$  m,  $y_F = -2448$  m und  $z_F = 6353$  m. Ermittelt man dagegen mit den fehlerhaften Bahnelementen nach (21) die Bahnabweichung  $s$  nach einem Umlauf, erhält man anstelle von (22)  $s = 61\,358$  m. Fehler in den Bahnelementen haben also nur geringen Einfluß auf  $s$ . Dieser Umstand wirkt sich besonders günstig aus, wenn unbekannte Schwereanomalien aus den Bahnstörungen nach einem Satellitenumlauf bestimmt werden sollen, worauf *Arnold* [1] hingewiesen hat.

Wie bereits erwähnt, wird der Hauptanteil der Bahnstörung durch die Abplattung der Erde hervorgerufen. Es läßt sich daher näherungsweise die aus dem Störpotential  $T$  in (16) resultierende Bahnabweichung getrennt von dem aus  $V$  in (16) verursachten Anteil ermitteln, wobei auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (2) die Bahnelemente  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $a$  und  $e$  als konstant angesehen werden können mit Ausnahme der Winkelgeschwindigkeit  $n$  in der letzten Gleichung, die entsprechend der Änderung von  $a$  variiert werden muß [1, 15]. Für die Bahnabweichung  $s$  ergibt sich dann anstelle von (22) der Wert  $s = 61\,415$  m. Diese Ungenauigkeit der Näherungsberechnung kann hingenommen werden, falls die Position eines Satelliten nicht genauer als etwa  $\pm 20$  m zu beobachten ist.

#### *Literatur*

- [1] *Arnold, K.*: Die Bahnen der künstlichen Erdsatelliten in ihrer Abhängigkeit von den Schwereanomalien. Veröff. Geod. Institut Potsdam, Nr. 27, Berlin 1965.
- [2] *Brouwer, D.; G.M. Clemence*: Methods of Celestial Mechanics. New York 1961.
- [3] *Cook, A.H.*: On the Determination of the Even Zonal Harmonics in the External Gravitational Potential of the Earth. Geophysical Journal, Vol. 10, S. 181, Oxford 1965.
- [4] *Groten, E.*: Betrachtung einiger Randwertaufgaben im Zusammenhang mit Satelliten-Bahnstörungen infolge topographischer Massenunregelmäßigkeiten. Deutsche Geod. Kommission, Reihe A, Nr. 48, München 1966.
- [5] *Hirvonen, R.A.*: New Theory of the Gravimetric Geodesy. Publ. Isostatic Institute of the Int. Ass. of Geodesy, No. 32, Helsinki 1960.
- [6] *Hofmann, W.*: Erdnahe Satelliten im Dienste der Geodäsie – Ergebnisse und Möglichkeiten. Zeitschrift für Vermessungswesen, 88. Jg., S. 61, Stuttgart 1963.
- [7] *Jeffreys, H.*: The Earth. Cambridge 1959.
- [8] *Kaula, W.M.*: Determination of the Earth's Gravitational Field. Reviews of Geophysics, Vol. 1, S. 507, Washington 1963.
- [9] *Koch, K.R.*: Über die Randwertaufgabe der physikalischen Geodäsie. Zeitschrift für Vermessungswesen (im Druck).
- [10] *Koch, K.R.*: Der Einfluß der Topographie auf die Formel von Stokes. Zeitschrift für Vermessungswesen, 90. Jg., S. 356, Stuttgart 1965.
- [11] *Merson, R.H.*: The Motion of a Satellite in an Axisymmetric Gravitational Field. Geophysical Journal, Vol. 4, S. 17, London 1961.



- [12] *Moulton, F.R.*: An Introduction to Celestial Mechanics. New York 1914.
- [13] *Mueller, I.*: Introduction to Satellite Geodesy. New York 1964.
- [14] *Ramsayer, K.*: Satellitengeodäsie und Satellitennavigation. Zeitschrift für Vermessungswesen, 91. Jg., S. 217, Stuttgart 1966.
- [15] *Roy, A.E.*: The Foundations of Astrodynamics. New York 1965.
- [16] *Schneider, M.*: Die Bewegung künstlicher Erdsatelliten im Schwerfeld einer Erde mit drei verschiedenen Trägheitsmomenten. Deutsche Geod. Kommission, Reihe C, Nr. 93. München 1966.
- [17] *Strange, W.E.; M.A. Khan*: The Prediction of Gravity in Unsurveyed Areas Using a Combination of Satellite and Surface Gravity Data, Abstract. Trans. Amer. Geophysical Union, Vol. 46, S. 511, Washington 1965.
- [18] *Uotila, U.A.*: Harmonic Analysis of World-wide Gravity Material. Publ. Iso-static Institute of the Int. Ass. of Geodesy, No. 39, Helsinki 1962.
- [19] Chronique de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale, N° 58, Paris 1965.

## **Probleme der Regionalplanung**

Vortrag anlässlich der Planertagung vom 23. März 1966 in Baden

*Von Dr. Pius Guthauser, Direktionssekretär I, Aarau*

### *Zusammenfassung*

Planung im Sinne hoheitlicher Einflußnahme auf die Nutzung von Grund und Boden bewirkt für den Grundeigentümer eine mehr oder weniger einschneidende Eigentumsbeschränkung. Auf dem Gebiet der Siedlungsplanung sind die Kantone und – im Rahmen der kantonalen Gesetzgebung – die Gemeinden für Planungsmaßnahmen zuständig. Die Regionalplanung als übergemeindliche Nutzungsordnung ist eine Folge der wirtschaftlichen und bevölkerungsmäßigen Entwicklung. Ihre rechtliche und organisatorische Ausgestaltung kann sehr verschieden sein. Im Vordergrund steht die Zusammenarbeit der Gemeinden und des regionalen Einflußbereiches entweder im Sinne bloßer Koordination der Ortsplanungen oder der gemeinsamen Erarbeitung einer regionalen Besiedlungskonzeption. Diese Zusammenarbeit kann sich rein faktisch vollziehen, besser jedoch im Rahmen entweder einer privatrechtlichen Organisation oder eines öffentlich-rechtlichen Zweckverbandes oder gar eines neuen innerkantonalen Herrschaftsverbandes. Auch der Kanton kann – und muß es wohl auch vielfach – auf recht verschiedene Weise übergemeindliche Planung entweder selber betreiben oder auf diese Einfluß nehmen. Die Zielsetzungen moderner Regional- und Landesplanung können indes nicht allein mit dem Mittel öffentlich-rechtlicher Eigentumsbeschränkungen erreicht werden. Zahlreiche andere Bereiche staatlichen Handelns, wie Finanz-, Wirtschafts- und Verkehrspolitik, die Errichtung von Schulen und kulturellen Institutionen, lassen sich in den Dienst planerischer Absichten stellen.