

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 64 (1966)

Heft: 6

Artikel: Zur Frage der Entblätterung heterogener sphäroidischer Gleichgewichtsfiguren

Autor: Ledersteger, K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-220761>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schwellz, Verein für Vermessungs-wesen und Kulturtechnik; Schwellz, Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Amélio-rations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 6 • LXIV. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Juni 1966

Zur Frage der Entblätterung heterogener sphäroidischer Gleichgewichtsfiguren

von K. Ledersteger, Wien

Zusammenfassung

Nach einer allgemeinen Diskussion der Niveauflächen und der Gleichgewichtsbedingung wird das Problem der Stokesschen Elemente formuliert und die Eindeutigkeit des Dichtegesetzes der Gleichgewichtsfiguren bewiesen. Die Berechnung einer Gleichgewichtsfigur aus der Masse, dem Dichtegesetz und der Gleichgewichtsbedingung wird am Beispiel des Wiechertmodells demonstriert. Der Kern des Modells ist eine Gleichgewichtsanordnung, welche für eine größere Rotationsgeschwindigkeit ein MacLaurinsches Ellipsoid wird, und das Prinzip der Entblätterung gilt im Falle eines unstetigen Dichtegesetzes nicht. Zum Beweis des Prinzips der Entblätterung für die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren mit ihrem bekannten stetigen Dichtegesetz wird die Figur durch eine innere Niveaufläche der Abplattung $e_1 < e$ fiktiv in «Mantel» und «Kern» zerlegt und gezeigt, daß der Mantel durch eine äquivalente homogene Schale ersetzt werden kann, die von zwei ähnlichen Ellipsoiden der Abplattung e_1 begrenzt ist, also in ihrem «inneren Hohlraum» ein konstantes Potential besitzt. Der Mantel übt somit auf den Kern keine Anziehungskraft aus, was besagt, daß der Kern für sich allein ebenfalls eine einparametrische Gleichgewichtsfigur ist. Diese Argumentation beweist gleichzeitig, daß nicht jedes beliebige stetige Dichtegesetz eine Gleichgewichtsanordnung liefert.

Résumé

Après une discussion générale des surfaces de niveau et de la condition d'équilibre, on introduit le problème des éléments de Stokes et on démontre l'univocité de la loi de densité des figures d'équilibre. Le calcul d'une figure d'équilibre à partir de la masse, de la loi de densité et de la condition d'équilibre est démontré par un exemple sur le modèle de Wiechert. Le noyau du modèle a une configuration d'équilibre qui devient un

ellipsoïde de MacLaurin pour une grande vitesse de rotation; le principe de l'«effeuillement» ne vaut pas dans le cas d'une loi de densité discontinue. Pour démontrer le principe de l'«effeuillement» pour une figure d'équilibre uniparamétrique avec une loi de densité continue, la figure est décomposée fictivement en «manteau» et «noyau» par une surface de niveau interne dont l'aplatissement e_1 est plus petit que e , et on montre que le manteau peut être remplacé par une enveloppe équivalente homogène qui est délimitée par deux ellipsoïdes identiques d'aplatissement e_1 et dont le «vide intérieur» possède un potentiel constant. Le manteau exerce ainsi sur le noyau une force d'attraction, ce qui indique que le noyau est pour lui-même également une figure d'équilibre uniparamétrique. Cette argumentation démontre en même temps qu'une loi de densité continue ne fournit pas forcément une configuration d'équilibre.

Es ist ein bekanntes klassisches Ergebnis, daß man jede nullparametrische Gleichgewichtsfigur, das heißt jedes homogene MacLaurinsche Ellipsoid, «entblättern» kann, da eine von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte homogene Schale auf die Punkte ihres inneren Hohlraumes keine Kraft ausübt. Die inneren Niveauflächen eines MacLaurinschen Ellipsoides sind aber einschließlich der Oberfläche ähnliche Ellipsoide. Hebt man also Schale für Schale ab, so entsteht eine Reihe kleinerer MacLaurinscher Ellipsoide derselben Rotationsgeschwindigkeit, wobei die Abnahme der Dimensionen mit einer entsprechenden Abnahme der Masse verbunden ist. Somit ist der Gedanke naheliegend, zu prüfen, ob dieses «Prinzip der Entblätterung» nicht auch auf heterogene Gleichgewichtsfiguren ausgedehnt werden kann. Ganz allgemein ist dies sicherlich nicht der Fall, wie H. Macke und K. Voss [1] an den Wiechert-Modellen nachgewiesen haben. Bei diesen Figuren, die aus einem homogenen Mantel mit annähernd ellipsoidischer Oberfläche und einem streng ellipsoidischen, gleichfalls homogenen Kern bestehen, ist nämlich die gegenseitige Koppelung der beiden Schalen nicht bloß auf die Abplattungen e und e_k beschränkt, sondern das Kernellipsoid ist überhaupt kein MacLaurinsches Ellipsoid. Eine exakte Berechnung der Zweischalenmodelle und speziell der zweiparametrischen Gleichgewichtsfiguren, das heißt eben der Wiechert-Modelle, ist gänzlich unabhängig von der Theorie Macke-Voss möglich [2].

Jede gegebene sphäroidische Massenanordnung kann durch die Gesamtmasse E und die Massenmomente K_{2i} charakterisiert werden, und zwar gänzlich unabhängig von der Rotation. Natürlich ist durch (E, K_{2i}) die Massenanordnung nicht eindeutig festgelegt, weil die Massenmomente oder die zugehörigen Massefunktionen $J_{2i} = K_{2i}/a^{2i}$, unter a den Äquatorradius einer äußeren Niveaufläche verstanden, Stokessche Konstanten sind. Hingegen ist mit diesen Daten und bei Wahl einer (beliebigen) Rotationsgeschwindigkeit das äußere Potentialfeld eindeutig festgelegt, das heißt, man findet aus (E, a, ω, J_{2i}) mit den Gleichungen [3]

$$J_{2i} = g_{2i}(\bar{\varepsilon}, e, f_{2i}); \quad \bar{\varepsilon} = \omega^2 a^3 k^2 E \quad (1)$$

die Abplattung e und sämtliche Formparameter f_{2i} der Niveaufläche mit

dem gewählten Äquatorradius a . Ersetzt man in den Angaben ω durch die Abplattung e , sind also die Daten (E, a, e, J_{2i}) gegeben, so liefert natürlich die erste Gleichung (g_2) die Rotationsgeschwindigkeit oder $\bar{\varepsilon}$. Man kann dann aus g_2 mit allen folgenden Gleichungen g_{2i} sämtliche Formparameter eliminieren und erhält so zuerst eine Relation $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(e, J_{2i})$, etwa in Näherung 6.0.:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} = & -3 J_2 - \frac{5}{4} J_4 - \frac{21}{8} J_6 + 2e \left(1 - 3 J_2 - 5 J_4 \right) \\ & + 2e^2 (1 - 6 J_2) + 2e^3\end{aligned}\quad (2)$$

und anschließend aus den folgenden Gleichungen g_{2i} ($i = 2, 3, \dots$) alle Formparameter f_{2i} . Diese Art Sonderstellung der ersten Gleichung (1) ist darin begründet, daß die Zahl der Massefunktionen um eins größer ist als die Zahl der Formaparameter.

Selbstverständlich gehört zu jeder Massenanordnung (E, K_{2i}) für jeden Wert von ω eine andere Schar äußerer Niveauflächen. Ist neben der Massenanordnung eine bestimmte äußere Niveaufläche S_a (a, e, f_{2i}) gegeben, so liefert g_2 die zugehörige Rotationsgeschwindigkeit, und alle folgenden Gleichungen g_{2i} sind damit exakt erfüllt. Wichtiger ist aber der Fall, daß die «Stokeschen Elemente (E, ω, S_a) » gegeben sind. Dann liefern die Gleichungen (1) die Massefunktionen J_{2i} , die aber als «Stokesche Konstanten» Integralvarianten für unendlich viele Massenanordnungen sind. Aus diesen Massenanordnungen können wir stets eine als «wesentlich» herausgreifen, aus der sich alle übrigen durch Verschiebungen in homogenen konfokalen Ellipsoidschalen oder, als deren Grenzfall, in homogenen konzentrischen Kugelschalen um den Schwerpunkt ergeben. Allerdings wäre noch die Frage restlos zu klären, ob es trotz unserer grundsätzlichen Beschränkung auf sphäroidische Niveauflächen außer den genannten Verschiebungen noch weitere Möglichkeiten gibt.

Die sphäroidischen Massenanordnungen zerfallen in allgemeine, rotations- und äquatorsymmetrische Anordnungen und in die «Gleichgewichtsanordnungen», welche für eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit zu hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren werden. Liegt eine Gleichgewichtsanordnung (E, K_{2i}) vor und sind überdies Achse und Abplattung der Oberfläche S gegeben, so wird diese im Gleichgewichtsfalle selbst Niveaufläche, und die Gleichungen (1) liefern wie oben $\bar{\varepsilon}$ oder ω und die Formparameter. Sind aber bloß (E, S) gegeben, so fehlt ein Bestimmungsstück, und es muß zusätzlich die «Gleichgewichtsbedingung», und zwar am einfachsten in der Form $\omega = \omega(E, S)$ oder

$$\bar{\varepsilon} = xe + ye^2 + ze^3 + \dots \quad (3)$$

vorliegen, wobei die Koeffizienten $x, y, z \dots$ Funktionen der Massenmomente der Gleichgewichtsanordnung sind, wie unmittelbar (2) lehrt. Tatsächlich gilt diese Form für die beiden Grenzfälle des homogenen Ellipsoides und der Niveauflächen des Massenpunktes. Führt man in (2) die

Massefunktionen des homogenen Ellipsoids ein, so resultiert die MacLaurinsche Bedingung

$$\bar{\varepsilon} = \frac{4}{5} e + \frac{22}{35} e^2 + \frac{2}{5} e^3 + \frac{272}{1155} e^4 + \dots, \quad (3a)$$

während sich mit den Massefunktionen $J_{2i} = 0$ ergibt:

$$\bar{\varepsilon} = 2e + 2e^2 + 2e^3 + \dots = 2e/(1 - e) \quad (3b)$$

Die Bedingung (3) bestimmt jene Rotationsgeschwindigkeit, für welche die Oberfläche zur Niveaufläche wird, was bekanntlich bei Homogenität für das Gleichgewicht hinreicht. Im heterogenen Falle ist dies für das Gleichgewicht wohl notwendig, aber nicht hinreichend; vielmehr erfordert das Gleichgewicht, daß sämtliche Flächen gleicher Dichte Niveauflächen sind. Tatsächlich gehören zu den Stokesschen Elementen (E, ω, S) einer Gleichgewichtsfigur neben der wesentlichen Gleichgewichtsanordnung zahllose andere, aus den oben genannten Verschiebungen resultierende Massenanordnungen, bei denen das Gleichgewicht verlorengeht, ohne daß die Niveaufläche ihren Charakter als Niveaufläche verliert. Abstrahiert man von diesen «unwesentlichen» Massenanordnungen des Satzes von Stokes-Poincaré, dann ist jede Gleichgewichtsfigur eindeutig durch ihre Stokesschen Elemente oder wegen der Form (3) der Gleichgewichtsbedingung scheinbar durch (E, S) allein gegeben, und es genügt scheinbar ganz allgemein dabei, daß die Oberfläche Niveaufläche ist. In Wahrheit aber erfordert die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung die Kenntnis der Massenmomente der Gleichgewichtsanordnung, gleichgültig, ob es sich um homogene oder heterogene Gleichgewichtsanordnungen handelt. Letzten Endes müssen immer die Elemente (E, a, e, J_{2i}) oder (E, ω, a, J_{2i}) gegeben sein, und die Gleichgewichtsbedingung (3) hat nur in den beiden Fällen des homogenen Ellipsoids und der Niveauflächen des Massenpunktes praktischen Wert. Dabei sind die Niveauflächen des Massenpunktes als absolute Sphäroide der größten Massenkonzentration fiktive Grenzfälle von Gleichgewichtsfiguren.

Wir betrachten die Oberflächen S beliebiger, rotations- und äquator-symmetrischer Massenanordnungen. Sicherlich gibt es zahllose derartige Massenanordnungen, deren Oberflächen für keinen Wert von ω Niveauflächen sind. Ein charakteristisches Beispiel stellen homogene Körper dar, deren Oberflächen wenigstens einen, von Null verschiedenen Formparameter besitzen. Könnte nämlich eine solche Oberfläche für ein bestimmtes ω Niveaufläche sein, so wäre damit bereits eine Gleichgewichtsfigur gegeben, während andererseits die klassische Theorie beweist, daß es in der Nachbarschaft der Kugel nur eine einzige Reihe reeller homogener Gleichgewichtsfiguren gibt, nämlich die MacLaurinschen Ellipsoide (vgl. Lichtenstein [4], Seite 81). Umgekehrt können wir aber nicht a priori behaupten, daß die Oberfläche nur im Gleichgewichtsfalle Niveaufläche sein kann. Die Gleichung (2), die für alle überhaupt denkbaren Niveausphäroide gilt, wird sicherlich auch für die Oberflächen zahlloser Massen-

anordnungen (E, J_{2i}) gelten, ohne daß damit bereits notwendigerweise das Gleichgewicht verknüpft ist. Auch in diesen Fällen kann (2) in (3) transformiert werden. Das Koeffizientensystem ($x, y, z\dots$) ist stets eine Funktion der J_{2i} und repräsentiert nur für die Massefunktionen einer Gleichgewichtsanordnung die Gleichgewichtsbedingung, wenn überdies a und e Achse und Abplattung der Oberfläche sind.

Jede beliebige sphäroidische Fläche kann Oberfläche von zahllosen rotations- und äquatorsymmetrischen Massenanordnungen sein. Hingegen sind bei weitem nicht alle sphäroidischen Flächen mögliche Niveausphäroide, zum Beispiel alle Flächen, für welche der Formparameter $f_4 > 3,5 e^2$ ist. Andere Flächen können nur mit einem einzigen ω -Wert gekoppelt werden; zum Beispiel ist die Kugel nur für den Ruhefall eine mögliche Niveaufläche. Das Ellipsoid ($x = 4/5$) ist Oberfläche einer nullparametrischen Gleichgewichtsfigur, gleichzeitig aber auch äußere Niveaufläche zahlloser kleinerer konfokaler homogener Ellipsoide derselben Rotationsgeschwindigkeit, die somit selbst gar nicht im Gleichgewicht sind. Im Bereich $x > 0,8$ sind Ellipsoide als Niveauflächen undenkbar. Soweit mithin ein System Stokesscher Elemente (E, ω, S) überhaupt physikalisch sinnvoll ist [5], entspricht ihm nur ein einziges System von Massefunktionen J_{2i} . Im allgemeinen wird dieselbe Niveaufläche für eine andere Rotationsgeschwindigkeit Niveaufläche einer anderen wesentlichen Massenanordnung mit einem anderen System von Massefunktionen sein. Dabei ist grundsätzlich zu beachten, daß alle äquator- und rotationssymmetrischen Massenanordnungen durch Verschiebungen in homogenen, äquatorparallelen und -symmetrischen Kreisringen mit den Mittelpunkten in der Rotationsachse ineinander übergeführt werden können. Dazu gehören natürlich auch Verschiebungen in derartigen Kreisscheiben oder auch in Kreiszylindern, deren Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt. Bei diesen Verschiebungen werden sich natürlich im allgemeinen alle Massefunktionen J_{2i} ändern: sie sind dann «wesentlich» im Gegensatz zu den obigen unwesentlichen Verschiebungen, bei denen die Massefunktionen unverändert bleiben.

Hält man eine gegebene Niveaufläche $S(a, e, f_{2i})$ einer bestimmten Massenanordnung fest, so folgt aus dieser bei der Wahl einer anderen Rotationsgeschwindigkeit, die natürlich innerhalb der physikalisch möglichen Grenzen erfolgen muß, eine andere, wesentlich verschiedene Massenanordnung, für welche sich die zugehörigen Änderungen ΔJ_{2i} aus den Gleichungen (1) in der Form:

$$(J + \Delta J_{2i}) = g_{2i}(\bar{\epsilon} + \Delta \bar{\epsilon}, e, f_{2i}) \quad (1a)$$

ergeben, wobei (2) in der Gestalt

$$\Delta \bar{\epsilon} = -3\Delta J_2 - \frac{5}{4}\Delta J_4 - \frac{21}{8}\Delta J_6 - 2e(3\Delta J_2 + 5\Delta J_4) - 12e^2\Delta J_2 - \dots \quad (2a)$$

als Kontrollgleichung dienen kann. Auf diese Weise kann eine vorgegebene Fläche S sein:

- a) Oberfläche oder äußere Niveaumenge einer Gleichgewichtsfigur. Letztere können ja selbst fiktiv als Gleichgewichtsfiguren mit einem zusätzlichen Mantel der Dichte Null gedeutet werden.
- b) Äußere Niveaumenge (aber nicht Oberfläche!) einer Gleichgewichtsanordnung.
- c/d) Äußere Niveaumenge oder Oberfläche einer allgemeinen rotations- und äquatorsymmetrischen Massenanordnung.

Wir setzen S als Oberfläche und gleichzeitig Niveaumenge einer Massenanordnung (E, J_{2i}) voraus. Selbstverständlich lassen sich noch zahllose andere wesentliche Massenanordnungen mit derselben Oberfläche konstruieren. Soll jedoch dabei S auch Niveaumenge bleiben, so müßten wegen

$$J_{2i} = m_{2i} + n_{2i-2} \bar{\varepsilon}; \Delta J_{2i} = n_{2i-2} \Delta \bar{\varepsilon} \quad (1b)$$

die gänzlich unabhängig von der Rotation bestimmten ΔJ_{2i} sämtlich auf dieselbe Änderung von ω führen, was zumindest äußerst unwahrscheinlich ist. Die Frage, welche der vier obigen Möglichkeiten a)-d) nebeneinander bestehen können, und die Frage nach den zugehörigen Grenzen der Rotationsgeschwindigkeit bezeichnen wir als das Problem der Stokeschen Elemente. Ließe sich exakt zeigen, daß eine Fläche S wenn überhaupt, so nur für eine einzige Rotationsgeschwindigkeit und damit nur für ein einziges System (E, J_{2i}) gleichzeitig Oberfläche und Niveaumenge sein kann, so wäre damit die «Eindeutigkeit der Oberfläche» bewiesen. Noch enger ist die Frage, ob zu denselben Stokeschen Elementen (E, ω, S) zwei verschiedene Gleichgewichtsfiguren gehören können, die sich dann im Sinne der früheren Definition gar nicht wesentlich unterscheiden würden. Diese beiden Figuren müßten trotz der gemeinsamen Oberfläche verschiedene Abplattungsfunktionen besitzen. Weil sich ferner beide Male die Dichte- oder Niveaumengen schalenartig umschließen und die Abplattung der Niveaumengen auch bei abschnittsweise konstanter Dichte nach innen systematisch abnimmt, müßten beide Figuren wegen der notwendigen Erhaltung der Gesamtmasse auch verschiedene Dichtegesetze haben. Denn dasselbe Dichtegesetz bedingt bei verschiedener Abplattungsfunktion notwendigerweise eine Änderung der Gesamtmasse. Bei geänderter Abplattungsfunktion und geändertem Dichtegesetz können aber unmöglich sämtliche Massefunktionen der Figur ungeändert bleiben. Sollten demnach zu den Stokeschen Elementen einer Gleichgewichtsfigur neben den Verschiebungen in homogenen konfokalen Ellipsoidschalen noch weitere unwesentliche Verschiebungen möglich sein, so geht auch bei diesen das Gleichgewicht verloren. Damit aber ist die «Eindeutigkeit des Dichtegesetzes» der Gleichgewichtsfiguren bewiesen.

Somit kann jede Gleichgewichtsfigur durch die Gesamtmasse und das Dichtegesetz oder durch die Gesamtmasse und die Oberfläche eindeutig definiert werden, wenn noch in irgendeiner Form die Gleichgewichtsbedingung bekannt ist. Zur Illustration betrachten wir die Wiechert-Modelle, aber unter etwas anderem Gesichtspunkt als in [2]. Die Wiechert-Modelle sind bekanntlich die Gleichgewichtslösungen des allgemei-

nen Zweischalenmodelles, bestehend aus einem homogenen Mantel der Dichte ϱ_m und einem homogenen Kern der Dichte ϱ_k . Sie sind also mit $(E, a, \varrho_m, a_k, \varrho_k)$ durch Masse und Dichtegesetz definiert, welch letzteres vier Konstanten besitzt, so daß es bei gegebener Masse ∞^4 derartige Gleichgewichtsfiguren gibt. Bei der grundsätzlich möglichen Definition durch Masse und Oberfläche genügt zur Eindeutigkeit also die Näherung 6.0., das heißt (E, a, e, f_4, f_6) , weshalb wir diese Figuren als «zweiparametrig» bezeichnen dürfen. Die Definition durch das Dichtegesetz hat den Vorteil, daß bei den Bestimmungsstücken kleine Größen 4. und 6.0. vermieden sind und daß sie auch bereits in Näherung 4.0. eine eindeutige Lösung zuläßt.

Man wählt einen Näherungswert für die Oberflächenabplattung e und findet zusammen mit der Manteldichte ϱ_m sofort die Teilmasse E_1 für die als homogenes Ellipsoid definierte «Mantelfigur» und damit:

$$E_1 = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - e) \varrho_m; E = E_1 + E_2; E_k = E_1' + E_2 \quad (4)$$

Hierin bedeuten E_k die Kernmasse und E_1' den Teil von E_1 innerhalb des Kernes, so daß die zugehörige Kernabplattung e_k vermöge

$$E_k = \frac{4}{3} \pi a_k^3 (1 - e_k) \varrho_k; E_1' : E_k = \varrho_m : \varrho_k \quad (5)$$

eindeutig resultiert. Sodann liefern die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{5} (2e - e^2) (E_1 : E) + \frac{1}{5} (2e_k - e_k^2) (a_k : a)^2 (E_2 : E) \\ J_4 &= -\frac{12}{35} e^2 (E_1 : E) - \frac{12}{35} e_k^2 (a_k : a)^4 (E_2 : E) \end{aligned} \quad (6)$$

die beiden Massefunktionen und anschließend Gleichung (2) die Rotationsgeschwindigkeit ω oder $\bar{\varepsilon}$. Damit wird die durch die gegebene Achse a und die willkürlich gewählte Abplattung e bloß unvollständig definierte Oberfläche in Näherung 4.0. zur Niveaumenge, wobei der Formparameter f_4 aus der zweiten Gleichung (1) hervorgeht:

$$f_4 = \frac{7}{2} e^2 - \frac{5}{2} e \bar{\varepsilon} + \frac{35}{8} J_4, \quad (7)$$

während gemäß (6) die Massefunktionen so berechnet sind, als ob die Oberfläche (a, e) streng ellipsoidisch wäre. Man gewinnt daher auf diese Weise zu den Daten $(E, a, \varrho_m, a_k, \varrho_k)$ eine unendliche Reihe von Zweischalenmodellen (e, e_k) mit verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten, die bis auf ein einziges überhaupt keine Gleichgewichtsanordnungen darstellen. Die eigentliche Gleichgewichtsbedingung für das gesuchte Wiechert-Modell liegt dann in der Forderung, daß auch die streng ellipsoidi-

sche Kernoberfläche eine Niveaufläche sein muß. Man findet dieses Modell nach dem in [2] angegebenen Verfahren. Dabei ist aber das Kernellipsoid gar kein MacLaurinsches Ellipsoid, wie bereits eingangs betont wurde, und das Prinzip der Entblätterung gilt in diesem Falle und allgemein bei unstetigem Dichtegesetz nicht.

Daraus darf aber nicht der Schluß gezogen werden, daß die Entblätterung auf die beiden, schon der klassischen Theorie bekannten Fälle der geschichteten Kugel und des MacLaurinschen Ellipsoids beschränkt ist. Wir erheben also die Frage nach der Möglichkeit der Entblätterung bei den weitaus wichtigsten sogenannten einparametrischen Gleichgewichtsfiguren oder den Gleichgewichtsfiguren mit dem stetigen Dichtegesetz

$$\varrho = \varrho_{\max} \left[1 - \nu \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 = \varrho(x). \quad (8)$$

Hierin bedeutet ϱ_{\max} die maximale Dichte im Schwerpunkt, ν eine Konstante, die für die MacLaurinschen Ellipsoide Null ist, mit wachsender Massenkonzentration zunimmt und für die einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration knapp unter 1 liegt, und schließlich x den Äquatorradius der laufenden, inneren Flächen gleicher Dichte, die wegen des Gleichgewichtes mit den Niveauflächen und mit den Flächen gleichen Druckes zusammenfallen. Wie eine eingehende Analyse gezeigt hat, ist dies die einzige mögliche Form der Legendre-Laplaceschen Dichtefunktion einer kompressiblen Flüssigkeit, bei der die Zunahme der Dichte nach innen nur eine Folge der Gravitation der Masse ist und bei der die allein durch die Gravitation verursachte Druckzunahme proportional der Dichte erfolgt.

Das Dichtegesetz hat drei Konstanten ϱ_{\max} , ν und a , so daß es bei gegebener Masse E stets ∞^3 einparametrische Gleichgewichtsfiguren gibt. Bei Definition durch die Oberfläche genügt hier bereits die Näherung 4.0., also (E, a, e, f_4) . Zur Festlegung in Näherung 6.0. ist grundsätzlich noch die Kenntnis des zweiten Formparameters f_6 erforderlich. Den ∞^4 Gleichgewichtsfiguren $(E, \varrho_{\max}, \nu, a)$ stehen nur ∞^3 Dichtegesetze gegenüber; tatsächlich ändert sich bei gleichem Dichtegesetz mit der Abplattungsfunktion auch die Masse. Ist e die Abplattung der Oberfläche und ϱ_m die mittlere Dichte, so gilt:

$$E = \frac{4}{3} \pi a^3 \left(1 - e \right) \varrho_m \text{ oder: } \left(1 - e \right) \varrho_m = 3 E / 4 a^3 \pi \quad (9)$$

Unabhängig von Gleichgewicht und Rotation folgt aus der ersten Gleichung (36) und (36a) in [6], Seite 68 und 70:

$$\left(1 - e \right) \varrho_m : \left(1 - \bar{e}_2 \right) = \varrho_{\max} \left(1 - \frac{6}{5} \nu + \frac{3}{7} \nu^2 \right) = c_1 \quad (10)$$

oder: $\bar{e}_2 = 1 - 3 E / 4 \pi a^3 c_1 ;$

mithin ist durch die Daten $(E, \varrho_{\max}, \nu, a)$ bereits ein bestimmter Durchschnittswert \bar{e}_2 der Abplattungen gegeben, also ein wichtiges Bestimmungselement der Abplattungsfunktion. Aber selbstverständlich ist damit erst die Gleichgewichtsanordnung definiert; zur Gleichgewichtsfigur muß ganz im Sinne der obigen Festlegung durch (E, a, e, J_{2i}) oder durch (E, a, ω, J_{2i}) noch entweder die Abplattung der Oberfläche oder die Rotationsgeschwindigkeit oder schließlich die Gleichgewichtsbedingung $\omega = \omega(E, S)$ zusätzlich vorliegen.

Gleichung (10) ergab sich aus dem Integral für die Gesamtmasse. Eine weitere Beziehung liefern die Integrale für die Trägheitsmomente C und $(C - A)$, wobei im Hinblick auf das gesuchte Gleichgewicht bereits die einparametrische Figurenreihe $(\omega, C) \equiv (\omega, K_2)$ herangezogen wurde. Die zweiten Gleichungen (36) und (36a) in [6] ergeben

$$\varrho_{\max} \left(1 - \frac{10}{7} \nu + \frac{5}{9} \nu^2 \right) = c_2$$

und

$$(a_h : a)^2 = c_2 (1 - e_h) : c_1 (1 - e_2), \quad (11)$$

worin a_h und e_h Achse und Abplattung des homogenen Ellipsoides der genannten Reihe (ω, C) bedeuten. Mit einer Wahl für $e_h > \bar{e}_2$ findet man aus dem MacLaurinschen Ellipsoid (E, a_h, e_h) die zugehörige Rotationsgeschwindigkeit und den Parameter $\bar{\varepsilon}$ einer mehr oder minder guten Näherungslösung:

$$\bar{e}_h = \omega^2 a_h^3 / k^2 E = \frac{4}{5} e_h + \frac{22}{35} e_h^2; \quad \bar{\varepsilon} = \bar{e}_h (a : a_h)^3 \quad (12)$$

Ähnlich ergibt sich für die statische Abplattung:

$$J_{2,h} = \frac{1}{5} \left(2 e_h - e_h^2 \right); \quad J_2 = J_{2,h} \left(a_h : a \right)^2, \quad (13)$$

da ja das Massenmoment $K_2 = (C - A) : E$ in der ganzen Reihe konstant ist. Schließlich kann man zur Berechnung der Abplattung e der als Niveaufläche vorausgesetzten Oberfläche in Näherung 4.0. die 3. Gleichung (23) in [6], Seite 65, verwenden, in der die Gleichgewichtsbedingung bereits mitberücksichtigt ist:

$$2 e = 3 J_2 + \bar{\varepsilon} + e^2 - \frac{13}{14} e \bar{\varepsilon} - \frac{25}{56} \bar{\varepsilon}^2 \quad (14)$$

Ist die Rotationsgeschwindigkeit gegeben, dann kann man bereits aus (11) und (12) in sukzessiver Approximation die richtigen Werte a_h und e_h und anschließend über (13 und 14) die richtige Abplattung e finden. Ist e gegeben, so wird Gleichung (14) einen Widerspruch aufweisen, der abermals in sukzessiver Approximation ab (11) beseitigt werden kann. Ist die Gleichgewichtsbedingung in der Form (3) gegeben, so findet man mit dem e -Wert (14) einen verbesserten Wert für die Rotationsgeschwindigkeit.

digkeit. Die richtige Abplattungsfunktion der Gleichgewichtsfigur (E , ϱ_{\max} , ν , a) ist dann bereits durch die drei Werte e , e_h und \bar{e}_2 festgelegt, wobei $e > e_h > \bar{e}_2$ sein muß.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir auf unser eigentliches Problem ein. Die freie Oberfläche einer einparametrischen Gleichgewichtsfigur sei durch den Index 0, eine beliebig innere Dichte- und gleichzeitig Niveaufläche durch den Index 1 gekennzeichnet. Die zwischen den Niveauflächen 0 und 1 gelegene Masse bildet den «Mantel», den wir abheben wollen. Das Potential $V_{0,1}$ der Gesamtmasse auf der Niveaufläche 1 kann in $(V_{1,1} + V_M,1)$ zerlegt werden, wobei V_M das Potential des Mantels und V_1 das Potential der innerhalb der Niveaufläche 1 gelegenen Masse bezeichnet. Ist ω die Rotationsgeschwindigkeit der gegebenen Gleichgewichtsfigur und bezeichnet P den Pol der Niveaufläche 1, so gilt in dieser Niveaufläche:

$$V_{M,1} + V_{1,1} + \frac{1}{2} \omega^2 \left(x^2 + y^2 \right)_1 = V_{0,P} \quad (15)$$

Nach Abhebung des Mantels verbleibt die von der Dichtefläche 1 begrenzte Restfigur mit dem Äquatorradius a_1 und mit dem Dichtegesetz:

$$\varrho = \varrho_{\max} \left[1 - \nu_1 \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 \right]^2 \text{ mit } \nu_1 = \nu \left(a_1/a \right)^2 \quad (16)$$

Dies ist aber wieder das Dichtegesetz der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren, und es gibt unbedingt eine einparametrische Gleichgewichtsfigur, die mit unserer Restfigur, die wir als «Kern» bezeichnen wollen, die Daten $(E_k, \varrho_{\max}, \nu_1, a_1)$ gemeinsam hat. Damit stehen drei Möglichkeiten zur Diskussion:

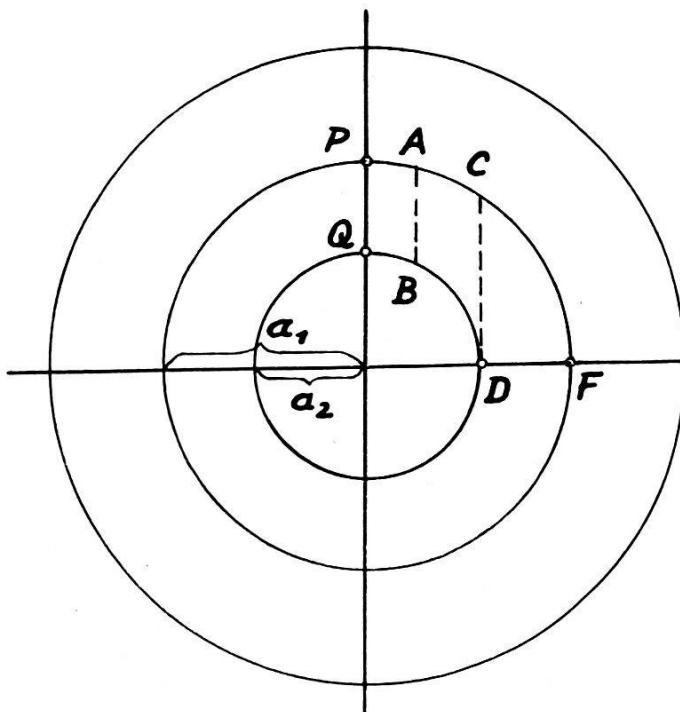
- a) Die Kernfigur ist unmittelbar die einparametrische Gleichgewichtsfigur; das heißt, diese Gleichgewichtsfigur hat dieselbe Rotationsgeschwindigkeit wie die ursprüngliche Figur, und das Prinzip der Entblätterung ist gültig.
- b) Sie ist eine starr gedachte Gleichgewichtsanordnung, welche für eine andere Rotationsgeschwindigkeit zur einparametrischen Gleichgewichtsfigur wird. Läßt sich dann zeigen, daß diese Rotationsgeschwindigkeit ω_1 mit der Rotationsgeschwindigkeit der Gesamtfigur zusammenfällt, so sind wir auf den Fall a) zurückgekommen, und das Prinzip der Entblätterung ist bewiesen.
- c) Sie ist überhaupt keine Gleichgewichtsanordnung.

Wir prüfen zuerst den Fall c). Als Teil der ursprünglichen Gleichgewichtsfigur hat der Kern dasselbe Dichtegesetz, und die Flächen gleicher Dichte umschließen sich schalenartig. Unabhängig vom Gleichgewicht und von der Rotation kann für die Abplattung des Kernes ebenso wie in (10) ein Durchschnittswert $\bar{\varepsilon}_{2,k}$ bestimmt werden, der auch für die Gleichgewichtsfigur mit den Daten $(E_k, \varrho_{\max}, \nu_1, a_1)$ gilt. Dann aber erfordert die gleichzeitige Erhaltung der Masse E_k und des Durchschnittswertes

$\bar{e}_{2,k}$, daß es in dieser Gleichgewichtsfigur eine Niveaufläche oder Dichte-fläche a_x mit derselben Abplattung gibt, während oberhalb die Abplat-tungen der Dichteflächen größer (kleiner) und unterhalb kleiner (größer) sind als im Kern. Dies ist aber ohne Änderung der räumlichen Dichte, also des Dichtegesetzes, unmöglich, womit bereits der Widerspruch aufge-deckt ist.

Mithin muß der Kern zumindest eine Gleichgewichtsanordnung sein. Nun bewirke die Abhebung des Mantels in den Dichteflächen des Kernes eine Potentialverminderung, die im Äquator jeweils größer als im Pol sein müßte, wobei diese Differenz mit abnehmendem Äquatorradius der inneren Dichteflächen gegen Null konvergiert. Demnach müßte der Kern als Gleichgewichtsfigur eine größere Rotationsgeschwindigkeit ω_1 besitzen und zur Widerlegung der Annahme b) wäre zu zeigen, daß $\omega_1 = \omega$ sein muß. Zunächst gilt:

$$V_{1,1} + \frac{1}{2} \omega_1^2 (x^2 + y^2)_1 = V_{1,P}, \quad (17)$$



woraus sich gegenüber (15) die Differenz ergibt:

$$V_{M,1} + \frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_1^2) (x^2 + y^2)_1 = V_{0,P} - V_{1,P} = V_{M,P} \quad (18)$$

Wir wählen innerhalb des «Kernes» eine weitere Dichtefläche mit dem Äquatorradius a_2 und mit dem Index 2, welche gleichzeitig Niveaufläche der ursprünglichen Gleichgewichtsfigur ist. Dann gilt analog (18) sofort:

$$V_{M,2} + \frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_1^2) (x^2 + y^2)_2 = V_{0,Q} - V_{1,Q} = V_{M,Q}, \quad (19)$$

wenn Q den Pol dieser Fläche bezeichnet. Für zwei beliebige Punkte A und B , die in Richtung der Rotationsachse übereinander liegen, verschwindet in der Differenz der Einfluß der Fliehkraftpotentiale, und es folgt aus (18) und (19):

$$V_{M,A} - V_{M,B} = V_{M,P} - V_{M,Q}, \quad V_{M,A} - V_{M,P} = V_{M,B} - V_{M,Q} \quad (20)$$

Setzt man schließlich $(a_1 : a_2) = n > 1$, so gilt wegen:

$$V_{M,F} + \frac{1}{2} \left(\omega^2 - \omega_1^2 \right) a_1^2 = V_{M,P}$$

$$V_{M,C} + \frac{1}{2} \left(\omega^2 - \omega_1^2 \right) a_2^2 = V_{M,P}$$

$$V_{M,D} + \frac{1}{2} \left(\omega^2 - \omega_1^2 \right) a_2^2 = V_{M,Q}$$

sofort:

$$V_{M,F} - V_{M,P} = n^2 (V_{M,C} - V_{M,P}) = n^2 (V_{M,D} - V_{M,Q}) \geq 0 \quad (21)$$

Zieht man den konstanten Hauptteil des Mantelpotentials ab, so kann man (21) in der Form

$$\Delta V_{M,F} = n^2 \Delta V_{M,D} = \Delta V_{M,P} - n^2 \Delta V_{M,Q} \quad (21a)$$

für die kleinen Restbeträge ΔV ansetzen. Der Mantel ist nun zwar heterogen. Aber in Analogie zu den Wiechert-Modellen müßte er durch eine äquivalente, homogene Schale ersetzt werden können, deren Begrenzungsflächen Ellipsoide der Abplattungen e^* und $e_1 < e^*$ sein mögen und deren Dichte ϱ^* wir gar nicht zu kennen brauchen. Der Mantel wird also durch die Differenz zweier homogener Ellipsoide der Dichte ϱ^* ersetzt, und zwar eines Ellipsoides der Masse E^* mit den Achsen a^* und $c^* = a^*(1 - e^*)$ sowie des mit der Dichtefläche 1 achsengleichen Ellipsoides a_1 und $c_1 = a_1(1 - e_1)$, das den Teil $E^{*'}_1$ der Masse E^* einschließt. Dann gilt für das Potential des Mantels in einem Punkt (x, y, z) an der Oberfläche oder im Innenraum des «Kernes» gemäß der Formel (15) in [2]:

$$\begin{aligned} \Delta V_M = & -\frac{3}{2} \left[\frac{k^2 E^*}{c^{*3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} e^* + \frac{18}{35} e^{*2} \right) - \frac{k^2 E^{*'}}{c_1^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} e_1 + \frac{18}{35} e_1^2 \right) \right] (x^2 + y^2) \\ & - \frac{3}{2} \left[\frac{k^2 E^*}{c^{*3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} e^* - \frac{1}{35} e^{*2} \right) - \frac{k^2 E^{*'}}{c_1^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} e_1 - \frac{1}{35} e_1^2 \right) \right] z^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Daraus folgt unmittelbar für die beiden Äquatorpunkte F und D wegen $a_1 = n a_2$:

$$\Delta V_{M,F} = n^2 \Delta V_{M,D} \quad (23)$$

und ebenso für den Pol Q^* des zur Kernoberfläche ähnlichen Ellipsoides ($a_2, e_2 = e_1$):

$$\Delta V_{M,P} = n^2 \Delta V_{M,Q^*} \quad (23a)$$

Andererseits folgt aus (23) und (21a) dieselbe Gleichung für den Pol der Dichtefläche 2:

$$\Delta V_{M,P} = n^2 \Delta V_{M,Q}, \quad (23b)$$

obwohl wegen $e_2 < e_1$ der Punkt Q näher an P liegt als der Punkt Q^* . Dieser Widerspruch verschwindet nur, wenn alle $\Delta V = 0$ sind oder wenn $\omega_1 = \omega$ gilt. Dies besagt aber, daß der Mantel durch eine von zwei ähnlichen Ellipsoiden der Abplattung $e_1 = e^*$ ersetzt werden kann. Tatsächlich ist dann wegen

$$E^*/c^{*3} = \frac{4}{3} \pi \varrho^*/(1 - e^*)^2 = E^{*'}/c_1^3 \quad (24)$$

das Potential des Mantels an der Oberfläche und im Innenraum des Kernes konstant: $\Delta V_M = 0$, und die Restfigur ist selbst eine einparametrische Gleichgewichtsfigur derselben Rotationsgeschwindigkeit. Damit ist aber das Prinzip der Entblätterung für den Fall des stetigen Dichtegesetzes (8) verifiziert.

Bei der vorstehenden Beweisführung war nicht wesentlich das Dichtegesetz (8) und (16) vorausgesetzt, sondern allgemein ein stetiges Dichtegesetz und Gleichgewicht. Bei einem beliebigen stetigen Dichtegesetz kann aber sicherlich das Gravitationspotential eines von der freien Oberfläche und einer beliebigen inneren Dichtefläche begrenzten «Mantels» im allgemeinen nur durch eine äquivalente homogene Ellipsoide schale ersetzt werden, für welche $e^* > e_1$ ist. Dann aber bliebe der Widerspruch zwischen (23a) und (23b) bestehen, und das Gleichgewicht wäre unmöglich. Diese Überlegung zeigt jedenfalls, daß es, mit Ausnahme der Kugel, nicht einparametrische Gleichgewichtsfiguren mit beliebigem stetigen Dichtegesetz gibt. Damit ist freilich noch nicht gesagt, daß diese Argumentation gleichfalls das Dichtegesetz (8) als die einzige mögliche Dichtefunktion bestätigt.

Bei fortgesetzter Entblätterung wird der Kern oder die Restfigur einem homogenen Ellipsoid immer ähnlicher. Denn die Formparameter der Dichteflächen konvergieren gegen Null, während ihre Abplattung einem Minimum e_0 zustrebt. Um diese Grenzabplattung zu finden, gehen wir von dem Grenzwert für $\bar{\varepsilon}$ aus:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\omega^2 a^3 / k^2 E \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\omega^2 a^3}{\frac{4}{3} \pi k^2 a^3 (1 - e) \varrho} = \frac{3 \omega^2}{4 \pi k^2 (1 - e_0) \varrho_{\max}} \quad (24)$$

und finden die Grenzabplattung aus der MacLaurinschen Gleichgewichtsbedingung in der Form:

$$e_0 = \frac{5}{4} \frac{3 \omega^2}{4 \pi k^2 (1 - e_0) \varrho_{\max}} - \frac{11}{14} e_0^2$$

oder nach Multiplikation mit $(1 - e_0)$, gleichfalls in Näherung 4.0.:

$$e_0 = \frac{15 \omega^2}{16 \pi k^2 \rho_{\max}} + \frac{3}{14} e_0^2 \quad (25)$$

Die Methode der Entblätterung ist also im Falle der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren gerechtfertigt, während sich bei den Wiechert-Modellen die stärksten Abweichungen ergeben. Besteht nämlich eine Gleichgewichtsfigur aus mehreren (N) homogenen Schalen, so kann mit wachsendem N natürlich eine fortschreitende Annäherung an den Fall der einparametrischen Figuren erfolgen, noch mehr natürlich, wenn alle oder zumindest ein Teil der Schalen heterogen sind. Aber selbst beim Wiechert-Modell werden trotz einer relativ starken Änderung der Kernabplattung, wenn man fiktiv das Entblätterungsprinzip zugrunde legt, die Größen, auf die es eigentlich ankommt, kaum nennenswert beeinflußt. So ergeben sich zum Beispiel für die Verhältnisse der Erde (Kerntiefe 2900 km) die Größen 4.0. J_4 und f_4 nur um kaum $3 \cdot 10^{-8}$ respektive $8 \cdot 10^{-8}$, also bloß um Größen 6.0. verfälscht, die bei der üblichen Näherung 4.0. ohnedies zu vernachlässigen sind. Hingegen kann im Trägheitsmoment C der Unterschied bereits an die Größenordnung von 1 % heranreichen, während der Fehler in der Kernabplattung 20 % betragen kann.

Abschließend sei noch eine Bemerkung gemacht. Man kann ohne weiteres eine einparametrische Gleichgewichtsfigur mit dem stetigen Dichtegesetz (8) durch differentielle, von Niveauflächen begrenzte homogene Schalen approximieren. Hingegen dürfte der umgekehrte Vorgang nicht statthaft sein. Aus noch so vielen Schalen homogener, inkompressibler Flüssigkeiten ($N \rightarrow \infty$) kann niemals das stetige Dichtegesetz einer kompressiblen, bloß der Eigengravitation unterworfenen Flüssigkeit hergeleitet werden. Tatsächlich müßte man sonst ja beim Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ jedes beliebige stetige Dichtegesetz gewinnen können, während sich unschwer stetige Dichtefunktionen angeben lassen, die niemals eine Gleichgewichtsfigur liefern.

Literatur

- [1] K. Voss: Über die Gestalt und das Schwerefeld der Erde. Zeitschrift für Geophysik, Heft 6, Würzburg 1965.
- [2] L. Ledersteger: Zur Theorie der Wiechert-Modelle. Erscheint demnächst in Zeitschrift für Geophysik, 1966.
- [3] K. Ledersteger: Das allgemeine Niveausphäroid in Näherung achter Ordnung. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Nr. 5, Wien 1965.
- [4] L. Lichtenstein: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin 1933.
- [5] K. Ledersteger: Das Theorem von Stokes-Poincaré und die sinnvolle Wahl der Stokesschen Elemente. Erscheint demnächst in den Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Wien 1966.
- [6] K. Ledersteger: Die Neubegründung der Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normalsphäroid der Erde, Sonderheft 24 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 31–125, Wien 1964.