Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 64 (1966)

Heft: 2

Artikel: Die Horizontalableitungen der Schwerestörung in ebenen Gebieten

Autor: Koch, K.R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-220743

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Horizontalableitungen der Schwerestörung in ebenen Gebieten

Von K. R. Koch, Bonn

Zusammenfassung

Eine Integralformel für die Horizontalableitungen von $\partial T/\partial H$ wird für den Fall angegeben, daß man die Erdoberfläche durch eine Kugeloberfläche ersetzt. Für ein Modell wird der Einfluß der vernachlässigten Geländeneigungen berechnet.

Résumé

Une formule des dérivées horizontales de $\partial T/\partial H$ est donnée pour le cas où la surface de la terre est remplacée par la surface d'une sphère. L'influence de la pente du terrain est calculée pour un modèle.

Führt man als Bezugsfläche die Erdkugel mit dem Radius R ein, besteht bekanntlich zwischen der Schwerestörung $\partial T/\partial H$ und der Freiluftanomalie Δg_F an der Erdoberfläche die Beziehung:

$$\frac{\partial T}{\partial H} = -\Delta g_F - \frac{2\,T}{R} \tag{1}$$

T Störpotential

H Abstand der Bezugsfläche von der Erdoberfläche, gemessen in der Kugelnormalen

Bedeuten B und L die sphärische Breite und Länge der Kugel mit dem Radius R, erhält man in einem Punkt A an der Erdoberfläche die Horizontalableitungen von $\partial T_A/\partial H$ in Nord- und Ostrichtung zu:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right)}{(R + H_A)\,\partial B} = -\frac{\partial\,(\Delta g_F)}{(R + H_A)\,\partial B} - \frac{\partial\left(\frac{2\,T_A}{R}\right)}{(R + H_A)\,\partial B} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right)}{(R + H_A)\cos B\,\partial L} = -\frac{\partial\,(\Delta g_F)}{(R + H_A)\cos B\,\partial L} - \frac{\partial\left(\frac{2\,T_A}{R}\right)}{(R + H_A)\cos B\,\partial L} \tag{3}$$

Die Horizontalableitungen der Schwerestörung benötigt man zum Beispiel, wenn die Lotkrümmung nach den Teilen getrennt bestimmt wird, die sich hypothesenfrei und die sich nur unter Annahme von Hypothesen ermitteln lassen (vgl. [2]). Am einfachsten bestimmt man die Ableitungen von $\partial T/\partial H$ gemäß (2) und (3) aus den Horizontalableitungen der Freiluftanomalien, da die beiden letzten Glieder rechter Hand von (2) und (3) in der Regel vernachlässigt werden können (vgl. [2]). Die Ableitungen der Freiluftanomalien lassen sich aus einer Karte mit Freiluft-

anomalien ablesen beziehungsweise mit dem Gravimeter messen, indem man den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten ersetzt, oder man entwickelt die Anomalien in ein Polynom und differenziert.

Ein anderer Weg, die Ableitungen zu bestimmen, besteht in der Verwendung von Integralformeln. Für die Horizontalableitungen der Freiluftanomalien hat *Heitz* [1] eine Integralformal angegeben. Im folgenden soll der Integralausdruck für die Horizontalableitungen der Schwerestörungen entwickelt werden.

Das Störpotential T_A im Aufpunkt A an der Erdoberfläche berechnet sich bekanntlich nach dem zweiten Greenschen Satz zu:

$$T_A = -\frac{1}{2\pi} \iint_\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\sigma \tag{4}$$

σ Erdoberfläche

r Abstand des Aufpunktes A vom Quellpunkt

n Äußere Normale der Erdoberfläche

Nach Berechnung der Differentialquotienten in (4) erhält man (vgl. zum Beispiel [3]):

$$T_A = -\frac{1}{2\pi} \iint_\sigma \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial H} - \frac{1}{(R+H)^2}\frac{\partial T}{\partial B}\frac{\partial H}{\partial B} - \frac{1}{(R+H)^2\cos^2 B}\frac{\partial T}{\partial L}\frac{\partial H}{\partial L}\right) \cos(R, n) - \frac{T}{r^2}\cos(r, n)\right] d\sigma \tag{5}$$

(R, n) Winkel zwischen R und n, (r, n) entsprechend

Bei der Differentiation der Gleichung (5) nach B und L ist zu berücksichtigen, daß T auch eine Funktion von H ist.

Mit

$$\frac{\partial T_A(B, L, H)}{(R+H_A)\,\partial B} = \frac{dT_A(B, L, H)}{(R+H_A)\,dB} - \frac{\partial T_A(B, L, H)}{\partial H}\frac{\partial H_A}{(R+H_A)\,\partial B}$$

erhält man für die Differentiation nach B:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_A}{(R+H_A)\,\partial B} = &-\frac{1}{R+H_A}\frac{\partial T_A}{\partial H}\frac{\partial H_A}{\partial B} + \frac{1}{2\pi}\iint_\sigma \left[\frac{1}{r^2}\left(\cos(r, B)\right.\right.\\ &+ \left.\frac{\cos(r, H_A)}{R+H_A}\frac{\partial H_A}{\partial B}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial H} - \frac{1}{(R+H)^2}\frac{\partial T}{\partial B}\frac{\partial H}{\partial B}\right.\\ &- \left.\frac{1}{(R+H)^2\cos^2 B}\frac{\partial T}{\partial L}\frac{\partial H}{\partial L}\right)\cos(R, n) + \frac{T}{r^3}\left\{\cos(n, B)\right.\\ &+ \left.\left.\frac{\cos(n, H_A)}{R+H_A}\frac{\partial H_A}{\partial B} - 3\cos(r, n)\left(\cos(r, B) + \frac{\cos(r, H_A)}{R+H_A}\frac{\partial H_A}{\partial B}\right)\right\}\right] d\sigma\end{aligned} \tag{6}$$

Die Ableitung nach L findet man entsprechend.

Ersetzt man in (6) das Störpotential T durch die Funktion $R\partial T/\partial H$, die bekanntlich wie T harmonisch und im Unendlichen regulär ist, ergibt sich mit

$$\frac{\partial}{\partial B}\left(R\frac{\partial T}{\partial H}\right) = R\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right) \text{ und } \frac{\partial}{\partial H}\left(R\frac{\partial T}{\partial H}\right) = R\frac{\partial^2 T}{\partial H^2} + \frac{\partial T}{\partial H}$$

für die Ableitung von $\partial T_A/\partial H$ nach B:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R+H_A}\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right) = &-\frac{1}{R+H_A}\frac{\partial^2 T_A}{\partial H^2}\frac{\partial H_A}{\partial B} + \frac{1}{2\pi}\iint\Bigg[\frac{1}{r^2}\Bigg(\cos(r,B) \\
&+ \frac{\cos(r,H_A)}{R+H_A}\frac{\partial H_A}{\partial B}\Bigg)\Bigg\{\frac{\partial^2 T}{\partial H^2} - \frac{1}{(R+H)^2}\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)\frac{\partial H}{\partial B} \\
&- \frac{1}{(R+H)^2\cos^2 B}\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)\frac{\partial H}{\partial L}\Bigg\}\cos(R,n) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial T}{\partial H}\Bigg\{\cos(n,B) \\
&+ \frac{\cos(n,H_A)}{R+H_A}\frac{\partial H_A}{\partial B} - 3\cos(r,n)\left(\cos(r,B) + \frac{\cos(r,H_A)}{R+H_A}\frac{\partial H_A}{\partial B}\right)\Bigg\} \\
&+ \frac{1}{r^2 R}\frac{\partial T}{\partial H}\left(\cos(r,B) + \frac{\cos(r,H_A)}{R+H_A}\frac{\partial H_A}{\partial B}\right)\cos(R,n)\Bigg]\,d\sigma \\
&- \frac{1}{R(R+H_A)}\frac{\partial T_A}{\partial H}\frac{\partial H_A}{\partial B} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Die für $\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right)$ erhaltene Integralgleichung (7) soll nicht gelöst werden, sondern mit der Annahme $H_A = H = 0$ in eine Integralformel umgewandelt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right) = \frac{1}{2\pi}\iint_\omega\Bigg[&-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial H^2}\cos\frac{\psi}{2}\cos a \\
&- \frac{1}{r^3}\frac{\partial T}{\partial H}\left(3\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos a + \frac{r}{R}\cos\frac{\psi}{2}\cos a\right)\Bigg]\,d\omega \qquad (8)
\end{aligned}$$

ω Kugeloberfläche der Kugel mit dem Radius R

ψ Sphärischer Abstand des Aufpunktes A vom Quellpunkt

a Azimut der Strecke vom Aufpunkt A zum Quellpunkt

Unter den getroffenen Voraussetzungen, also $H_A = H = 0$, ergibt sich $\partial^2 T_P/\partial H^2$ in einem Punkt P zu (vgl. [4], S. 50):

$$\frac{\partial^2 T_P}{\partial H^2} = -\frac{1}{2\pi}\iint_\omega \frac{1}{r^3}(\Delta g_F - \Delta g_{F_P})\,d\omega + \frac{4\,\Delta g_{F_P}}{R} + \frac{6\,T_P}{R^2} \qquad (9)$$

Vernachlässigt man die beiden letzten Glieder rechter Hand von (8) und (9), die sehr viel kleiner als die ersten sind, erhält man:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\omega}\frac{1}{r^2}\left[\iint\limits_{\omega}\frac{1}{r^3}\left(\Delta g_F - \Delta g_{F_P}\right) d\omega\right]\cos\frac{\psi}{2}\cos a\; d\omega \tag{10}$$

Die Ableitung nach L ergibt sich entsprechend.

Im Gegensatz zur Bestimmung der Horizontalableitungen der Schwerestörung aus Gravimetermessungen oder Polynom-Entwicklungen müssen für die Berechnung nach der Integralformel (10) die Schwereanomalien auf der ganzen Erde berücksichtigt werden; ihr Einfluß nimmt jedoch, wie die Formel (10) zeigt, mit zunehmendem Abstand vom Aufpunkt rasch ab.

Um den Einfluß der in (10) vernachlässigten Höhenunterschiede der Erdoberfläche auf die Ableitungen von $\partial T/\partial H$ abzuschätzen, wird eine Modellrechnung durchgeführt.

Die Bezugsfläche sei anstelle der Kugel mit dem Radius R eine Ebene. Das Gelände werde durch einen Kegel gebildet, dessen Spitze S 2,5 km über der Ebene liege (vgl. Abb. 1). Der Winkel zwischen Kegelmantel und Ebene betrage $\alpha = 15°$. Das Störpotential T werde durch drei auf der Kegelachse liegende Kugeln der Massen m_a, m_b und m_c hervorgerufen, deren Mittelpunkte 2 km und 1 km oberhalb und 1,5 km unterhalb der Ebene liegen. Die Vertikalanziehung von m_a und m_b betrage in der Kegelspitze S jeweils 30 mGal, die von m_c 50 mGal. Der Aufpunkt A liege in einer Höhe von 1,25 km auf dem Kegelmantel, und die Oberfläche des Modells erfülle die Liapounoff-Bedingung (vgl. zum Beispiel [5], S. 489).

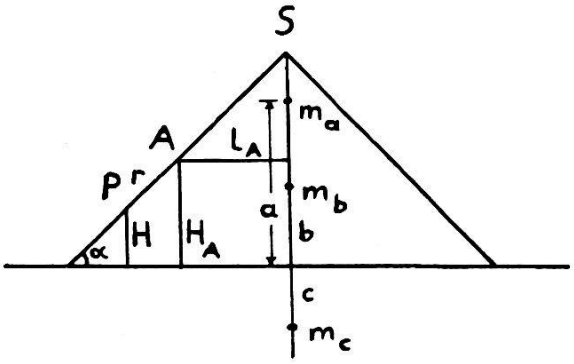

Abb. 1

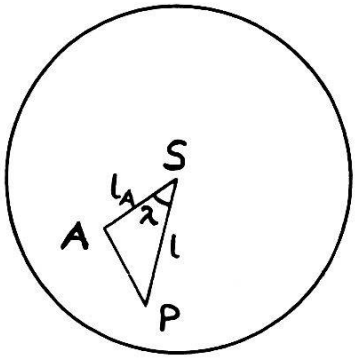

Abb. 2

Ist der Schnitt der Kegelachse mit der Ebene Ursprung eines Zylinderkoordinatensystems mit den Koordinaten l, H und λ (vgl. Abb. 1 und 2), so ergibt sich aus (7) die Horizontalableitung von $\partial T_A/\partial H$ in der Richtung entgegengesetzt zur Kegelachse zu:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right) = \frac{\partial^2 T_A}{\partial H^2}\tan\alpha_A + \frac{1}{2\pi}\iint_\sigma \left[\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial H^2} + \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)\tan\alpha\right)\right.$$

$$\left(l_A - l\cos\lambda - (H_A - H)\tan\alpha_A\right) + \frac{\partial T}{\partial H}\left\{\frac{1}{r^3}(\cos\lambda\tan\alpha - \tan\alpha_A)\right.$$

$$-\frac{3}{r^5}\left(H_A - H + (l_A\cos\lambda - l)\tan\alpha\right)\left(l_A - l\cos\lambda\right.$$

$$\left.\left.\left.- (H_A - H)\tan\alpha_A\right)\right\}\right] l\,dl\,d\lambda \tag{11}$$

$$r = \sqrt{l^2 + l_A{}^2 - 2\,l\,l_A\cos\lambda + (H_A - H)^2}$$

In der Ebene gilt: $H = \tan\alpha = 0$.

Die auf der rechten Seite von (11) benötigten Ableitungen von T erhält man wie folgt:

$$T = \frac{fm_a}{r_a} + \frac{fm_b}{r_b} + \frac{fm_c}{r_c} \tag{12}$$

f Gravitationskonstante ($= 6{,}673 \cdot 10^{-8}$ cm³/g sec²)

$$r_a = \sqrt{(H-a)^2 + l^2}\,;\; r_b = \sqrt{(H-b)^2 + l^2}\,;\; r_c = \sqrt{(H+c)^2 + l^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial H} = -fm_a\frac{H-a}{r_a{}^3} - fm_b\frac{H-b}{r_b{}^3} - fm_c\frac{H+c}{r_c{}^3} \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial H^2} = fm_a\left(\frac{3\,(H-a)^2}{r_a{}^5} - \frac{1}{r_a{}^3}\right) + fm_b\left(\frac{3\,(H-b)^2}{r_b{}^5} - \frac{1}{r_b{}^3}\right)$$

$$+ fm_c\left(\frac{3\,(H+c)^2}{r_c{}^5} - \frac{1}{r_c{}^3}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right) = 3\left(fm_a\,l\frac{H-a}{r_a{}^5} + fm_b\,l\frac{H-b}{r_b{}^5} + fm_c\,l\frac{H+c}{r_c{}^5}\right) \tag{16}$$

Diese Ableitungen in (11) eingeführt und die Integration nach dl und $d\lambda$ durch numerische Integration ersetzt, ergab:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right) = 6{,}67 \text{ mGal/km}$$

Der nach (16) berechnete Sollwert beträgt 6,68 mGal/km.

Setzt man in (11) $H_A = H = \tan\alpha_A = \tan\alpha = 0$, erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right) = \frac{1}{2\pi}\iint_\sigma \frac{l_A - l\cos\lambda}{\sqrt{l^2 + l_A{}^2 - 2\,l\,l_A\cos\lambda}^{\,3}}\,\frac{\partial^2 T}{\partial H^2}\,l\,dl\,d\lambda \tag{17}$$

und es ergab sich mit den nach (15) ermittelten Werten für $\partial^2 T/\partial H^2$:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial T_A}{\partial H}\right) = 5{,}13 \text{ mGal/km}$$

Der Einfluß der Geländeneigung auf die Horizontalableitungen von $\partial T/\partial H$ ist recht erheblich. Im Hochgebirge und im höheren Mittelgebirge kann daher die Integralformel (10) nicht benutzt werden.

Für die Modellrechnung wurde die IBM 7090 des Institutes für Instrumentelle Mathematik der Universität Bonn benutzt.

Literatur

[1] *Heitz, S.:* Bestimmung der Horizontalableitungen von Freiluft-Anomalien der Schwere. Zeitschrift für Vermessungswesen, 86. Jg., S. 376, Stuttgart 1961.

[2] *Koch, K. R.:* Die Bestimmung der Lotkrümmung in Gebieten mit geringen Höhenunterschieden. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 63. Jg., S. 349, Winterthur 1965.

[3] *Koch, K. R.:* Der Einfluß der Topographie auf die Formel von Stokes. Zeitschrift für Vermessungswesen, 90. Jg., S. 356, Stuttgart 1965.

[4] *Molodenskii, M. S.; Eremeev, V. F.; Yurkina, M. I.:* Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth. Jerusalem 1962.

[5] *Smirnow, W. I.:* Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil IV. Berlin 1963.

Planungstagung

am 23. und 24. März 1966 in Baden

Die Verantwortung des Ingenieur-Geometers in der Planung

Der Schweizerische Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik führt im Einvernehmen mit der Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA eine Planungstagung durch.

Als Thema wird die *Ortsplanung* behandelt, mit Berücksichtigung ihrer Eingliederung in die regionale Entwicklung. Unter dem Gesichtspunkt eines langfristigen Planungszieles sollen die Planungsaufgaben in möglichst umfassender Weise dargelegt werden, um in Zukunft die funktionelle Lebensfähigkeit der Agglomeration zu gewährleisten.

Methodisch soll dargelegt werden, wie die Planung einerseits von den Schutz- und Landwirtschaftsgebieten her und anderseits von den erforderlichen Siedlungsflächen her zu einer Abgrenzung des Siedlungsgebietes kommt und wie in der Folge die Aufteilung des Siedlungsgebietes in Zonen für Arbeiten, Wohnen und Zentren und die funktionellen Einrichtungen der öffentlichen Bauten und Anlagen, des Verkehrs und der Versorgung vorgesehen werden. Die erforderlichen Berechnungen werden anhand von Richtzahlen aufgezeigt.

Das Ergebnis dieser langfristigen Planung wird in einem Gesamtplan (Richtplan, Entwicklungsplan) dargestellt. Dieser dient der Gemeinde als