

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 63 (1965)

Heft: 10

Artikel: Die Bestimmung der Lotkrümmung in Gebieten mit geringen Höhenunterschieden

Autor: Koch, K.R.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-220014>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Bestimmung der Lotkrümmung in Gebieten mit geringen Höhenunterschieden

Von K. R. Koch, Bonn

Zusammenfassung

Die Lotkrümmung wird nach denjenigen Teilen getrennt bestimmt, die sich hypothesenfrei und die sich nur unter Annahme von Hypothesen ermitteln lassen. Benutzt wird die Hypothese der Isostasie. Wie eine Beispielsrechnung zeigt, kann in nahezu ebenem Gelände der Anteil an der Lotkrümmung, der sich aus der Isostasihypothese ergibt, vernachlässigt werden.

Résumé

Pour déterminer la courbure de la verticale, nous séparons les éléments qui se laissent calculer sans hypothèses des éléments dont le calcul exige l'introduction des suppositions hypothétiques. On se sert de l'hypothèse de l'isostasie. Un exemple montre qu'on peut négliger dans un terrain presque horizontal l'élément de la courbure de la verticale, qui résulte de l'hypothèse de l'isostasie.

Bezeichnet x die Nord- und y die Ostrichtung, so ergeben sich für einen Punkt P an der Erdoberfläche die Komponenten τ_x und τ_y der Lotkrümmung zu (vgl. [3], S. 9):

$$\tau_x = - \frac{\varrho''}{g_m} \int_0^{H_P} \frac{dg_Q}{dx} dh, \quad \tau_y = - \frac{\varrho''}{g_m} \int_0^{H_P} \frac{dg_Q}{dy} dh \quad (1)$$

ϱ'' 206 265

g_m Mittelwert der Schwere ($\approx 979,8$ Gal)

g_Q Schwere in einem Punkt Q auf der Lotlinie von P

H_P Höhe des Punktes P über dem Geoid

dh Streckenelement der Lotlinie durch P ; $dh \perp dx$, $dh \perp dy$ in P

Zweckmäßig bestimmt man die Lotkrümmung nach denjenigen Teilen getrennt, die sich hypothesenfrei und die sich nur unter Annahme von Hypothesen ermitteln lassen. Dies ist besonders in Gebieten mit geringen Höhenunterschieden günstig, wo man annehmen kann, daß sich der aus Schweremessungen an der Erdoberfläche hypothesenfrei zu bestimmende Horizontalgradient dg_P/dx beziehungsweise dg_P/dy in P nur wenig vom Horizontalgradienten dg_Q/dx beziehungsweise dg_Q/dy unterscheidet, der nur auf Grund von Hypothesen zu ermitteln ist.

In (1) soll zunächst der Anteil der Normalschwere an der Lotkrümmung eliminiert werden. Bekanntlich gilt mit $a = -h$ an der Erdoberfläche die Randbedingung:

$$\Delta g_F = \frac{dT}{da} - \frac{2T}{R} \quad (2)$$

Δg_F Freiluftanomalie
 T Störpotential
 R Mittlerer Erdradius

Mit $T = \gamma N$ folgt aus (2):

$$g_P = \gamma_P + \frac{dT}{da} \text{ mit } \gamma_P = \gamma - \frac{2\gamma}{R} N \quad (3)$$

N Geoidundulation
 γ_P Normalschwere in P (berechnet mit der Höhe $H_P + N$)
 γ Normalschwere im zugeordneten Punkt am Telluroid (berechnet mit der Höhe H_P)

Für den Punkt Q kann eine der Gleichung (3) entsprechende Formel aufgestellt werden; man erhält dann anstelle von (1):

$$\tau_x = - \frac{g''}{g_m} \int_0^{H_P} \left(\frac{d\gamma_Q}{dx} + \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_Q}{dx} \right) dh \quad (4)$$

und τ_y entsprechend.

Bekanntlich gilt für die Lotkrümmung im normalen Schwerefeld:

$$\frac{g''}{g_m} \int_0^{H_P} \frac{d\gamma_Q}{dx} dh = 0,171'' H_P \sin 2B, \quad \int_0^{H_P} \frac{d\gamma_Q}{dy} dh = 0, \quad (5)$$

wobei H_P die Dimension km besitzt und B die geographische Breite bedeutet.

Zur Berechnung des zweiten Gliedes rechter Hand von (4) benötigt man die Ableitungen des Störpotentials T zwischen der Erdoberfläche und dem Geoid. Diese können nur aus Hypothesen über den Aufbau der Erdrinde gewonnen werden. Im folgenden wird daher die Hypothese der Isostasie benutzt, wobei man annimmt, daß T allein durch die topographischen, das heißt die über dem Geoid liegenden Massen und ihre isostatischen Kompensationsmassen verursacht wird.

Mit Hilfe von (3) sind aus den Schweremessungen an der Erdoberfläche die Ableitungen $d\left(\frac{dT}{da}\right)_P/dx$ und $d\left(\frac{dT}{da}\right)_P/dy$ in P hypothesenfrei zu bestimmen, was durch die Querstriche angedeutet werden soll. Diese Werte werden dazu benutzt, die auf Grund der Isostasiehypothese berechneten $d\left(\frac{dT}{da}\right)_P/dx$ und $d\left(\frac{dT}{da}\right)_P/dy$ zu korrigieren. Man erhält in Q den korrigierten Wert:

$$\frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_{OK}}{dx} = \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_Q}{dx} - \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_P}{dx} + \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_P}{dx} \quad (6)$$

Aus (3) ergibt sich:

$$\frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_P}{dx} = \frac{d(\Delta g_F)}{dx} + \frac{2\gamma}{R} \frac{dN}{dx} \quad (7)$$

und die Ableitung nach y entsprechend.

Der Einfluß des zweiten Gliedes rechter Hand von (7) auf die Lotkrümmung beträgt auch für extreme Verhältnisse ($\varrho'' dN/dx = 10''$, $H_P = 3$ km) weniger als $0,01''$. Die Geoidundulationen N brauchen also für die Lotkrümmungsbestimmung nicht bekannt zu sein.

Mit (5) und (6) erhält man dann in (4):

$$\tau_x = -0,171'' H_P \sin 2B - \varrho'' \frac{H_P}{g_m} \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_P}{dx} + G_x \quad (8)$$

mit

$$G_x = \frac{\varrho''}{g_m} \left(H_P \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_P}{dx} - \int_0^{H_P} \frac{d\left(\frac{dT}{da}\right)_Q}{dx} dh \right)$$

und τ_y entsprechend.

Verzichtet man auf die getrennte Bestimmung der normalen Lotkrümmung und denkt sich die Änderung von dg_Q/dx und dg_Q/dy im Verlauf der Lotlinie allein durch die topographischen Massen verursacht, ergeben sich anstelle von (8) die Glieder A und B der Lotkrümmungsberechnung nach *Arnold* (vgl. [3], S. 10).

Zur Ermittlung des Gliedes G in (8) wird, wie bereits erwähnt, angenommen, daß T allein durch die topographischen und ihre Kompensationsmassen hervorgerufen wird. G wird durch Zerlegung der Massen in rechtwinkelig begrenzte Körper gewonnen, da für die numerischen Rechnungen ein Elektronenrechner zur Verfügung steht.

Bei einer Zerlegung der topographischen Massen in Quader ergibt sich der Einfluß G_{x0} eines Quaders an G_x , wenn P der Ursprung eines rechtwinkligen xyz -Koordinatensystems ist (vgl. Abb. 1), zu:

$$G_{x0} = \frac{3\varrho'' f \sigma}{g_m} \left(H_P \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_h^{H_P} \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5} - \int_0^{H_P} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{H_Q-H}^{H_Q} \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5} dh \right)$$

f Gravitationskonstante ($= 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gsec}^2$)

σ Dichte

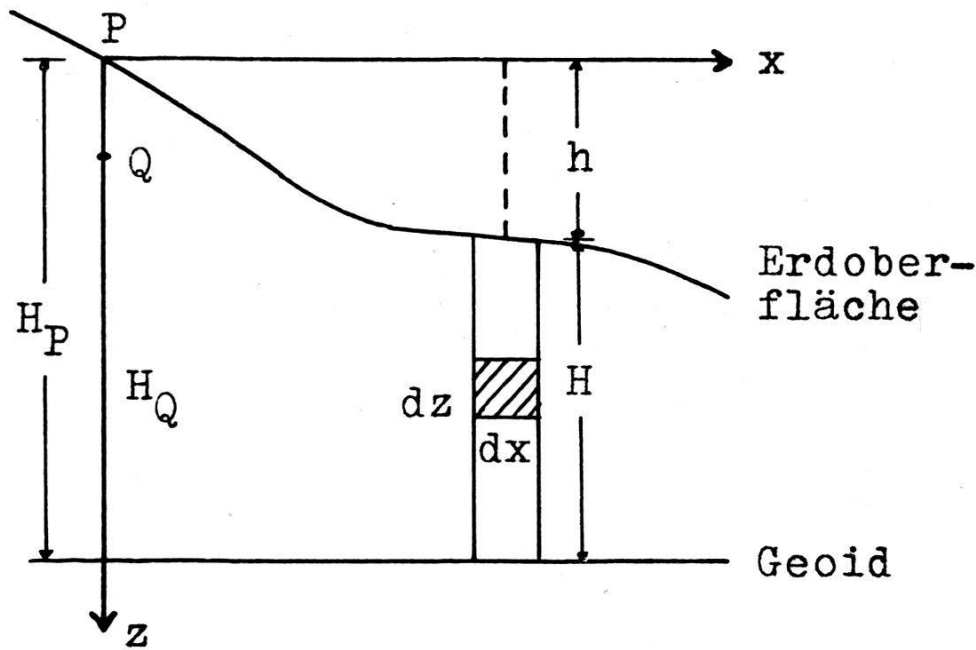


Abb. 1

$$G_{x_0} = - \frac{\varrho'' f \sigma}{g_m} \left[H \ln \left| \frac{y_2 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + H^2}}{y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + H^2}} \cdot \frac{y_1 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + H^2}}{y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + H^2}} \right. \right.$$

$$\left. \cdot \frac{y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + h^2}}{y_2 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + h^2}} \cdot \frac{y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + h^2}}{y_1 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + h^2}} \right|$$

$$+ y_2 \ln \left| \frac{h + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + h^2}}{h + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + h^2}} \cdot \frac{H + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + H^2}}{H + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + H^2}} \cdot \frac{H_P + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + H_P^2}}{H_P + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + H_P^2}} \cdot \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_2^2}} \right|$$

$$+ y_1 \ln \left| \frac{h + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + h^2}}{h + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + h^2}} \cdot \frac{H + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + H^2}}{H + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + H^2}} \cdot \frac{H_P + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + H_P^2}}{H_P + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + H_P^2}} \cdot \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_1^2}} \right|$$

$$+ x_1 \left(\arctan \frac{H y_1}{x_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + H^2}} - \arctan \frac{H y_2}{x_1 \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + H^2}} + \arctan \frac{h y_1}{x_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + h^2}} \right.$$

$$\left. - \arctan \frac{h y_2}{x_1 \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + h^2}} + \arctan \frac{H_P y_2}{x_1 \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + H_P^2}} - \arctan \frac{H_P y_1}{x_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + H_P^2}} \right)$$

$$+ x_2 \left(\arctan \frac{H y_2}{x_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + H^2}} - \arctan \frac{H y_1}{x_2 \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + H^2}} + \arctan \frac{h y_2}{x_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + h^2}} \right.$$

$$\left. - \arctan \frac{h y_1}{x_2 \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + h^2}} + \arctan \frac{H_P y_1}{x_2 \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + H_P^2}} - \arctan \frac{H_P y_2}{x_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + H_P^2}} \right)$$

G_{y_0} ergibt sich entsprechend.

(9)

Den Anteil der isostatischen Kompensationsmassen an G erhält man, wenn in (9) die entsprechenden Werte für die Dichte und die Höhen eingesetzt werden.

Beispielsberechnung: Für einen Punkt P , der auf einer oberen Rheinterrasse in der Nähe Bonns gelegen ist, wurde das Glied G nach (9) berechnet. Die Höhe H_P beträgt 175 m. P liegt auf einer Schrägebene mit einer Neigung von etwa 0,4%. Erst in einer Entfernung von etwa 2 km von P treten größere Höhenunterschiede auf. Es ergab sich im isostatischen System nach Airy-Heiskanen mit einer Erdkrustendicke von 30 km

$$G_x = - 0,024'' - 0,003'' = - 0,027'',$$

$$G_y = - 0,011'' \pm 0 = - 0,011'',$$

wobei jeweils der erste Summand den Einfluß der topographischen Massen und der zweite Summand den Einfluß der isostatischen Kompensationsmassen angibt. Addiert man zum Beispiel zur Aufpunkthöhe H_P und zu den Geländehöhen H jeweils 0,8 km, erhält man:

$$G_x = - 0,117'' - 0,015'' = - 0,132''$$

$$G_y = - 0,043'' + 0,015'' = - 0,028''$$

Die für G_x und G_y ermittelten Beträge sind so gering, daß es sich für Gebiete mit geringen Höhenunterschieden empfiehlt, zur Lotkrümmungsbestimmung lediglich die hypothesenfrei zu ermittelnden Größen zu verwenden, und zwar den Horizontalgradienten an der Erdoberfläche und die Lotkrümmung im normalen Schwerfeld.

Die numerischen Rechnungen besorgte die IBM 7090 des Institutes für Instrumentelle Mathematik der Universität Bonn. Die Rechnungen wurden bis zu einer Entfernung von etwa 15 km vom Aufpunkt ausgedehnt; die weiter entfernt liegenden Massen konnten vernachlässigt werden. Die Quadergrundfläche beträgt in unmittelbarer Nähe des Aufpunktes $0,01 \times 0,01$ km²; sie wächst bis zu einer Entfernung von etwa 500 m vom Aufpunkt kontinuierlich auf $0,2 \times 0,2$ km² an und beträgt bei einer Entfernung von mehr als 2,3 km $1,0 \times 1,0$ km².

Literaturverzeichnis

- [1] *Embacher, W.*: Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg. Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, 53. Jg., S. 1, Wien 1965.
- [2] *Müller, P.*: Simultane gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und des Schwerfeldes in der Erdkruste. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 62. Jg., S. 33, Winterthur 1964.
- [3] *Schoeps, D.*: Die Bestimmung der Lotkrümmung. Veröff. Geod. Institut Potsdam, Nr. 22, Berlin 1963.
- [4] *Kobold, F.*; *Hunziker, E.*: Communication sur la courbure de la verticale. Bulletin Géodésique, Nr. 65, S. 265, Paris 1962.