

# Zum Mechanismus der Methode der kleinsten Quadrate

Autor(en): **Gleinsvik, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **63 (1965)**

Heft 3

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-219979>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La méthode de Tchebicheff présente de l'intérêt pour les géodésiens qui hésitent entre les solutions semi-graphique et de Fourier ou Bessel.

#### Littérature:

- [1] *J. E. Alberda*, Vertical Angles Deviations of the Vertical and Adjustment (Delft 1961).
- [2] *F. Kobold* und *N. Wunderlin*, Die Bestimmung von Lotabweichungen und Meereshöhen ... (Commission géodésique suisse, 1963).
- [3] *P. Gleinsvik*, Studien über die Ermittlung von Geoidform ... (Promotionsarbeit ETH, 1960).
- [4] *A. Ansermet*, Les calculs de compensation basés sur des sommes trigonométriques (Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, 1963, N° 3).
- [5] *Fréchet* et *Romann*, Représentation de lois empiriques (Eyrolles, Paris).

## Zum Mechanismus der Methode der kleinsten Quadrate

Von Prof. Dr. techn. Paul Gleinsvik, Vollebakk (Norwegen)

### Zusammenfassung

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit dem inneren Wesen der Methode der kleinsten Quadrate. Zwischen den ausgeglichenen Ergebnissen einerseits und den korrespondierenden unausgeglichenen Werten andererseits werden überraschend einfache Beziehungen nachgewiesen. Es stellt sich nämlich heraus, daß die Ergebnisse einer strengen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate sowohl zahlenmäßig als auch genauigkeitsmäßig identisch sind mit den gewogenen Mitteln aller möglichen Partialwerte, die sich aus dem Beobachtungsmaterial ohne Ausgleichung ableiten lassen.

### Résumé

Le présent article traite du caractère interne de la méthode des moindres carrés. Il est ici démontré une relation étonnamment simple entre les valeurs compensées d'une part et les résultats non compensés correspondants d'autre part. Il se trouve en effet que les résultats d'une compensation par la méthode des moindres carrés, aussi bien en ce qui concerne la grandeur qu'en ce qui concerne la précision, coïncident avec les moyennes arithmétiques générales de toutes les valeurs correspondantes possibles qu'on peut dériver des résultats d'observation sans compensation.

### 1. Die mittelbildende Eigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate

#### 1.1. Die ausgeglichenen Werte für die Größen eines Größenkomplexes

Die Untersuchung gestaltet sich am einfachsten, wenn ihr die vermittelnde Ausgleichung zugrunde gelegt wird. Der Einfachheit halber begrenzen wir uns dabei auf  $n = 3$  Fehlergleichungen und  $u = 2$  Unbekannte:

$$\begin{array}{rcl} v_1 = a_1 x + b_1 y + f_1 & \text{Gewicht} & p_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + f_2 & & p_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + f_3 & & p_3 \end{array} \quad (1)$$

Durch die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich für die Unbekannte  $x$ :

$$x = \frac{[pab] [pbf] - [pbb] [paf]}{[paa] [pbb] - [pab]^2} = \frac{z_x}{D}$$

Bei Auflösung der Summenausdrücke finden wir:

$$\begin{aligned} z_x = & \left\{ p_1 p_2 b_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2) + p_1 p_3 b_3 (a_3 b_1 - a_1 b_3) \right\} f_1 \\ & + \left\{ p_1 p_2 b_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) + p_2 p_3 b_3 (a_3 b_2 - a_2 b_3) \right\} f_2 \\ & + \left\{ p_1 p_3 b_1 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + p_2 p_3 b_2 (a_2 b_3 - a_3 b_2) \right\} f_3 \end{aligned} \quad (2)$$

und  $D = p_1 p_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + p_1 p_3 (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + p_2 p_3 (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$

Wir nehmen jetzt an, daß die Unbekannten aus (1) ohne Ausgleichung bestimmt werden, und zwar durch alle möglichen Kombinationen von zwei Fehlergleichungen (hier gibt es im ganzen drei Kombinationen, nämlich 1.2, 1.3 und 2.3), wobei durch Nullsetzen der  $v$  folgende «Partialwerte» für  $x$  erhalten werden:

$$\begin{aligned} x_{12} &= \frac{-b_2 f_1 + b_1 f_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{z_{12}}{D_{12}} \\ x_{13} &= \frac{-b_3 f_1 + b_1 f_3}{a_1 b_3 - a_3 b_1} = \frac{z_{13}}{D_{13}} \\ x_{23} &= \frac{-b_3 f_2 + b_2 f_3}{a_2 b_3 - a_3 b_2} = \frac{z_{23}}{D_{23}} \end{aligned} \quad (3)$$

*Behauptung:* Der ausgeglichene Wert von  $x$  ist identisch mit dem allgemeinen arithmetischen Mittel der Partialwerte (3), das heißt:

$$x = \frac{p_{12} x_{12} + p_{13} x_{13} + p_{23} x_{23}}{p_{12} + p_{13} + p_{23}} = \frac{[p_{ij} x_{ij}]}{[p_{ij}]},$$

wenn die Gewichte der Partialwerte auf

$$p_{ij} = p_i p_j D_{ij}^2$$

fixiert werden, wobei  $p_i$  und  $p_j$  die Gewichte der einzelnen Fehlergleichungen zur Bestimmung der Partialwerte  $x_{ij}$  und  $D_{ij}$  die dazugehörige Determinante sind.

Um das zu zeigen, bilden wir

$$\begin{aligned} x &= \frac{[p_{ij} x_{ij}]}{[p_{ij}]} = \frac{p_{12} \frac{z_{12}}{D_{12}} + p_{13} \frac{z_{13}}{D_{13}} + p_{23} \frac{z_{23}}{D_{23}}}{p_{12} + p_{13} + p_{23}} = \\ &= \frac{p_1 p_2 D_{12} z_{12} + p_1 p_3 D_{13} z_{13} + p_2 p_3 D_{23} z_{23}}{p_1 p_2 D_{12}^2 + p_1 p_3 D_{13}^2 + p_2 p_3 D_{23}^2} \end{aligned}$$

Wenn hier  $D_{ij}$  und  $z_{ij}$  nach (3) ersetzt werden, erhalten wir wie oben

$$x = \frac{z_x}{D}.$$

In analoger Weise läßt sich zeigen, daß

$$y = \frac{[p_{ij} y_{ij}]}{[p_{ij}]}.$$

Die Ableitungen lassen sich auf eine beliebige Anzahl von Fehlergleichungen und Unbekannten ausdehnen. Wir begnügen uns indessen damit, die Gesetzmäßigkeit für den allgemeinen Fall zu formulieren:

*Die ausgeglichenen Werte der verschiedenen Größen eines Größenkomplexes, welche durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wird, sind identisch mit den allgemeinen arithmetischen Mitteln aller möglichen unausgeglichenen Partialwerte der betreffenden Größen, die sich aus dem der Ausgleichung zugrunde liegenden Beobachtungsmaterial ableiten lassen. Handelt es sich um eine vermittelnde Ausgleichung mit  $n$  Fehlergleichungen und  $u$  Unbekannten, sind die bei den Mittelbildungen zu verwendenden Gewichte gleich*

$$p_i p_j \dots p_u D_{ij}^2 \dots u,$$

wobei  $p_i, p_j, \dots, p_u$  die Gewichte der einzelnen Fehlergleichungen einer beliebigen Fehlergleichungskombination sind, die gerade ausreicht, die Unbekannten zu bestimmen und wobei  $D_{ij} \dots u$  die dazugehörige Determinante ist.

Aus dem aufgelösten Ausdruck der Determinante des zu (1) gehörigen Normalgleichungssystemes, wie er in (2) angegeben ist, wird ersichtlich, daß

$$D = \sum p_i p_j D_{ij}^2,$$

weil die in (2) auftretenden Klammerausdrücke nichts anderes sind als die Determinanten der partiellen Lösungen. Im allgemeinen Fall ( $n$  Fehlergleichungen und  $u$  Unbekannte) nimmt der Ausdruck für  $D$  folgende Form an:

$$D = \sum p_i p \dots p_u D_{ij}^2 \dots u$$

Aus dieser Beziehung, die besagt, daß  $D$  nur dann null sein kann wenn sämtliche Determinanten der partiellen Lösungen null sind, läßt sich folgender Schluß ziehen:

*Die allgemeine Bedingung, daß eine Ausgleichung zu bestimmten Werten der Unbekannten führt, liegt darin, daß dem zugrunde gelegten Fehlergleichungssystem wenigstens eine Kombination von  $u$  Gleichungen entnommen werden kann, welche eine reelle Bestimmung der Unbekannten enthält.*

### 1.2. Der ausgeglichene Wert einer beliebigen Funktion der Unbekannten

Die festgestellte Gesetzmäßigkeit hat nicht nur für die Unbekannten selbst Gültigkeit, sondern auch für beliebige Funktionen derselben. Um das zu zeigen, gehen wir von der folgenden Funktion

$$w = f(X, Y, Z, \dots)$$

aus und führen, wie gewöhnlich, die Näherungswerte  $x^0, y^0, z^0, \dots$  ein, welche durch die Zuschläge  $x, y, z, \dots$  in die ausgeglichenen Werte  $X, Y, Z, \dots$  überführt werden. Dabei erhalten wir

$$\begin{aligned} w = f(X, Y, Z, \dots) &= f(x^0, y^0, z^0, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z + \dots \\ &= w^0 + \varphi_x x + \varphi_y y + \varphi_z z + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

was in

$$w = \frac{[p']}{[p']} w^0 + \varphi_x \frac{[p' x']}{[p']} + \varphi_y \frac{[p' y']}{[p']} + \varphi_z \frac{[p' z']}{[p']} + \dots$$

übergeht, wenn die Gesetzmäßigkeit hinsichtlich des Entstehens der Unbekannten berücksichtigt wird (das Zeichen ' indiziert hier und auch künftig *unausgeglichene Partialwerte*),

$$\text{das heißt: } w = \frac{1}{[p']} \sum p' \underbrace{(w^0 + \varphi_x x' + \varphi_y y' + \varphi_z z' + \dots)}_{w'} = \frac{[p' w']}{[p']}$$

Wir haben damit für beliebige Funktionen der Unbekannten dieselbe Gesetzmäßigkeit hinsichtlich der Entstehung gefunden wie für die Unbekannten selbst.

### 1.3. Der Zusammenhang zwischen der aus der Ausgleichung resultierenden Genauigkeit und der Genauigkeit der Partialwerte

Ausgehend von den Partialergebnissen (3) ergeben sich folgende Werte der dazugehörigen mittleren Fehler und Gewichtskoeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} m^2_{x_{12}} &= \frac{b_2^2 m_1^2 + b_1^2 m_2^2}{D_{12}^2} = m_0^2 \frac{\frac{b_2^2}{p_1} + \frac{b_1^2}{p_2}}{D_{12}^2} = m_0^2 Q_{xx_{12}} \\ m^2_{x_{13}} &= \frac{b_3^2 m_1^2 + b_1^2 m_3^2}{D_{13}^2} = m_0^2 \frac{\frac{b_3^2}{p_1} + \frac{b_1^2}{p_3}}{D_{13}^2} = m_0^2 Q_{xx_{13}} \\ m^2_{x_{23}} &= \frac{b_3^2 m_2^2 + b_2^2 m_3^2}{D_{23}^2} = m_0^2 \frac{\frac{b_3^2}{p_2} + \frac{b_2^2}{p_3}}{D_{23}^2} = m_0^2 Q_{xx_{23}} \end{aligned} \right\} (5)$$

Eine Gesamtausgleichung von (1) resultiert bekanntlich im folgenden Wert:

$$Q_{xx} = \frac{[pbb]}{D}$$

*Behauptung:* Der ausgeglichene Wert von  $Q_{xx}$  ist identisch mit dem allgemeinen arithmetischen Mittel der Partialwerte (5), dividiert mit  $\ddot{u} + 1$ , wobei  $\ddot{u}$  die Anzahl der Überbestimmungen ist, das heißt:

$$Q_{xx} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' Q_{xx}']}{[p']},$$

wenn die Gewichte der Partialwerte, wie früher, auf  $p_i p_j D_{ij}^2$  fixiert werden.

Um das zu zeigen, bilden wir ( $\ddot{u} + 1$  ist hier gleich 2):

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' Q_{xx}']}{[p']} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{p_1 p_2 \left( \frac{b_2^2}{p_1} + \frac{b_1^2}{p_2} \right) + p_1 p_3 \left( \frac{b_3^2}{p_1} + \frac{b_1^2}{p_3} \right) + p_2 p_3 \left( \frac{b_3^2}{p_2} + \frac{b_2^2}{p_3} \right)}{p_1 p_2 D_{12}^2 + p_1 p_3 D_{13}^2 + p_2 p_3 D_{23}^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 p_1 b_1^2 + 2 p_2 b_2^2 + 2 p_3 b_3^2}{D} = \frac{[pbb]}{D} \end{aligned}$$

In analoger Weise läßt sich zeigen, daß die behauptete Gesetzmäßigkeit auch für  $Q_{yy}$  und  $Q_{xy}$  besteht, das heißt:

$$Q_{yy} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' Q_{yy}']}{[p']} \text{ und } Q_{xy} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' Q_{xy}']}{[p']}$$

Die Ableitungen lassen sich ohne weiteres auf eine beliebige Anzahl von Fehlergleichungen und Unbekannten ausdehnen. Die abgeleitete Gesetzmäßigkeit kann wie folgt formuliert werden:

*Die ausgeglichenen Werte der Gewichtskoeffizienten der Unbekannten sind identisch mit den allgemeinen arithmetischen Mitteln aller möglichen unausgeglichenen Partialwerte derselben, dividiert mit  $\ddot{u} + 1$ . Die bei diesen Mittelbildungen zu verwendenden Gewichte sind auf ( $n$  Fehlergleichungen und  $u$  Unbekannte)*

$$p_i p_j \dots p_u D_{ij}^2 \dots u$$

zu fixieren, wobei sich die  $p$  und  $D$  auf eine beliebige Fehlergleichungskombination beziehen, die gerade ausreicht, die Unbekannten zu bestimmen.

Schreiben wir die unausgeglichenen Werte eines beliebigen Gewichtskoeffizienten wie folgt:

$$\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \dots,$$

läßt sich das Entstehen des ausgeglichenen Wertes desselben bemerkenswert einfach ausdrücken (*gleichgewichtige Fehlergleichungen vorausgesetzt*):

$$Q_{ij} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{\sum Z}{\sum N},$$

wobei  $i$  gleich oder ungleich  $j$  ist.

Wenn in den abgeleiteten Ausdrücken der  $Q_{xx}$  und  $Q_{yy}$  überall die Gewichtskoeffizienten durch die korrespondierenden Gewichte ersetzt werden, ergibt sich (in allgemeiner Form):

$$\frac{1}{p_i} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{\left[ \frac{p'}{p_i'} \right]}{[p']},$$

das heißt, der ausgeglichene Wert des reziproken Gewichtes einer durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Größe ist identisch mit dem gewogenen Mittel aller möglichen unausgeglichenen Werte desselben, dividiert mit  $\ddot{u} + 1$ .

#### 1.4. Die Genauigkeit beliebiger Funktionen der Unbekannten

Hier gilt es zu zeigen, daß die aufgezeigte Gesetzmäßigkeit bezüglich der Genauigkeit der Unbekannten selbst auch für beliebige Funktionen derselben Gültigkeit hat.

Ausgehend von der Funktion (4)

$$w = w^0 + \varphi_x x + \varphi_y y + \varphi_z z + \dots,$$

erhalten wir für  $Q_{ww}$ :

$$Q_{ww} = \varphi_x^2 Q_{xx} + \varphi_y^2 Q_{yy} + \dots + 2 \varphi_x \varphi_y Q_{xy} + \dots,$$

welcher Ausdruck bei Berücksichtigung des Entstehungsgesetzes der Gewichtskoeffizienten übergeht in

$$\begin{aligned} Q_{ww} &= \frac{1}{\ddot{u} + 1} \left\{ \varphi_x^2 \frac{[p' Q_{xx}']}{[p']} + \varphi_y^2 \frac{[p' Q_{yy}']}{[p']} + \dots + 2 \varphi_x \varphi_y \frac{[p' Q_{xy}']}{[p']} + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{1}{[p']} \sum p' \underbrace{(\varphi_x^2 Q_{xx}' + \varphi_y^2 Q_{yy}' + \dots + 2 \varphi_x \varphi_y Q_{xy}' + \dots)}_{Q_{ww}'} \\ &= \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{[p' Q_{ww}']}{[p']}, \end{aligned}$$

oder, was auf das gleiche hinausläuft:

$$\frac{1}{p_w} = \frac{1}{\ddot{u} + 1} \frac{\left[ \frac{p'}{p_w'} \right]}{[p']}$$

Wir haben somit für beliebige Funktionen der Unbekannten nachgewiesen, daß für sie dieselbe Gesetzmäßigkeit hinsichtlich der Genauigkeit zwischen den ausgeglichenen und unausgeglichenen Werten gilt wie für die Genauigkeit der Unbekannten selbst.

### 1.5. Der Genauigkeitsgewinn durch die Ausgleichung

Der nachgewiesene Zusammenhang zwischen der Genauigkeit der Partialergebnisse und der Ausgleichungsergebnisse lädt zu einer generellen Betrachtung über den Genauigkeitsgewinn durch die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ein. Nehmen wir nämlich an, daß die einzelnen partiellen Lösungen ungefähr von gleicher Genauigkeit sind, das heißt, daß alle  $Q_{ii}'$  angenähert gleich groß sind ( $i$  kann eine Unbekannte sein oder eine beliebige Funktion der Unbekannten), so reduziert sich

$$\frac{[p' Q_{ii}']}{[p']} \text{ zu } Q_{ii}^0,$$

wo  $Q_{ii}^0$  der gleich große Wert der Gewichtskoeffizienten der Partiallösungen ist, das heißt:

$$Q_{ii} = \frac{Q_{ii}^0}{\ddot{u} + 1} \text{ und } m_i = \frac{m_i^0}{\sqrt{\ddot{u} + 1}}$$

Wir haben somit gezeigt, daß der Genauigkeitsgewinn durch die Größe  $\sqrt{\ddot{u} + 1}$  charakterisiert ist, indem der ausgeglichene Wert des mittleren Fehlers einer durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Größe umgekehrt proportional zu  $\sqrt{\ddot{u} + 1}$  ist.

Diese Folgerung dürfte für Abschätzungen in den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen genügen.

## 2. Zahlenbeispiel

Wir wollen so die festgestellten Eigenschaften der Methode der kleinsten Quadrate mit einem Beispiel zahlenmäßig beleuchten und gehen dabei von folgendem Fehlergleichungssystem aus:

	Gewicht
$v_1 = + 2 x + y + z + 6,4$	2
$v_2 = - 3 x - 2 y + 4 z + 8,3$	1
$v_3 = - x + 3 y - 2 z - 11,3$	3
$v_4 = + 4 x - 5 y + 3 z + 22,0$	4
$v_5 = - 2 x + 4 y + 2 z - 2,0$	2

also von 5 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Es ist hier möglich, die Unbekannten durch im ganzen 10 Kombinationen der Fehlergleichungen ohne Ausgleichung zu ermitteln. Die Partialergebnisse sowie die gewoge-



Kombination	$x$	$y$	$z$	$Q_{xx}$	$Q_{yy}$	$Q_{zz}$	$Q_{xy}$	$D$	$p' = p_i p_j p_k D^2_{ijk}$
1, 2, 3	-2,0946	+0,9568	-3,1676	0,0504	0,0726	0,0802	+0,0022	- 37	8 214
1, 2, 4	-2,0421	+0,8605	-3,1763	0,0296	0,0600	0,0798	+0,0247	+ 76	46 208
1, 2, 5	-2,1276	+1,0172	-3,1621	0,0651	0,0299	0,0679	-0,0003	- 58	13 456
1, 3, 4	-1,8571	+0,8143	-3,5000	0,1433	0,0821	0,5208	-0,0336	- 14	4 704
1, 3, 5	-2,1389	+0,9833	-3,1056	0,0863	0,0266	0,0462	+0,0297	+ 36	15 552
1, 4, 5	-2,1692	+0,8923	-2,9538	0,1017	0,0403	0,0521	+0,0551	- 52	43 264
2, 3, 4	-1,7400	+1,4000	-2,6800	0,3659	1,1481	1,1359	+0,6296	- 15	2 700
2, 3, 5	-2,0391	+1,0261	-3,0913	0,1708	0,0413	0,0708	+0,0649	- 46	12 696
2, 4, 5	-1,9441	+1,0356	-3,0153	0,0490	0,0366	0,0262	+0,0355	+118	111 392
3, 4, 5	-1,7938	+1,1313	-3,0563	0,2059	0,0848	0,0366	+0,1232	- 32	24 576
Mittel	-2,0062	+0,9867	-3,0604	0,0268	0,0190	0,0218	+0,0157		$\Sigma = 282 762$
Ausgl.	-2,0063	+0,9867	-3,0604	0,0268	0,0190	0,0218	+0,0157	282 762	

nen Mittel (vorletzte Zeile) und die Ergebnisse der Gesamtausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (letzte Zeile) sind in der vorstehenden Tabelle zusammengestellt (aus Platzgründen ist von den nicht-quadratischen Gewichtskoeffizienten nur  $Q_{xy}$  mitaufgeführt).

Das Zahlenbeispiel bestätigt in jeder Hinsicht die Richtigkeit der nachgewiesenen Zusammenhänge zwischen den ausgeglichenen und den unausgeglichenen Ergebnissen.

### 3. Schlußbemerkungen

Die in der vorliegenden Arbeit nachgewiesenen Zusammenhänge zwischen den Ausgleichungsergebnissen und den unausgeglichenen Partialergebnissen dürfen nicht als ein «Schnellverfahren» bei der Durchführung der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate betrachtet werden. Im allgemeinen wird der indirekte Weg über die partiellen Ergebnisse, aus denen sich die ausgeglichenen Werte als gewogene Mittel ergeben, arbeitsaufwendiger sein als der übliche direkte Lösungsweg der Methode der kleinsten Quadrate. Das hängt vor allem damit zusammen, daß die Anzahl der Partiaillösungen in der Regel groß wird. Bei einer vermittelnden Ausgleichung mit  $n$  Fehlergleichungen und  $u$  Unbekannten ist diese Anzahl gegeben durch

$$q = \binom{n}{u} = \frac{n!}{u!(n-u)!}$$

Für  $n = 10$  und  $u = 3$  wird  $q = \frac{10!}{3!7!} = 120$ ; das heißt, wir hätten 120 Gleichungssysteme mit drei Unbekannten aufzulösen und darauf für jede der drei Unbekannten ein gewogenes Mittel bestehend aus 120 Gliedern zu bilden.

*Im Vergleich zum indirekten Lösungsweg durch die Partialergebnisse weist die Methode der kleinsten Quadrate den großen Vorteil auf, daß sie die Auflösung von  $\binom{n}{u}$  Systemen von je  $u$  Gleichungen auf die Lösung eines einzigen solchen Systems zurückführt.*

Die Tatsache, daß sich die in einer Ausgleichung implizierten Größen als gewogene Mittel aller möglichen unausgeglichenen Werte derselben ergeben, ist schon lange bekannt. (Siehe Czuber: *Theorie der Beobachtungsfehler*, Seite 320–330, wo diesbezüglich auf Arbeiten von Jacobi, van Geer und Glaisher Bezug genommen wird. Neuere Hinweise auf dieses Thema finden wir bei A. Ansermet.) Daß dieselbe Gesetzmäßigkeit *auch für die Genauigkeit* der betreffenden Größen Gültigkeit hat, ist meines Wissens bis jetzt nicht nachgewiesen.

## **Application pratique de l'automation à la mensuration cadastrale**

*Par A. Bercher*

*Géomètre à la Direction du cadastre du canton de Vaud.*

### *Résumé*

Cet article constitue une suite à l'«Etude de l'automation dans la mensuration cadastrale» publiée dans les numéros 6 et 7 de la Revue en 1964.

Après le rappel de quelques notions relatives à la mensuration numérique, l'auteur traite du calcul des coordonnées en faisant état des programmes de calcul établis ou en préparation. La programmation a été confiée à M. le Professeur W.-K. Bachmann, Directeur de l'Institut de Photogrammétrie de l'EPUL.

Les possibilités d'emploi du coordinatographe automatique sont décrites dans le détail, dans le but de montrer que le dessin mécanique n'est pas utopique.

Ce texte n'aurait pas été complet sans un chapitre consacré à l'utilisation des coordonnées dans la conservation; ce problème a été examiné très sérieusement sur la base d'essais effectués sur le terrain.

### *Zusammenfassung*

Der vorliegende Artikel bildet eine Fortsetzung zu den Studien über die Automation in der Grundbuchvermessung, die in den Nummern 6 und 7 (1964) dieser Zeitschrift publiziert worden sind.

Nachdem der Autor an einige Begriffe, die sich auf die numerische Vermessung beziehen, erinnert hat, behandelt er die Berechnung von Koordinaten, wobei er sich auf vorhandene oder in Vorbereitung begriffene Programme stützt. Die Programmierung wurde Herrn Prof. W.-K. Bachmann, Leiter des Photogrammetrischen Institutes der EPUL, anvertraut.

Die Möglichkeiten der Anwendung des automatischen Koordinatographen werden in der Absicht, zu zeigen, daß die mechanische Zeichnung nicht eine Utopie bildet, eingehend beschrieben.