

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 62 (1964)

**Heft:** 12

**Artikel:** Le problème des points géodésiques adjoints

**Autor:** Ansermet, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-219236>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungs-  
wesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein;  
Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations  
foncières; Société suisse des ingénieurs du  
Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 12 · LXII. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Dezember 1964

## Le problème des points géodésiques adjoints

Par A. Ansermet

### Résumé

Le problème des points géodésiques adjoints (ou déduits) est assez complexe; il se présente en triangulation et trilatération, planimétriquement ou spatialement. Pour le point  $F$  il peut y avoir compensation; si ce n'est pas le cas, on peut tout de même déterminer des ellipses ou ellipsoïdes d'erreur dont l'échelle est arbitraire.

Les parallaxes angulaires ou linéaires,  $(AL-AF)$  pour ces dernières, seront aussi précises que possible; c'est l'essentiel. Par hypothèse les points directeur et adjoint sont mutuellement peu éloignés. Le calcul par voie analytique étant parfois laborieux, on procédera aussi par voie semi-graphique pour évaluer le rôle des erreurs sur les points fixes, servant à la mesure des parallaxes. Un cas concret fut traité pour  $F$ , et le calcul serait analogue pour  $L$ . Il est manifeste que ces erreurs ont peu d'influence sur les positions mutuelles de ces points.

### Zusammenfassung

Das ziemlich verwickelte Problem von Leit- und Folgepunkt stellt sich in der Triangulation und in der Trilateration, und zwar sowohl in der Ebene als auch im Raum. Der Punkt  $F$  kann durch Ausgleichung gewonnen werden; sollte das nicht der Fall sein, so kann man trotzdem Fehlerellipsen oder Fehlerellipsoide mit beliebigen Maßstäben bestimmen.

Wesentlich ist, daß die Winkel- oder Linearparallaxen,  $(AL-AF)$  für die letzteren, so genau als möglich bestimmt werden. Man geht von der Annahme aus, daß die Entfernung zwischen Leit- und Folgepunkt gering ist. Da die analytische Berechnung gelegentlich umfangreich wird, kann man auch auf halbgraphischem Wege den Einfluß von Fehlern der gegebenen Punkte, auf denen Parallelen gemessen werden, bestimmen. Ein konkreter Fall wird für  $F$  behandelt. Die Berechnung für den Punkt  $L$  wäre analog. Sie zeigt, daß diese Fehler an den gegebenen Punkten wenig Einfluß auf die gegenseitige Lage von Leit- und Folgepunkt haben.

Les lignes qui suivent portent sur un problème pouvant se présenter en triangulation ou en trilatération, qu'il s'agisse de réseaux à deux ou

trois dimensions. C'est le mérite de l'Ecole Polytechnique Fédérale (section des Mensurations) d'avoir suscité une intéressante étude sur ce sujet.

Les données sont connues: A partir d'un point directeur  $L$  il faut déterminer le point adjoint ou déduit  $F$  en fonction de parallaxes angulaires ou linéaires (voir [1]). Dans le premier cas le théodolite utilisé est à un axe ou, éventuellement, répétiteur; en trilatération on aura recours à l'électrotélémetrie (miroirs en  $L$  et  $F$ ). Les points fixes sont  $A$  et  $B$ ; spatialement il y en a trois  $A, B, C$ . Il peut y avoir un point de plus dans chaque cas, mais c'est un élément surabondant; le problème est moins simple. De plus, par hypothèse, on admet que les coordonnées des points fixes ne sont pas toujours exemptes d'erreurs, celles-ci étant petites.

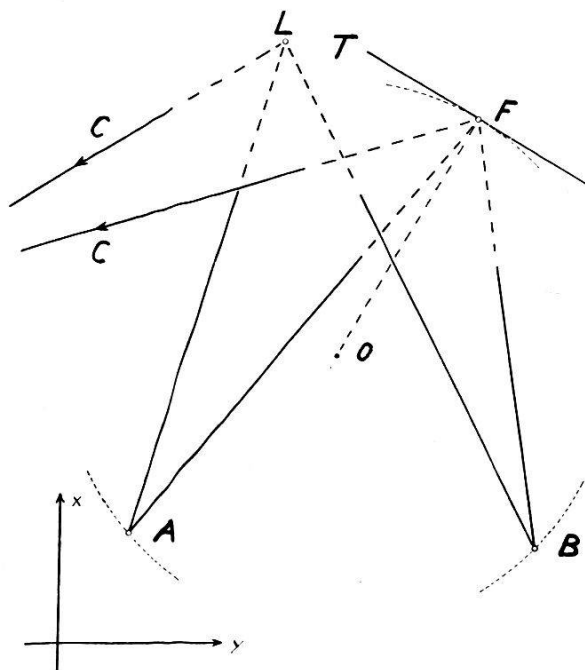


Fig. 1

Spatialement les parallaxes angulaires ne sont en général pas mesurées directement ([2], p. 317); en plan on formera la différence entre deux directions. Quant à la parallaxe linéaire ( $AL - AF$ ), elle doit être précise; la comparaison entre  $AL$  mesuré et la valeur déduite des coordonnées a une grande importance. C'est surtout la présence éventuelle d'erreurs sur les points fixes qui rend le calcul un peu complexe; l'article publié en juin traite la question à fond quand il y a deux points fixes, les mesures étant angulaires.

*Détermination du point F.* Géodésiquement c'est une intersection basée sur la connaissance des angles  $LAF$  et  $LBF$ . L'angle  $AFB$ , obtenu par le calcul, inscrit au cercle  $ABF$ , joue un certain rôle. Désignons-

le par  $\gamma$ ; une variation  $d\gamma$  donne lieu, pour la tangente  $T$  en  $F$ , à une translation égale à  $\frac{AF \cdot BF}{AB} d\gamma$  ( $d\gamma$  en mesure circulaire). Le facteur de  $d\gamma$  est la «sensibilité du segment de cercle». Les points pour lesquels la sensibilité est constante sont sur des courbes de Cassini ([3], p. 414).

En trilatération l'intersection est curviligne («Bogenschnitt»); il n'y a pas non plus d'élément surabondant; en principe, dans les deux cas, une solution provisoire n'est pas nécessaire. C'est un problème de trigonométrie élémentaire.

Toutefois, si on veut par exemple déterminer des poids, on écrira les équations en  $v$ , au nombre de deux, ces  $v$  étant nuls ([1], p. 187). Si les mesures sont linéaires, traitons un cas concret,  $a_i$  et  $b_i$  étant les coefficients directeurs:

$$\text{Côté } AF: a_1 = +0,8 \quad b_1 = +0,6 \quad [paa] = 1 = [pbb]; [pab] = 0$$

$$\text{Côté } BF: a_2 = +0,6 \quad b_2 = -0,8 \quad Q_{xx} = Q_{yy} = 1 \quad Q_{xy} = 0$$

L'ellipse d'erreur est circulaire, mais  $m_0^2 \cong [pvv]$ : (nombre mesures surabondantes) est indéterminé. Pour passer du point provisoire au point définitif, on aura recours au calcul graphique. Il n'y a rien là de nouveau.

*Rôle d'un troisième point fixe C.* Une compensation est nécessaire et peut être effectuée par voie semi-graphique; analytiquement il y a la solution de Jacobi permettant d'apprécier le rôle de chaque point. Successivement on fait abstraction de  $C$ , puis de  $B$  et enfin de  $A$  ([4], p. 159); pour  $dx$  en  $F$  on a:

$$dx = \frac{p_1 dx_{12} + p_2 dx_{13} + p_3 dx_{22}}{[p]} \quad \text{de même pour } dy, dz \quad (1)$$

$$p_1 = \left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{array} \right|^2 \quad p_2 = \left| \begin{array}{c} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{array} \right|^2 \quad p_3 = \left| \begin{array}{c} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{array} \right|^2 \quad [av] = [bv] = 0$$

(calcul par variation des coordonnées)

On réalise un certain contrôle qui est le bienvenu.

*Erreurs sur les points fixes A, B.* Les coordonnées  $x_F, y_F$  du point  $F$  sont obtenues en fonction, d'une part des parallaxes linéaires ou angulaires, d'autre part des coordonnées  $x_A, y_A, x_B, y_B$ ; ces dernières, en langage mathématique, subissent des accroissements  $fx_A, fy_A, fx_B, fy_B$ . On applique la formule des accroissements finis pour obtenir les accroissements en  $F$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} fx_F = F_x (fx_A, fy_A, fx_B, fy_B) \\ fy_F = F_y ( \quad \quad \quad id. \quad \quad ) \end{array} \right\} \quad (2)$$

fonctions linéaires où les coefficients sont des dérivées. C'est la solution théorique, mais les praticiens préféreront une solution semi-graphique en général. Le point  $F$  est sur un arc de rayon  $AF$ , lequel est pratiquement confondu avec sa tangente dans le voisinage de  $F$ ; on a de plus la résultante  $f_R$ :

$$f_R = \sqrt{fx_A^2 + fy_A^2} = \sqrt{f_L^2 + f_T^2},$$

ces deux dernières composantes étant respectivement longitudinale et transversale par rapport à  $AF$ ; la tangente en  $F$  subira une translation  $f_L$  en tenant compte des signes. On fera de même pour  $BF$ ; la précision est en général suffisante. La voie semi-graphique convient aussi pour les parallaxes angulaires. Remarquons que des erreurs sur des coordonnées peuvent se présenter dans de nombreuses circonstances et pas seulement lors du calcul de points adjoints.

*Cas d'un point  $F$  spatial.* Ce qui précède constitue en partie un cas particulier du calcul quand il y a trois dimensions. Comme éléments initiaux on a les 9 coordonnées des points  $A, B, C$ . Mathématiquement il y a 9 accroissements qui ne sont pas nécessairement tous différents de zéro.

Les équations (2) deviennent, avec 27 termes en tout:

$$\left\{ \begin{array}{l} fx_F = F_x (fx_A, fy_A, fz_A \dots fz_C) \\ fy_F = F_y ( \quad \quad \text{id.} \quad \quad ) \\ fz_F = F_z ( \quad \quad \text{id.} \quad \quad ) \end{array} \right\} \quad (3) \quad \begin{array}{l} \text{Formes linéaires où les} \\ \text{coefficients sont des déri-} \\ \text{vées partielles} \end{array}$$

et, parfois, il peut y avoir un quatrième point fixe.

Revenons à la détermination du point en faisant abstraction de ces erreurs. Les points  $A, B, C$  donnent lieu à trois parallaxes et à trois équations en  $v$ , ces derniers étant nuls; considérons plus particulièrement des mesures linéaires. Il faut  $LF$  petit et des différences  $(AL-AF)$ ,  $(BL-BF)$ ,  $(CL-CF)$  faibles; c'est plus ou moins réalisable. Les coordonnées de  $L$  étant définitives, il faut comparer les valeurs mesurée et calculée de  $AL$ , d'où un écart  $\varepsilon$ ; si, de plus,  $AL \cong AF$ , il faut corriger  $AF_{\text{mesuré}}$  de la même quantité  $\varepsilon$ .

Traisons un cas concret avec les valeurs suivantes pour les équations en  $v$ .

	$i =$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	Poids	Côtés
Inconnues:	1	+0,653	+0,490	+0,577	1,0	$AF$
les $dx, dy, dz$ de	2	0,00	-0,817	+0,577	1,2	$BF$
$F$ , les $v$ étant nuls	3	-0,653	+0,490	+0,577	1,0	$CF$

La matrice des coefficients des équations normales est diagonale:

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$$

$$[paa] = 0,854, [pbb] = 1,28, [pcc] = 1,067, m_0^2 = \frac{0}{0}$$

Coefficients de poids des inconnues:

$$Q_{xx} = 1,170, \quad Q_{yy} = 0,781, \quad Q_{zz} = 0,937$$

les axes principaux de l'ellipsoïde d'erreur en  $F$  sont proportionnels à:

$$\sqrt{1,170} = 1,08 \quad \sqrt{0,781} = 0,884 \quad \sqrt{0,937} = 0,968$$

Les angles  $AFB$ ,  $AFC$ ,  $BFC$  sont calculés en fonction de leurs cosinus:

$$\begin{aligned} \cos AFB = \cos BFC &= -0,490 \times 0,817 + \overline{0,577^2} = -0,067 = \cos 93^\circ,8 \\ \cos AFC &= -\overline{0,653^2} + \overline{0,490^2} + \overline{0,577^2} = +0,146 = \cos 81^\circ,6 = \\ &= a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 \end{aligned}$$

Deux éléments jouent un rôle: la précision des parallaxes angulaire ou linéaire et la forme des ellipses et ellipsoïdes d'erreur qui ne doit pas être trop défavorable pour le point  $F$ .

*Rôle d'erreurs sur les points fixes.* Dans le cas de réseaux trilatérés et spatiaux (en régions montagneuses par ex.) on raisonne comme en planimétrie; les équations (3) n'ont guère qu'un intérêt théorique. Le point  $F$  est sur une sphère de rayon  $AF$ ; dans le voisinage de  $F$  on lui substitue le plan tangent en  $F$  lequel subit une translation  $f_L$  longitudinale:

$$f_R^2 = f_{x_A}^2 + f_{y_A}^2 + f_{z_A}^2 = f_L^2 + f_T^2 \quad (4)$$

( $f_T$  composante transversale)

Exemple:  $f_{x_A} = f_{y_A} = f_{z_A} = 10 \text{ cm} = 1 \text{ décimètre};$

$$a_i = b_i = c_i = +0,577$$

$$f_L = (0,577 + 0,577 + 0,577) 10 = 17,32 \text{ cm.}$$

Pour  $BF$  et  $CF$  on procède de même. Il faut prendre garde aux signes; par hypothèse les trois termes ci-dessus ont le même signe.

*Calcul semi-graphique.* Il peut rendre des services pour déterminer les  $f_{x_F}$ ,  $f_{y_F}$ ,  $f_{z_F}$ . Considérons de suite un cas concret avec les valeurs:

Plans	termes absolus	normales	$a_i$	$b_i$	$c_i$
$P_1$	+12,50	$AF$	+0,5	+0,5	-0,707
$P_2$	+10,60	$BF$	0,00	+0,707	+0,707
$P_3$	+ 7,07	$CF$	+0,707	0,00	+0,707

Les plans respectivement normaux à  $AF$ ,  $BF$ ,  $CF$  ont ces valeurs comme cosinus directeurs de la normale.

Unité: le centimètre.

Deux points sont à distinguer:  $F(x_F, y_F, z_F)$  et  $F'(x + fx_F, y + fy_F, z + fz_F)$  et pour  $AF$  par exemple deux plans normaux dont les équations sont écrites sous la forme normale ou de Hesse:

$$0,5x + 0,5y - 0,707z - p = 0 \quad (5)$$

où le terme absolu  $p$  est la distance de l'origine au plan; ce  $p$  varie de la quantité  $fL_A$ , composante suivant  $AF$  de l'erreur sur  $A$  (voir ci-dessus).

On a donc:  $0,5fx_F + 0,5fy_F - 0,707fz_F - fL_A = 0 \quad (6)$

et de même pour  $BF$  et  $CF$ . En tout on obtient trois équations à trois inconnues. Graphiquement, en appliquant les règles de la géométrie cotée, on construit les trois plans passant par  $F'$  après translations  $fL_A, fL_B, fL_C$ ; pour faciliter on considère  $F$  comme nouvelle origine d'un système  $x', y', z'$ .

Ce qui donne:  $0,5x' + 0,5y' - 0,707z' + 12,50 = 0 \quad (7)$

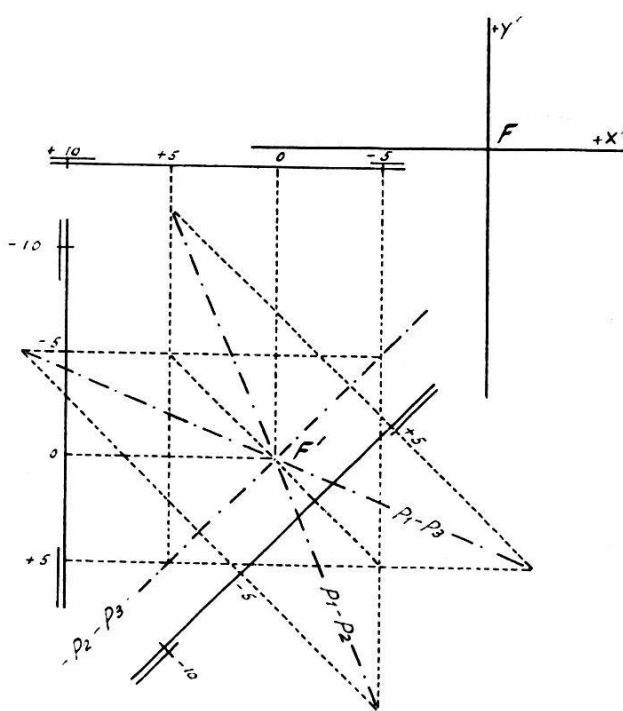


Fig. 2

Les horizontales de ce plan coupent à  $45^\circ$  les axes de coordonnées tandis que la ligne de plus grande pente est inclinée à  $45^\circ$ ; il en est de même pour l'inclinaison des plans normaux à  $BF$  et  $CF$ . Il en résulte que les intervalles entre deux horizontales, de cotes données, sont les mêmes pour les trois plans.

En d'autres termes l'équation (5) est générale pour les plans normaux à  $AF$ ; on exprime successivement que deux de ces plans passent

respectivement par  $F$  et  $F'$  en substituant aux coordonnées courantes celles de ces points, puis on forme une différence d'où l'équation (6) et enfin (7) si l'origine est en  $F$ . Les termes absolus sont donc les  $f_L$ ; le calcul graphique est d'une clarté aveuglante. Il y a trois plans cotés se coupant deux à deux suivant  $P_1-P_2$ ,  $P_1-P_3$ ,  $P_2-P_3$  (fig. 2). Le point  $F$  (0, 0, 0) est devenu  $F'$  (-10,0, -15,0, 0,0).  $FF' = \sqrt{10^2 + 15^2 + 0^2} = 18,03$ .

#### *Littérature*

- [1] *P. Gleinsvik*, Die Folgepunktbestimmung (Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, 1964, Nr. 6, p. 185).
- [2] *H. Wolf*, Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (Hamburg).
- [3] *Roussilhe*, Astronomie appliquée et géodésie (Paris).
- [4] *A. Ansermet*, Calculs basés sur des éléments non exempts d'erreurs (Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, 1962, N° 6).

## Mikrofilm zur Sicherung von Grundbuchakten

*A. Zahnd, dipl. Ing. ETH,  
Vermessungsamt des Kantons Bern*

#### *Zusammenfassung*

Wie in den Vermessungsverfahren, den Berechnungsmethoden und im Instrumentenbau findet auch auf andern Gebieten ein technischer Fortschritt statt, dessen wenn auch nicht direkte, so doch indirekte nutzbringende Anwendung in der Grundbuchvermessung ein stetes Bestreben der Aufsichtsbehörden ist. Der Mikrofilm bietet die Möglichkeit, die wertvollen Vermessungsdokumente zu sichern, wovon der Kanton Bern Gebrauch gemacht hat.

#### *Résumé*

Le progrès technique que nous connaissons des systèmes de mensuration, des méthodes de calcul et de la construction d'instruments se manifeste aussi dans d'autres domaines. Les autorités de surveillance tâchent de l'appliquer, lui aussi, aux besoins de la mensuration cadastrale. Le microfilm offre la possibilité d'assurer les documents du cadastre représentant une grande valeur, et le canton de Berne s'en est servi.

---

Die Grundbuchvermessung verkörpert große ideelle, wirtschaftliche und finanzielle Werte. Das Problem der Sicherung oder Versicherung ihrer Dokumente hat die Aufsichtsbehörden immer schon beschäftigt. Vermessungswerke können durch Brandkatastrophen, Krieg usw. zerstört werden. Eine gewöhnliche Versicherung auf Wiederherstellung ist