Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 62 (1964)

Heft: 6

Artikel: Die Folgepunktbestimmung

Autor: Gleinsvik, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-219209

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des Ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 6 · LXII. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Juni 1964

Die Folgepunktbestimmung

Von Paul Gleinsvik, Vollebekk (Norwegen)

Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist das Studium der Genauigkeit von Punkten, die nach der Methode von Leit- und Folgepunkt bestimmt werden. Insbesondere sollen die Auswirkungen von Fehlern in den Koordinaten der gegebenen Punkte auf Leit- und Folgepunkt untersucht werden. Die Studie ist ein Auszug aus der Lösung einer von der Abteilung für Kulturtechnik und Vermessung der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich im Jahre 1951 gestellten Preisaufgabe. Das Thema lautete: «Zur Bestimmung eines Neupunktes werden auf zwei Festpunkten die Parallaxwinkel zwischen dem gesuchten Punkt und einem in dessen Nähe liegenden, fehlerlos anzusehenden Punkt gemessen (Verfahren von Leit- und Folgepunkt). – Es ist die Genauigkeit der Lage des Neupunktes zu untersuchen, unter besonderer Berücksichtigung des Falles, daß die Festpunkte, auf denen Parallaxwinkel gemessen wurden, fehlerhaft sind.»

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz wird die Folgepunktbestimmung zum Gegenstand einer umfassenden Genauigkeitsuntersuchung gemacht, insbesondere in bezug auf die Einwirkung der Festpunktlagefehler. Vor allem interessiert hier die relative Genauigkeit des Folgepunktes im Verhältnis zu dem naheliegenden Leitpunkt. Die Untersuchung wird sowohl vom rein mathematischen sowie vom fehlertheoretischen Gesichtspunkt durchgeführt.

Als Hauptergebnis stellt sich heraus, daß die Verhältnisse bei der Folgepunktbestimmung sehr günstig liegen, was die relative Einwirkung der Festpunktlagefehler betrifft. In dieser Hinsicht ist die Folgepunktbestimmung viel günstiger gestellt als die gewöhnlichen Arten der trigonometrischen Punktbestimmung und um so günstiger, je kleiner der Abstand zwischen Leit- und Folgepunkt ist. Es wird nämlich nachgewiesen, daß nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der Lagefehler der Stationspunkte zum Folgepunkt übertragen wird, während andererseits die Koordinatenfehler des Leitpunktes sowohl in bezug auf Größe als auch auf Vorzeichen näherungsweise unverändert übertragen werden.

Résumé

Dans le présent article, la précision du point déduit par rapport au point directeur (procédé de Schreiber) fait l'objet d'une recherche appro-

fondie. Ce qui intéresse tout d'abord est la précision relative du point déduit par rapport au point directeur voisin. L'analyse en est faite tant au point de vue purement mathématique qu'à celui de la théorie des erreurs.

Le résultat le plus important en est que les conditions de détermination du point déduit se présentent très favorablement quant à l'influence relative de l'erreur de position des points fixes. A cet égard, cette forme de détermination des points en chaîne est plus favorable que la détermination trigonométrique ordinaire; elle est d'autant plus propice que la distance entre point directeur et point déduit est petite. Il est même prouvé qu'une partie relativement faible de l'erreur des points de station est transmise au point déduit, tandis que les erreurs de coordonnées du point directeur sont transmises approximativement inchangées en signe et en grandeur.

1. Einleitung

Die übliche Methode der Folgepunktbestimmung – die Anordnung der Beobachtungen und auch die rechnerische Festlegung des Folgepunktes – stammt von General Schreiber. Sie verfolgt hauptsächlich das Ziel, *die größtmögliche relative Genauigkeit hinsichtlich der Lage zwischen Leit- und Folgepunkt zu erlangen.*

Wir wollen zunächst die Schreibersche Folgepunktmethode auf Grund von [2] in Kürze rekapitulieren:

Die Methode kommt zur Anwendung, wenn benachbarte Punkte ungenügend oder gar nicht miteinander verbunden sind. Um in solchen Fällen eine Verminderung der gegenseitigen relativen Verschiebung der Punkte zu erreichen, ist folgendermaßen vorzugehen:

1. Einer von den Punkten der Gruppe (die in der Regel nur aus zwei Punkten bestehen wird) – der Leitpunkt – ist auf gewöhnliche Art als Netzpunkt zu beobachten und auszugleichen.

2. Die übrigen Punkte, welche als Folgepunkte bezeichnet werden, sind von denselben Standpunkten durch *unmittelbare* Messung der Parallaxe, das heißt des überwiegend kleinen Winkels zwischen dem Leit- und Folgepunkt, anzuschneiden.

3. Bei der Berechnung der Folgepunkte sind die Parallaxen unmittelbar zu verwenden. Sind zum Beispiel sämtliche Richtungen einer Station in einem Richtungssatz vereinigt, so ist bei der Berechnung der Folgepunkte als Wert der Parallaxe $\alpha = r_F - r_L$ zu benutzen, wobei r_F und r_L die unmittelbaren Richtungswerte sind, *ohne Rücksicht darauf, ob r_L durch die vorausgehende Berechnung des Leitpunktes eine etwaige Korrektur erfahren hat.*

2. Die Genauigkeit der Folgepunktbestimmung

Im allgemeinen gilt, daß die Genauigkeit einer Punktbestimmung nicht nur von den geometrischen Verhältnissen und der Genauigkeit der neupunktbestimmenden Beobachtungen abhängt, sondern auch von der Genauigkeit der Festpunkte, auf welchen die Punktbestimmung beruht. In der Regel sind die Festpunkte mit Koordinatenfehlern behaftet, wel-

che durch die rechnerische Festlegung der Neupunkte auf die letzteren übertragen werden. Dieses Übertragen kann mehr oder weniger günstig sein, abhängig von dem «Mechanismus» der Neupunktbestimmung, und bietet im allgemeinen einen nicht zu unterschätzenden Beitrag zur totalen Lageunsicherheit der Neupunkte.

Die üblichen Genauigkeitsmaße, welche nur die Fehler der neupunktbestimmenden Beobachtungen berücksichtigen, geben folglich nur ein partielles Bild der tatsächlichen Genauigkeit.

2.1. Die rechnerische Bestimmung des Folgepunktes

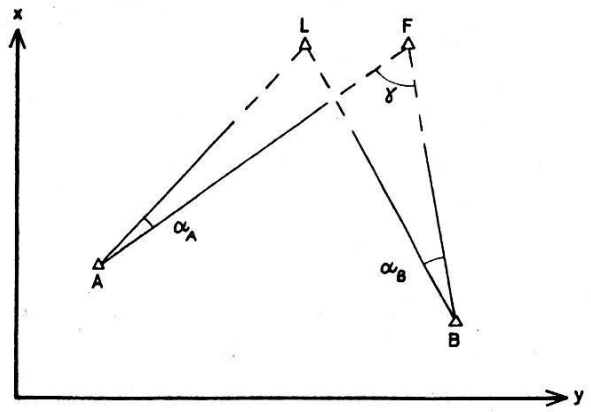

Fig. 1
L = Leitpunkt, F = Folgepunkt

Nachstehend wollen wir die funktionellen Beziehungen zwischen den Koordinaten des Folgepunktes einerseits und den beobachteten Parallaxwinkeln α sowie den Koordinaten der Festpunkte A, B und L andererseits ableiten, was auf Grund der Fehlergleichungen der Parallaxwinkel erreicht wird. Wir gehen aus von den provisorischen Koordinatenwerten für den Folgepunkt x° und y°. Die dazugehörigen provisorischen Richtungswinkel sind $\varphi_{AF}{}^\circ$ und $\varphi_{BF}{}^\circ$. Damit nehmen die Beobachtungsgleichungen folgende Form an (Überstreichen bezeichnet definitive Werte):

$$\begin{aligned} \alpha_A + V_A &= \bar{\varphi}_{AF} - \bar{\varphi}_{AL} = \varphi_{AF}{}^\circ + \Delta\varphi_{AF} - \bar{\varphi}_{AL} = \\ &= a_{AF}\, x_F + b_{AF}\, y_F + \varphi_{AF}{}^\circ - \bar{\varphi}_{AL} \\ \alpha_B + V_B &= \bar{\varphi}_{BF} - \bar{\varphi}_{BL} = \varphi_{BF}{}^\circ + \Delta\varphi_{BF} - \bar{\varphi}_{BL} = \\ &= a_{BF}\, x_F + b_{BF}\, y_F + \varphi_{BF}{}^\circ - \bar{\varphi}_{BL}, \end{aligned}$$

wo a und b die Richtungskoeffizienten sind, während x_F und y_F für die «Verbesserungen» der provisorischen Koordinaten stehen. Das Fehlergleichungssystem wird somit gleich:

$$\begin{aligned} V_A &= a_{AF}\, x_F + b_{AF}\, y_F + \overbrace{\varphi_{AF}{}^\circ - \bar{\varphi}_{AL} - \alpha_A}^{l_A} \\ V_B &= a_{BF}\, x_F + b_{BF}\, y_F + \underbrace{\varphi_{BF}{}^\circ - \bar{\varphi}_{BL} - \alpha_B}_{l_B} \end{aligned} \qquad (1)$$

Da hier keine überschüssigen Bestimmungen vorliegen, werden V_A und V_B beide gleich null, und es ergibt sich für die Koordinatenunbekannten:

$$x_F = \frac{b_{AF}\, l_B - b_{BF}\, l_A}{a_{AF}\, b_{BF} - a_{BF}\, b_{AF}} = \frac{b_{AF}\, l_B - b_{BF}\, l_A}{D}$$

$$y_F = \qquad\qquad = \div \frac{a_{AF}\, l_B - a_{BF}\, l_A}{D}, \tag{2}$$

wo die Determinante D gleich $\div \frac{\varrho^2}{S_{AF}\, S_{BF}} \sin\gamma$ ist (γ ist der Schnittwinkel im Folgepunkt F).

2.2. Der Einfluß der Beobachtungsfehler auf die Genauigkeit des Folgepunktes

Dieser Einfluß – als mittlerer Punktfehler ausgedrückt – ist bekanntlich gegeben durch:

$$M = \frac{m_\alpha}{\varrho} \frac{\sqrt{S_{AF}^2 + S_{BF}^2}}{\sin\gamma}, \tag{3}$$

wobei m_α der mittlere Beobachtungsfehler der Parallaxwinkel ist. Bei dem Schreiberschen Folgepunktverfahren wird großes Gewicht darauf gelegt, den relativen Wert von m_α möglichst klein zu halten, weil es hier in erster Linie auf die relative Genauigkeit des Folgepunktes im Verhältnis zum Leitpunkt ankommt.

2.3. Der Einfluß der Lagefehler der Festpunkte auf die Genauigkeit des Folgepunktes

Die Gleichungen (2) stellen die Koordinaten des Folgepunktes als explizite Funktionen der Absolutglieder der Fehlergleichungen dar. Diese Absolutglieder sind ihrerseits Funktionen der Koordinaten der Festpunkte. Wir haben nämlich nach (1):

$$\begin{aligned} l_A &= \varphi_{AF}{}^\circ - \bar{\varphi}_{AL} - \alpha_A \\ l_B &= \varphi_{BF}{}^\circ - \bar{\varphi}_{BL} - \alpha_B, \end{aligned} \tag{4}$$

wo also die Koordinaten der Festpunkte A, B und L in den Richtungswinkeln φ° und $\bar{\varphi}$ enthalten sind. Sind diese Festpunkte fehlerhaft, so erleidet der Neupunkt eine Verschiebung, welche sich durch Differentiation von (2) ergibt.

2.3.1. Das Übertragen der Lagefehler der Stationspunkte A und B

Wir bezeichnen die Koordinatenfehler der Stationspunkte mit fx_A, fy_A, fx_B und fy_B. Die entsprechende Lageverfälschung des Folgepunktes ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
fx_F &= \frac{\partial x_F}{\partial x_A} fx_A + \frac{\partial x_F}{\partial y_A} fy_A + \frac{\partial x_F}{\partial x_B} fx_B + \frac{\partial x_F}{\partial y_B} fy_B \\
fy_F &= \frac{\partial y_F}{\partial x_A} fx_A + \frac{\partial y_F}{\partial y_A} fy_A + \frac{\partial y_F}{\partial x_B} fx_B + \frac{\partial y_F}{\partial y_B} fy_B
\end{aligned} \tag{5}
$$

Die hier auftretenden Differentialquotienten erhalten wir durch eine Kombination von (2) und (4), wobei zu berücksichtigen ist, daß:

$$
\frac{\partial l_A}{\partial x_A} = \frac{\partial l_A}{\partial \varphi_{AF}} \frac{\partial \varphi_{AF}}{\partial x_A} - \frac{\partial l_A}{\partial \varphi_{AL}} \frac{\partial \varphi_{AL}}{\partial x_A} = - a_{AF} + a_{AL}
$$

$$
\frac{\partial l_A}{\partial y_A} = \frac{\partial l_A}{\partial \varphi_{AF}} \frac{\partial \varphi_{AF}}{\partial y_A} - \frac{\partial l_A}{\partial \varphi_{AL}} \frac{\partial \varphi_{AL}}{\partial y_A} = - b_{AF} + b_{AL}
$$

und entsprechend:

$$
\frac{\partial l_B}{\partial x_B} = - a_{BF} + a_{BL} \quad \text{und} \quad \frac{\partial l_B}{\partial y_B} = - b_{BF} + b_{BL}
$$

Damit ergeben sich für die Differentialquotienten folgende Beziehungen:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial x_F}{\partial x_A} &= \frac{b_{BF}}{D} (a_{AF} - a_{AL}) = \frac{\cos\varphi_{BF} (\sin\varphi_{AF} - n_A \sin\varphi_{AL})}{\sin\gamma} \\
\frac{\partial x_F}{\partial y_A} &= \frac{b_{BF}}{D} (b_{AF} - b_{AL}) = - \frac{\cos\varphi_{BF} (\cos\varphi_{AF} - n_A \cos\varphi_{AL})}{\sin\gamma} \\
\frac{\partial x_F}{\partial x_B} &= - \frac{b_{AF}}{D} (a_{BF} - a_{BL}) = - \frac{\cos\varphi_{AF} (\sin\varphi_{BF} - n_B \sin\varphi_{BL})}{\sin\gamma} \\
\frac{\partial x_F}{\partial y_B} &= - \frac{b_{AF}}{D} (b_{BF} - b_{BL}) = \frac{\cos\varphi_{AF} (\cos\varphi_{BF} - n_B \cos\varphi_{BL})}{\sin\gamma} \\
\frac{\partial y_F}{\partial x_A} &= - \frac{a_{BF}}{D} (a_{AF} - a_{AL}) = \frac{\sin\varphi_{BF} (\sin\varphi_{AF} - n_A \sin\varphi_{AL})}{\sin\gamma} \\
\frac{\partial y_F}{\partial y_A} &= - \frac{a_{BF}}{D} (b_{AF} - b_{AL}) = - \frac{\sin\varphi_{BF} (\cos\varphi_{AF} - n_A \cos\varphi_{AL})}{\sin\gamma} \\
\frac{\partial y_F}{\partial x_B} &= \frac{a_{AF}}{D} (a_{BF} - a_{BL}) = - \frac{\sin\varphi_{AF} (\sin\varphi_{BF} - n_B \sin\varphi_{BL})}{\sin\gamma} \\
\frac{\partial y_F}{\partial y_B} &= \frac{a_{AF}}{D} (b_{BF} - b_{BL}) = \frac{\sin\varphi_{AF} (\cos\varphi_{BF} - n_B \cos\varphi_{BL})}{\sin\gamma}
\end{aligned}
\right\} \tag{6}
$$

wobei wir die Bezeichnungen $n_A = \frac{S_{AF}}{S_{AL}}$ und $n_B = \frac{S_{BF}}{S_{BL}}$ eingeführt haben.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Differentialquotienten (6) bei der Folgepunktbestimmung kleine Werte annehmen. Es sind in diesem Falle nämlich $n_A \approx n_B \approx 1$, und die Unterschiede zwischen φ_{AF} und φ_{AL} $(= \alpha_A)$ beziehungsweise φ_{BF} und φ_{BL} $(= \alpha_B)$ sind auch klein. Das bedeutet aber, daß *nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der Koordinatenfehler der Stationspunkte zum Folgepunkt übertragen werden. Die Übertragung dieser Lagefehler ist um so günstiger, je kleiner der Abstand zwischen Leit- und Folgepunkt ist, weil sämtliche Differentialquotienten (6) den Grenzwert Null haben, wenn* $S_{FL} \to 0$. *Weiter ist ersichtlich, daß das Übertragen der Lagefehler nur von der Konfiguration und nicht von der Größe der Figur abhängt.*

Die aus (5) resultierende lineare Verschiebung des Folgepunktes ist gegeben durch:

$$ds^2 = fx_F^2 + fy_F^2$$

Für den Spezialfall, daß die beiden Parallaxwinkel gleich sind sowohl in bezug auf Größe als auch auf Vorzeichen, läßt sich eindeutig zeigen, daß

$$ds = \sin\alpha \sqrt{R},$$

wobei R ausschließlich eine Funktion der Konfiguration des Festpunktdreiecks ABL und der Lagefehler der Festpunkte A und B ist. Das bedeutet aber:

Die lineare Verschiebung des Folgepunktes infolge der Lagefehler der Stationspunkte A und B ist in diesem Falle proportional dem Sinus der Parallaxwinkel.

2.3.2. Das Übertragen des Lagefehlers des Leitpunktes

Wir nennen die Komponenten bei der Verschiebung des Folgepunktes, welche durch den Lagefehler des Leitpunktes verursacht wird, fx_F' und fy_F'. Diese Größen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} fx_F' &= \frac{\partial x_F}{\partial x_L} fx_L + \frac{\partial x_F}{\partial y_L} fy_L \\ fy_F' &= \frac{\partial y_F}{\partial y_L} fx_L + \frac{\partial y_F}{\partial y_L} fy_L \end{aligned} \tag{7}$$

Wir kehren zu den Gleichungen (2) und (4) zurück und erhalten für die in (7) auftretenden Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_F}{\partial x_L} &= \frac{1}{D}(b_{BF}\, a_{AL} - b_{AF}\, a_{BL}) = \\ &= \frac{n_A \cos\varphi_{BF} \sin\varphi_{AL} - n_B \cos\varphi_{AF} \sin\varphi_{BL}}{\sin\gamma} \\ \frac{\partial x_F}{\partial y_L} &= \frac{1}{D}(b_{BF}\, b_{AL} - b_{AF}\, b_{BL}) = \\ &= -\frac{n_A \cos\varphi_{BF} \cos\varphi_{AL} - n_B \cos\varphi_{AF} \cos\varphi_{BL}}{\sin\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\frac{\partial y_F}{\partial x_L} = \frac{1}{D}(-a_{BF}\,a_{AL} + a_{AF}\,a_{BL}) =$$

$$= \frac{n_A \sin\varphi_{BF} \sin\varphi_{AL} - n_B \sin\varphi_{AF} \sin\varphi_{BL}}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\partial y_F}{\partial y_L} = \frac{1}{D}(-a_{BF}\,b_{AL} + a_{AF}\,b_{BL}) =$$

$$= -\frac{n_A \sin\varphi_{BF} \cos\varphi_{AL} - n_B \sin\varphi_{AF} \cos\varphi_{BL}}{\sin\gamma}$$

Um Anhaltspunkte über den «Mechanismus» des Übertragens des Leitpunktfehlers zum Folgepunkt zu gewinnen, wollen wir den Spezialfall mit $\alpha_A = \alpha_B = \alpha$ und $n_A = n_B = n$ näher untersuchen:

$$\frac{\partial x_F}{\partial x_L} = n\,\frac{\cos\varphi_{BF} \sin(\varphi_{AF} - \alpha) - \cos\varphi_{AF} \sin(\varphi_{BF} - \alpha)}{\sin\gamma} = n\cos\alpha$$

$$\frac{\partial x_F}{\partial y_L} = -n\,\frac{\cos\varphi_{BF} \cos(\varphi_{AF} - \alpha) - \cos\varphi_{AF} \cos(\varphi_{BF} - \alpha)}{\sin\gamma} = -n\sin\alpha$$

Das heißt: $\underline{f_{x_F}' = n\cos\alpha\, f_{x_L} - n\sin\alpha\, f_{y_L}}$

In derselben Weise finden wir:

$$\frac{\partial y_F}{\partial x_L} = -n\sin\alpha \quad \text{und} \quad \frac{\partial y_F}{\partial y_L} = n\cos\alpha$$

Das heißt: $\underline{f_{y_F}' = -n\sin\alpha\, f_{x_L} + n\cos\alpha\, f_{y_L}}$

Bei der Folgepunktbestimmung sind die Winkel α klein und $n \approx 1$. Das bedeutet aber, daß

$$f_{x_F}' \approx f_{x_L} \text{ und } f_{y_F}' \approx f_{y_L}$$

Das heißt: *Die Koordinatenfehler des Leitpunktes werden sowohl in bezug auf Größe als auch auf Vorzeichen näherungsweise unverändert zum Folgepunkt übertragen.*

Dieser Satz entspricht den tatsächlichen Verhältnissen um so besser, je kleiner der Abstand zwischen Leit- und Folgepunkt ist.

Die Fortpflanzung des Lagefehlers des Leitpunktes zum Folgepunkt geschieht also vom Gesichtspunkt der relativen Genauigkeit aus in einer vorteilhaften Weise. Denn wie wir schon mehrmals betont haben, stellt sich bei der Folgepunktbestimmung in erster Linie die Frage nach der relativen Genauigkeit zwischen Leit- und Folgepunkt.

2.4. *Extremale Auswirkungen der Lagefehler der Stationspunkte auf den Folgepunkt*

Aus der Gleichung der linearen Verschiebung des Folgepunktes:

$$ds^2 = fx_F^2 + fy_F^2 = \left(\frac{\partial x_F}{\partial x_A} fx_A + \frac{\partial x_F}{\partial y_A} fy_A + \frac{\partial x_F}{\partial x_B} fx_B + \frac{\partial x_F}{\partial y_B} fy_B\right)^2 + \left(\frac{\partial y_F}{\partial x_A} fx_A + \frac{\partial y_F}{\partial y_A} fy_A + \frac{\partial y_F}{\partial x_B} fx_B + \frac{\partial y_F}{\partial y_B} fy_B\right)^2 \tag{9}$$

geht hervor, daß für gegebene Lagefehler der Stationspunkte:

$$ds_A = \sqrt{fx_A^2 + fy_A^2} \quad \text{und} \quad ds_B = \sqrt{fx_B^2 + fy_B^2} \tag{10}$$

die Verschiebung ds von dem Verhältnis $fy : fx$, das heißt von den Richtungen der Größen ds_A und ds_B, abhängt. Wir fragen nun nach den Richtungen ψ_A und ψ_B derjenigen Lagefehler, welche extremale Verschiebungen des Folgepunktes verursachen. Aus (9) und (10) ergeben sich die folgenden zwei Extremalbedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial ds^2}{\partial x_A} &= 2\left(\frac{\partial x_F}{\partial x_A} fx_A + \frac{\partial x_F}{\partial y_A} fy_A + \frac{\partial x_F}{\partial x_B} fx_B + \frac{\partial x_F}{\partial y_B} fy_B\right)\left(\frac{\partial x_F}{\partial x_A} - \frac{\partial x_F}{\partial y_A}\frac{fx_A}{fy_A}\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{\partial y_F}{\partial x_A} fx_A + \frac{\partial y_F}{\partial y_A} fy_A + \frac{\partial y_F}{\partial x_B} fx_B + \frac{\partial y_F}{\partial y_B} fy_B\right)\left(\frac{\partial y_F}{\partial x_A} - \frac{\partial y_F}{\partial y_A}\frac{fx_A}{fy_A}\right) = 0 \\
\frac{\partial ds^2}{\partial x_B} &= 2\left(\frac{\partial x_F}{\partial x_A} fx_A + \frac{\partial x_F}{\partial y_A} fy_A + \frac{\partial x_F}{\partial x_B} fx_B + \frac{\partial x_F}{\partial y_B} fy_B\right)\left(\frac{\partial x_F}{\partial x_B} - \frac{\partial x_F}{\partial y_B}\frac{fx_B}{fy_B}\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{\partial y_F}{\partial x_A} fx_A + \frac{\partial y_F}{\partial y_A} fy_A + \frac{\partial y_F}{\partial x_B} fx_B + \frac{\partial y_F}{\partial y_B} fy_B\right)\left(\frac{\partial y_F}{\partial x_B} - \frac{\partial y_F}{\partial y_B}\frac{fx_B}{fy_B}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

wenn wir fx_A und fx_B als freie Variable auffassen.

Infolge der folgenden besonderen Eigenschaften der hier auftretenden Differentialquotienten, wie sie sich aus (6) ableiten:

$$\frac{\partial x_F}{\partial y_A} : \frac{\partial x_F}{\partial x_A} = \frac{\partial y_F}{\partial y_A} : \frac{\partial y_F}{\partial x_A} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_F}{\partial y_B} : \frac{\partial x_F}{\partial x_B} = \frac{\partial y_F}{\partial y_B} : \frac{\partial y_F}{\partial x_B},$$

hat (11) einfache Lösungen. Aus der ersten Gleichung ergibt sich (beim Nullsetzen der zwei rechtstehenden Klammerausdrücke):

$$\left(\frac{fy_A}{fx_A}\right)_{\max} = \operatorname{tg}\psi_{A\max} = \frac{\partial x_F}{\partial y_A} : \frac{\partial x_F}{\partial x_A} = \frac{\partial y_F}{\partial y_A} : \frac{\partial y_F}{\partial x_A} = -\frac{\cos\varphi_{AF} - n_A\cos\varphi_{AL}}{\sin\varphi_{AF} - n_A\sin\varphi_{AL}}$$

In der gleichen Weise ergibt sich aus der zweiten Gleichung:

$$\left(\frac{fy_B}{fx_B}\right)_{\max} = \operatorname{tg}\psi_{B\max} = \frac{\partial x_F}{\partial y_B} : \frac{\partial x_F}{\partial x_B} = \frac{\partial y_F}{\partial y_B} : \frac{\partial y_F}{\partial x_B} = -\frac{\cos\varphi_{BF} - n_B\cos\varphi_{BL}}{\sin\varphi_{BF} - n_B\sin\varphi_{BL}}$$

Beide Gleichungen (11) liefern übereinstimmend die folgenden Minimallösungen (beim Nullsetzen der in jeder Gleichung linksstehenden zwei Klammerausdrücke):

$$\left(\frac{fy_A}{fx_A}\right)_{\min} = \operatorname{tg}\psi_{A_{\min}} = -\frac{\partial x_F}{\partial x_A} : \frac{\partial x_F}{\partial y_A} \text{ und } \left(\frac{fy_B}{fx_B}\right)_{\min} = \operatorname{tg}\psi_{B_{\min}} = -\frac{\partial x_F}{\partial x_B} : \frac{\partial x_F}{\partial y_B}$$

Aus $\operatorname{tg}\psi_{A_{\max}} \cdot \operatorname{tg}\psi_{A_{\min}} = -1$ und $\operatorname{tg}\psi_{B_{\max}} \cdot \operatorname{tg}\psi_{B_{\min}} = -1$

folgt, daß *die zwei Extremalrichtungen senkrecht aufeinander stehen.*

Für die Extremalwerte der linearen Verschiebung des Folgepunktes ergeben sich:

$$ds_{\min} = 0 \text{ und } ds_{\max} = \frac{1}{\sin\gamma^2}\left\{q_1\, ds_A{}^2 + q_2\, ds_B{}^2 + 2\cos\gamma\sqrt{q_1\, q_2}\, ds_A\, ds_B\right\},$$

wobei $q_1 = 1 + n_A{}^2 - 2\, n_A \cos\alpha_A$ und $q_2 = 1 + n_B{}^2 - 2\, n_B \cos\alpha_B$ (in dem Ausdruck für $ds_{\max}$ ist das Quadratwurzelglied immer positiv zu nehmen).

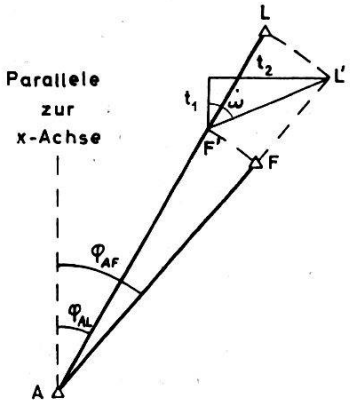

Fig. 2*

Die Extremalrichtungen lassen sich in einfacher Weise geometrisch interpretieren. In Figur 2 ist

$$AF = S_{AF} = AF \text{ und } AL = S_{AL} = AL'.$$

Der Figur ist zu entnehmen:

$$t_1 = S_{AL} \sin\varphi_{AF} - S_{AF} \sin\varphi_{AL}$$

$$t_2 = S_{AL} \cos\varphi_{AF} - S_{AF} \cos\varphi_{AL}$$

Das heißt: $$\operatorname{tg}\omega = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin\varphi_{AF} - n_A \sin\varphi_{AL}}{\cos\varphi_{AF} - n_A \cos\varphi_{AL}} = \operatorname{tg}\psi_{A_{\min}}$$

Wir haben damit gezeigt, daß *die Minimalrichtung mit F' L' zusammenfällt.* Diese Minimalrichtung ist übrigens identisch mit der Tangente

* *Berichtigung:* In der Figur 2 sind die Größen t_1 und t_2 gegeneinder auszutauschen.

im Punkte A des Kreises durch A, F und L. Bei einer Verschiebung des Punktes A auf diesem Kreis entsteht nämlich keine Verzerrung des Winkels α_A, das heißt, solange A sich auf diesem Kreise befindet, werden alle von A ausgehenden Linien mit dem Richtungswinkel $\varphi_{AL} + \alpha_A$ sich immer in demselben Punkt F schneiden. Folglich muß die Minimalrichtung mit der Tangente dieses Kreises im Punkt A zusammenfallen.

Aus Figur 2 ist auch leicht ersichtlich

$$(S_{AL} \sin\varphi_{AF} - S_{AF} \sin\varphi_{AL})^2 + (S_{AL} \cos\varphi_{AF} - S_{AF} \cos\varphi_{AL})^2 = \\ = S_{F'L'}^2 = S_{FL}^2, \tag{12}$$

eine Beziehung, die wir bei einer späteren Gelegenheit noch brauchen werden.

2.5. Extremale Auswirkungen des Lagefehlers des Leitpunktes auf dem Folgepunkt

Wir fragen nun nach der Richtung eines gegebenen Lagefehlers des Leitpunktes, welche extremale Verschiebungen des Folgepunktes zur Folge hat, wobei es sich hier um *relative Verschiebungen* im Verhältnis zum Leitpunkt handelt. Wir gehen dabei zu relativen Koordinatenfehlern des Folgepunktes über, welche mit fx_F'' und fy_F'' bezeichnet werden:

$$fx_F'' = fx_F' - fx_L = \left(\frac{\partial x_F}{\partial x_L} - 1\right) fx_L + \frac{\partial x_F}{\partial y_L} fy_L = A_1 fx_L + B_1 fy_L$$

$$fy_F'' = fy_F' - fy_L = \frac{\partial y_F}{\partial x_L} fx_L + \left(\frac{\partial y_F}{\partial y_L} - 1\right) fy_L = A_2 fx_L + B_2 fy_L$$

Die relative Verschiebung des Folgepunktes ist gegeben durch:

$$ds^2 = fx_F''^2 + fy_F''^2$$

Gesucht sind die Extremalwerte von ds unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $fx_L^2 + fy_L^2 = ds_L^2$, wobei ds_L eine Konstante ist. Es ergibt sich die folgende Extremalbedingungsgleichung:

$$(A_1 B_1 + A_2 B_2) \left(\frac{fx_L}{fy_L}\right)^2 + (B_1^2 + B_2^2 - A_1^2 - A_2^2) \frac{fx_L}{fy_L} - \\ - (A_1 B_1 + A_2 B_2) = 0$$

Die Verhältnisse sind also diesmal viel komplizierter als bei dem entsprechenden Problem der Lagefehler der Stationspunkte. Wir wollen der Sache nicht weiter nachgehen; wir begnügen uns lediglich mit der Feststellung, daß es auch hier zwei Extremalrichtungen gibt. Diese stehen aber nicht senkrecht aufeinander und lassen sich auch nicht unmittelbar geometrisch interpretieren. Der Minimalwert ist verschieden von Null.

3. *Zahlenbeispiel*

Hier sollen die abgeleiteten Formeln, welche die Auswirkung der Lagefehler der Festpunkte auf die Lage des Folgepunktes mathematisch zum Ausdruck bringen, an ein paar Beispielen demonstriert werden.

Folgepunktfall $\alpha_A = \alpha_B = 5°$ *Normalfall* $\alpha_A = \alpha_B = 30°$

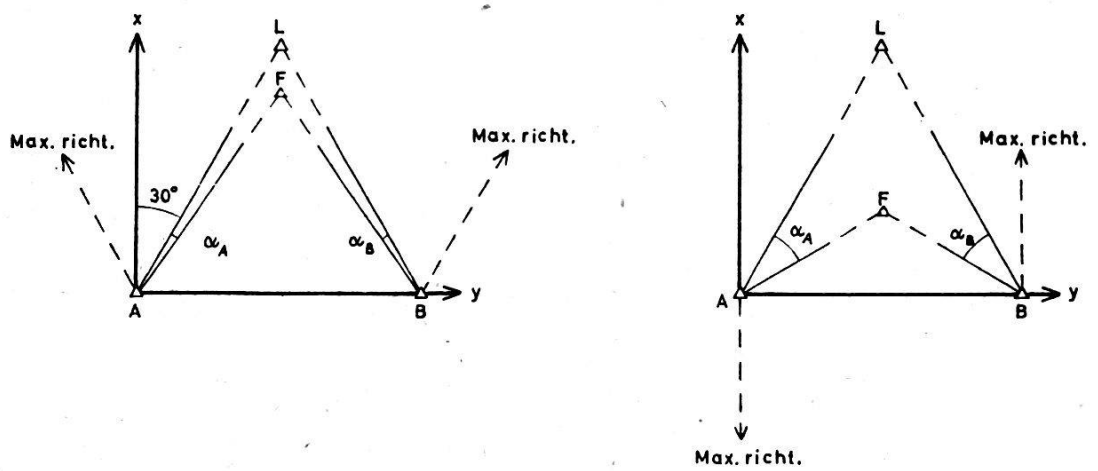

Fig. 3

In Figur 3 bilden die drei Festpunkte A, B und L ein gleichseitiges Dreieck. Einfachheitshalber lassen wir die Seite AB mit der Y-Achse zusammenfallen. Die Parallaxwinkel sind gleich groß, gleich 5° im Folgepunktfall und 30° im Normalfall, womit der Neupunkt in den Schwerpunkt des Dreiecks ABL fällt. Sämtliche Lagefehler der Festpunkte A, B und L werden gleich groß und für unser Beispiel auf 10 cm festgelegt. Gesucht wird die maximale Auswirkung dieser Lagefehler auf F. Alle Größen, die für die Übertragung der Lagefehler des Festpunktes maßgebend sind, sind in Tabelle 1 und 2 zusammengestellt.

Tabelle 1: Das Übertragen der Lagefehler der Punkte A und B

	$\frac{\partial x_F}{\partial x_A}$	$\frac{\partial x_F}{\partial y_A}$	$\frac{\partial x_F}{\partial x_B}$	$\frac{\partial x_F}{\partial y_B}$	$\frac{\partial y_F}{\partial x_A}$	$\frac{\partial y_F}{\partial y_A}$
Folgepunktfall	+0,120	−0,056	+0,120	+0,056	−0,084	+0,039
Normalfall	+0,333	0	+0,333	0	−0,577	0
	$\frac{\partial y_F}{\partial x_B}$	$\frac{\partial y_F}{\partial y_B}$	ds_{max}	$\psi_{A_{max}}$	$\psi_{B_{max}}$	
Folgepunktfall	+0,084	+0,039	2,65 cm	335°	25°	
Normalfall	+0,577	0	11,55 cm	180°	0	

Tabelle 2: Das Übertragen des Lagefehlers des Punktes L

	$\frac{\partial x_F}{\partial x_L}$	$\frac{\partial x_F}{\partial y_L}$	$\frac{\partial y_F}{\partial x_L}$	$\frac{\partial y_F}{\partial y_L}$	ds_{max}	$\psi_{L_{max}}$
Folgepunktfall	+0,760	0	0	+0,922	2,40 cm	0°
Normalfall	+0,333	0	0	+1,000	6,67 cm	0°

Beim Übertragen des Lagefehlers des Punktes L bezieht sich ds_{max} auf die *relative* Verschiebung von F im Verhältnis zu L.

Aus diesen zwei Beispielen geht deutlich hervor, wie günstig die Folgepunktbestimmung bezüglich der Einwirkung der Festpunktlagefehler gestellt ist. *Zum Beispiel hat sich im Normalfall die maximale Verschiebung des Punktes F infolge der Lagefehler der Stationspunkte A und B im Vergleich zum Folgepunktfall mehr als vervierfacht.*

Die graphische Darstellung in der Figur 4 gibt weitere Aufschlüsse über die Genauigkeit der Folgepunktbestimmung.

Der Figur 4 sind die maximalen Verschiebungsbeträge des Punktes F für alle Placierungen auf der Senkrechten von L auf die Seite AB zu entnehmen. Die Y-Achse fällt mit dieser Senkrechten zusammen ($LF' = F'F'' = LF'''$). Die Gradzahlen, welche längs der Y-Achse abgetragen sind, beziehen sich auf den Schnittwinkel γ.

Außerdem ist in der Figur 4 der mittlere Punktfehler infolge der Beobachtungsfehler der Parallaxwinkel nach (3) dargestellt. *Diese Kurve gibt jedoch nur relative Auskünfte über die Größe des mittleren Punktfehlers* (für $\gamma = 90°$ ist der Wert $2\sqrt{2}$ cm willkürlich gewählt).

Der Figur 4 ist zu entnehmen, daß die auftretenden maximalen Fehler in erster Linie von der Größe der Parallaxwinkel sowie der «Güte» des Schnittwinkels γ abhängen.

Letzteres bedingt eine gewisse Verwandtschaft zwischen der Kurve des mittleren Punktfehlers einerseits und den beiden Kurven, welche das Übertragen der Festpunktlagefehler zum Ausdruck bringen, andererseits. *Es liegt daher nahe, den allgemeinen Schluß zu ziehen, daß für die Übertragung der Lagefehler der Festpunkte bei der trigonometrischen Punktbestimmung die Güte der Punktbestimmung von ausschlaggebender Bedeutung ist.*

Ferner bemerken wir, daß für gleiche Werte des Schnittwinkels γ die Verschiebungen größer sind, wenn F sich außerhalb des Dreiecks ABL befindet, das heißt, *Interpolation wirkt günstiger als Extrapolation.*

Übrigens wird durch Figur 4 der schon vorher gewonnene günstige Eindruck bezüglich der Einflüsse der Festpunktlagefehler bei der Folgepunktbestimmung bestätigt.

4. Das Übertragen der Lagefehler der Festpunkte in fehlertheoretischer Sicht

Bei der vorhergehenden Behandlung dieses Problems haben wir uns ausschließlich rein mathematischer Mittel bedient, ohne von der Fehler-

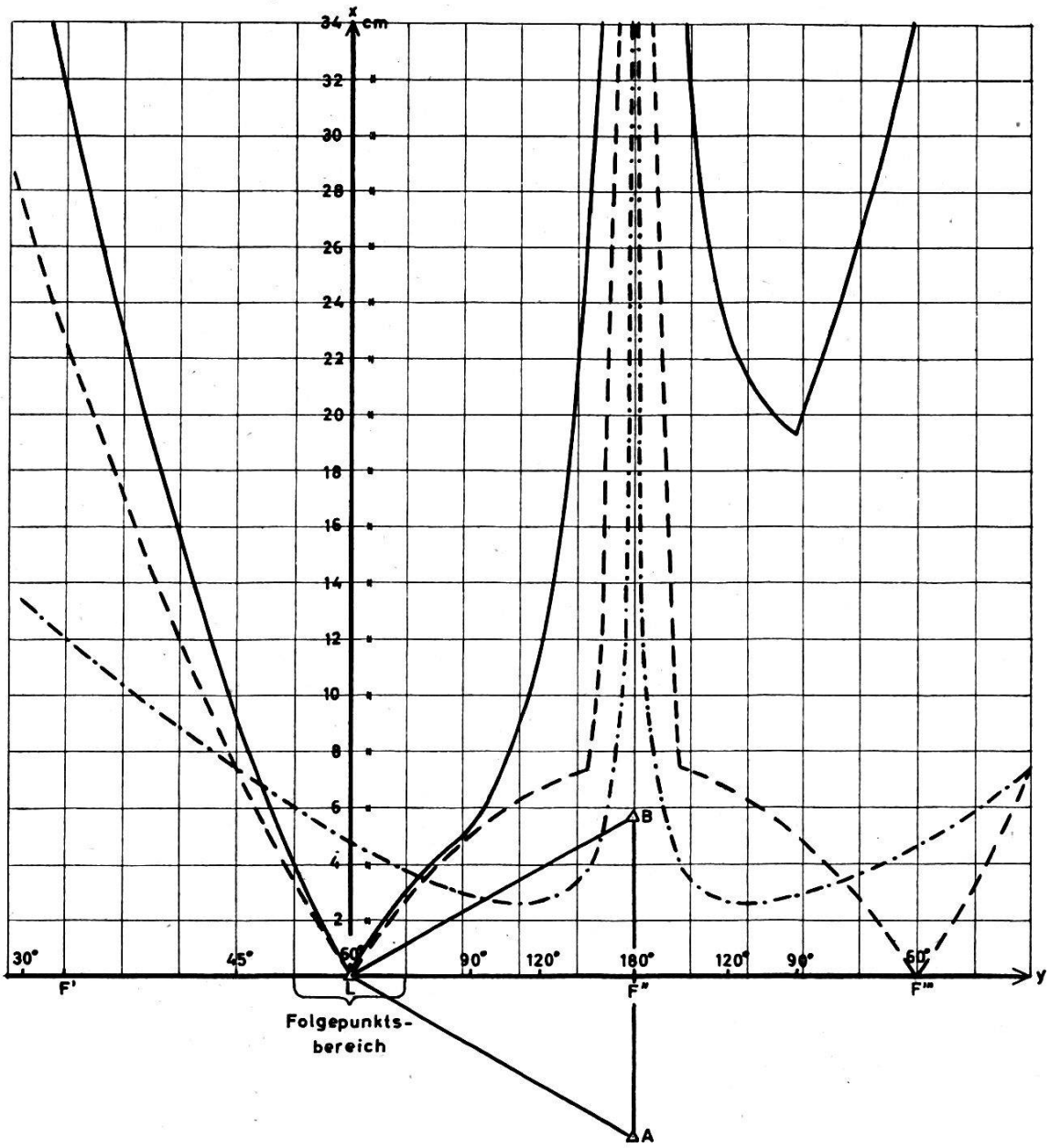

Fig. 4

——— Kurve der maximalen Verschiebung des Punktes F, verursacht durch die Lagefehler der Stationspunkte A und B, die beide gleich 10 cm angenommen werden

– – – Kurve der maximalen *relativen* Verschiebung des Punktes F infolge eines Lagefehlers des Punktes L im Betrage von 10 cm

–·–·– Kurve des mittleren Punktfehlers als Folge der Beobachtungsfehler der Parallaxwinkel

theorie Gebrauch zu machen. Weil die Verwendung der dadurch entwickelten Formeln die Kenntnis der Koordinatenfehler der Festpunkte voraussetzt, was ja in der Praxis nicht der Fall ist, haben wir uns hauptsächlich mit den extremalen Auswirkungen gegebener Lagefehler beschäftigt. Es ist selbstverständlich von großem Interesse, zu wissen, mit welchen größtmöglichen Fehlern wir auf Grund gegebener Lagefehler der

Festpunkte zu rechnen haben. Wir müssen trotzdem darüber im klaren sein, daß die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Maximalfehlers, insbesondere wenn sein Entstehen auf dem Zusammentreffen von zwei oder mehr Extremalrichtungen der Festpunktlagefehler beruht, sehr klein ist. (Die vorhergehende Untersuchung über die extremalen Auswirkungen gegebener Lagefehler ist daher in erster Linie von Wert für die Beurteilung des Einflusses der Konfiguration auf das Übertragen der Lagefehler der Festpunkte.)

In der Fehlertheorie dagegen operieren wir statt mit numerischen Werten der einzelnen Fehler gewissermaßen mit repräsentativen Fehlergrößen, für deren Auftreten eine bestimmte mathematische Wahrscheinlichkeit besteht. Sie bietet uns im Vergleich zu der mathematischen Methode ein verfeinertes Mittel bei den Fehleruntersuchungen. Allerdings stoßen wir bei der Verwendung der Fehlertheorie in unserem Falle auf die komplizierende Tatsache, daß die Koordinatenfehler *korrelierte Größen* sind, was bekanntlich die Benutzung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ausschließt. Die Einführung von symbolischen Gewichtskoeffizienten würde zum Ziel führen; aber die dadurch gewonnenen Ausdrücke nehmen eine so komplizierte Gestalt an, daß eine einfache Interpretation nicht mehr möglich ist. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, daß den Koordinatenfehlern a priori zufällige Natur zugeschrieben wird, was «grünes Licht» für das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz gibt; aber die «Glaubwürdigkeit» der Ergebnisse wird dadurch bedenklich abgeschwächt.

Wegen der Schwierigkeiten, die mit der Anwendung der Fehlertheorie auf unser Problem verbunden sind, begrenzen wir die fehlertheoretische Untersuchung auf das Übertragen der Lagefehler der Stationspunkte A und B zum Folgepunkt.

Gemäß der Theorie der symbolischen Gewichtskoeffizienten sind die Gewichtskoeffizienten der Koordinatenfehler des Folgepunktes infolge der Lagefehler der Stationspunkte gegeben durch:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \left(\frac{\partial x_F}{\partial x_A} Qx_A + \frac{\partial x_F}{\partial y_A} Qy_A + \frac{\partial x_F}{\partial x_B} Qx_B + \frac{\partial x_F}{\partial y_B} Qy_B\right)^2 \\ Q_{yy} &= \left(\frac{\partial y_F}{\partial x_A} Qx_A + \frac{\partial y_F}{\partial y_A} Qy_A + \frac{\partial y_F}{\partial x_B} Qx_B + \frac{\partial y_F}{\partial y_B} Qy_B\right)^2, \end{aligned} \tag{13}$$

indem wir in (5) sämtliche Differentiale f durch symbolische Gewichtskoeffizienten ersetzen.

Wir machen jetzt die Annahme, daß sämtliche nichtquadratischen Gewichtskoeffizienten in (13) gleich Null sind; das heißt, die Koordinatenfehler der Festpunkte dürfen als zufällige Fehler aufgefaßt werden. Ferner wird angenommen, daß die quadratischen Gewichtskoeffizienten für jeden der Festpunkte gleich groß sind; das heißt: $Qx_A x_A = Qy_A y_A = Q_{AA}$ und $Qx_B x_B = Qy_B y_B = Q_{BB}$.

Bei Berücksichtigung der getroffenen Annahmen ergibt sich dabei für den Gewichtskoeffizienten des mittleren Punktfehlers $Q_{MM} = Q_{xx} + Q_{yy}$:

$$Q_{MM} = \left\{\left(\frac{\partial x_F}{\partial x_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_F}{\partial y_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_F}{\partial x_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_F}{\partial y_A}\right)^2\right\} Q_{AA} +$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial x_F}{\partial x_B}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_F}{\partial y_B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_F}{\partial x_B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_F}{\partial y_B}\right)^2\right\} Q_{BB},$$

welche Gleichung durch Einbeziehung von (6) übergeht in:

$$Q_{MM} = \frac{1}{\sin^2\gamma}\left\{(\sin\varphi_{AF} - n_A \sin\varphi_{AL})^2 + (\cos\varphi_{AF} - n_A \cos\varphi_{AL})^2\right\} Q_{AA} +$$

$$+ \frac{1}{\sin^2\gamma}\left\{(\sin\varphi_{BF} - n_B \sin\varphi_{BL})^2 + (\cos\varphi_{BL} - n_B \cos\varphi_{BL})^2\right\} Q_{BB}$$

Wir berücksichtigen hier (12) und erhalten:

$$Q_{MM} = \frac{1}{\sin^2\gamma}\left(\frac{S_{FL}^2}{S_{AL}^2} Q_{AA} + \frac{S_{FL}^2}{S_{BL}^2} Q_{BB}\right),$$

oder wenn wir zum mittleren Punktfehler übergehen:

$$M^2 = \frac{1}{2\sin^2\gamma}\left(\frac{S_{FL}^2}{S_{AL}^2} M_A^2 + \frac{S_{FL}^2}{S_{BL}^2} M_B^2\right), \tag{14}$$

wobei M_A und M_B die mittleren Punktfehler der Punkte A und B sind.

Diesem Ausdruck ist zu entnehmen, daß *für das Übertragen der Lagefehler der Punkte A und B der Schnittwinkel γ sowie das Verhältnis $S_{FL}:S_{AL}$ und $S_{FL}:S_{BL}$ maßgebend ist.* Durch (14) wird die günstige Fortpflanzung der Lagefehler der Stationspunkte nochmals bestätigt, ja sogar verstärkt.

5. Schlußfolgerungen

Das Hauptergebnis der vorliegenden Untersuchung ist, daß die Folgepunktbestimmung nach der Schreiberschen Art sich sehr günstig hinsichtlich der relativen Genauigkeit des Folgepunktes in bezug auf den Leitpunkt stellt, was auf die folgenden vier Ursachen zurückzuführen ist:

1. Die unmittelbare Messung der Parallaxwinkel gewährleistet die größtmögliche Genauigkeit derselben.

2. Die rechnerische Behandlung der Parallaxwinkel ist so gelagert, daß diese Winkel die kleinstmögliche Abänderung erfahren, womit die größtmögliche relative Genauigkeit zwischen Leit- und Folgepunkt erzielt wird.

3. Nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der Lagefehler der Stationspunkte wird zum Folgepunkt übertragen.

4. Der Lagefehler des Leitpunktes wird näherungsweise unverändert zum Folgepunkt übertragen sowohl in bezug auf Größe als auch auf das Vorzeichen, so daß nur eine geringfügige Verschlechterung in der Genauigkeit ihrer gegenseitigen Lage daraus resultiert.

Für das Übertragen der Lagefehler der Festpunkte zum Folgepunkt ist in erster Linie die Größe der Parallaxwinkel sowie die «Güte» des Schnittwinkels im Folgepunkt ausschlaggebend. Je kleiner die Parallaxwinkel sind und je weiter der Schnittwinkel sich einem rechten Winkel nähert, um so günstiger liegen die Verhältnisse beim Übertragen der Festpunktlagefehler.

Literatur:

[1] *Gleinsvik, P.:* Über die Genauigkeit der trigonometrischen Punktbestimmung mit besonderer Berücksichtigung der Einwirkung der Festpunkte. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1963.

[2] *Jordan, W.:* Bestimmung eines Folgepunktes bei der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1889.

Les réseaux géodésiques amplificateurs de bases ne sont-ils plus actuels?

Par A. Ansermet

Résumé

Les réseaux amplificateurs de bases sont indispensables pour les réseaux triangulés. En trilatération c'est une autre question si l'on songe aux progrès réalisés en électrotélémétrie; cependant certains constructeurs d'électrotélémètres reconnaissent que la précision des mesures est susceptible de varier assez notablement en fonction des conditions atmosphériques ou d'autres circonstances. Une mesure de contrôle n'est pas superflue, d'autant plus que le réseau amplificateur peut revêtir une forme plus simple. Un cas caractéristique est celui, classique, du réseau Ibañez; ce géodésien aurait pu amplifier la base en stationnant en un seul point de coordonnées inconnues pour mesurer, par voie angulaire, des rapports anharmoniques. C'est une propriété de ces rapports d'être indépendants des positions choisies pour stationner; le théodolite utilisé aura une haute précision. Il est étonnant que la littérature géodésique soit muette quant à l'éventualité d'une telle solution. En Suisse il n'est pas exclu qu'on puisse procéder de même pour certains côtés. Une seule station ne suffira pas toujours; cela a peu d'importance à cause de la propriété sus-énoncée. Le réseau n'a en fait plus deux mais une dimension; ce problème est susceptible encore de bien des développements.

Anmerkung der Redaktion: Herr Prof. Ansermet, dem wir eine große Anzahl wertvoller Studien in unserer Zeitschrift verdanken, entwickelt im vorliegenden Aufsatz eine neue Idee über die Gestaltung von Basisvergrößerungsnetzen. Die Idee ist ohne Zweifel bestechend und verdient weiter verfolgt zu werden. Die Anwendung des äußerst einfachen Vorgangs, was Messung und Rechnung betrifft, dürfte aus Geländegründen allerdings auf wenige günstige Fälle beschränkt bleiben.

Wir möchten die Hoffnung aussprechen, daß sich jüngere Geodäten mit dem Problem näher auseinandersetzen.