

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 62 (1964)

Heft: 3

Artikel: Simultane gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und des Schwerefeldes in der Erdkruste [Fortsetzung]

Autor: Müller, Pierre

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-219199>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Simultane gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und des Schwerefeldes in der Erdkruste

Von Pierre Müller, dipl. Physiker, Zürich

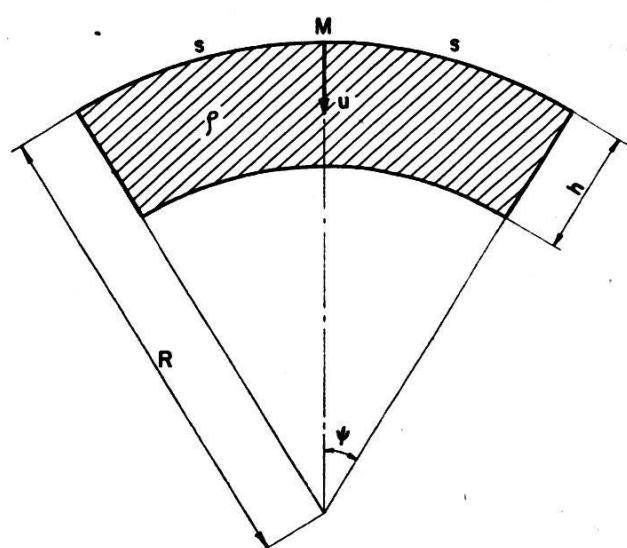
(Fortsetzung)

3.2. Formel für die Vertikalkomponente der Plattenkorrektion

Die Erfassung der Anziehung der sichtbaren Massen erfolgt in zwei Schritten. Nach der Terrainkorrektion entsteht eine sphärisch gekrümmte Schale quadratischen Grundrisses. Die Vertikalkomponente der Anziehung wird im folgenden zuerst für den zentralen und dann für den exzentrischen Aufpunkt behandelt. Wir bezeichnen sie im ersten Fall mit p_0 , im zweiten allgemein p . Weiter soll die Plattenkorrektion für die Dichte 1 gr/cm³ definiert werden, also $p = P \cdot \rho$. Dann gilt $K = P - T$.

3.2.1. Herleitung der Formel für den zentralen Fall

Wie schon in [7] erwähnt, genügt die Behandlung der Plattenkorrektion als die in der Geophysik übliche, unendlich ebene Platte für unsere Zwecke nicht mehr. Die Vertikalkomponente der Gravitationsbeschleunigung des sphärischen quadratischen Schalenkörpers wird aus bekannten Formeln für die Anziehung eines Hohlkugelsektors durch Integration gewonnen. Baeschlin gibt in seinem Lehrbuch für Geodäsie [1], S. 502, für die Anziehung des Hohlkugelsektors eine Reihenentwicklung an. Abgestimmt auf unseren in Figur 6 dargestellten Fall, erhält man mit etwas abgeänderten Bezeichnungen die Reihenentwicklung:



$$u = 2 \pi k_0 \rho R \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{h}{R} \right)^n$$

mit $A_1 = 1 + \alpha$

$$A_2 = - \left(\frac{1}{4\alpha} + 1 + \frac{3}{4}\alpha \right)$$

$$A_3 = \frac{5}{24\alpha} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha$$

$$A_4 = \frac{1}{64\alpha^3} (1 - \alpha^2)^2$$

$$A_5 = \frac{A_2 + 1}{160} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}$$

und $\alpha = \sin \frac{\psi}{2}$

$$R = 6371,2 \text{ km, mittlerer Erdradius.}$$

Fig. 6: Anziehung eines Hohlkugelsektors

Bei den Abmessungen des verwendeten Schalenkörpers ($s \leq 100$ km, $h \leq 4000$ m) kann $\alpha \simeq s/2R$ gesetzt werden. Bei einer Rechenschärfe von 10^{-3} mgl spielt nämlich das zweite Glied $1/6 (s/2R)^3$ der Entwicklung von $\sin \psi/2$ keine Rolle mehr. Ebenso kann α^2 gegen 1 vernachlässigt werden. Dagegen muß bei einer maximal zugelassenen Plattenmächtigkeit von $h = 4000$ m das vierte Glied der Reihenentwicklung mitgenommen werden.

Zu allfälligen Vergleichs- und Kontrollzwecken sei hier noch die Anziehung des Hohlkugelsektors in geschlossener Form wiedergegeben. Mit der Abkürzung $\zeta = h/R$ lautet die exakte Formel:

$$u = 2\pi k_0 \rho R \left[\zeta \left(1 - \zeta + \frac{1}{3} \zeta^2 \right) + 2\alpha \left(1 - \frac{14}{3} \alpha^2 + 4\alpha^4 \right) \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{14}{3} \alpha^2 + 4\alpha^4 - \zeta + \frac{1}{3} \zeta^2 + \frac{2}{3} \alpha^2 \zeta \right) \sqrt{4\alpha^2(1-\zeta) + \zeta^2} \right. \\ \left. + \cos \psi \sin^2 \psi \ln \left(\frac{2\alpha^2 - \zeta + \sqrt{4\alpha^2(1-\zeta) + \zeta^2}}{2\alpha(1+\alpha)} \right) \right]$$

Für unsere quadratische Schale werde die variable Bogenlänge s vom zentralen Aufpunkt M aus abgetragen. Die Leitlinie auf der Kugel und damit die Begrenzung der Schale ist definiert durch die Abhängigkeit der Bogenlänge s vom Azimut φ . Es sei nun für $0 \leq \varphi \leq \pi/4$

$$s = \frac{s_0}{\cos \varphi} \quad \text{gesetzt.}$$

Die Begrenzungslinien sind also nicht exakt Großkreisausschnitte. Die Abweichung hat aber auf die Anziehung der in Betracht fallenden Schalengrößen einen verschwindend kleinen Einfluß. Der Fehler wurde durch eine Rechnung grob abgeschätzt. Mit $s_0 = 20$ km und einer Schalenmächtigkeit von 4 km liegt der Fehler unter 10^{-4} mgl.

Die Konstante s_0 kann gewissermaßen als halbe Quadratseitenlänge bezeichnet werden. Damit wird der Beitrag dp_0 zur Anziehung eines Sektors mit dem Winkel $d\varphi$:

$$dp_0 \cong \frac{u}{2\pi} d\varphi = k_0 \rho R \left[\left(1 + \frac{s_0}{2R \cos \varphi} \right) \frac{h}{R} - \left(\frac{R \cos \varphi}{2s_0} + 1 + \frac{3s_0}{8R \cos \varphi} \right) \frac{h^2}{R^2} \right. \\ \left. + \left(\frac{5R \cos \varphi}{12s_0} + \frac{1}{3} + \frac{s_0}{16R \cos \varphi} \right) \frac{h^3}{R^3} + \frac{R^3 \cos^3 \varphi}{8s_0^3} \frac{h^4}{R^4} \right] d\varphi$$

Für die Anziehung p_0 der ganzen Schale erhält man:

$$p_0 = 8 \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \frac{u}{2\pi} d\varphi$$

Die Integration ergibt:

$$p_0 \cong 2 \pi k_0 \rho R \left[\left(1 + \frac{2 s_0 k}{\pi R} \right) \frac{h}{R} - \left(\frac{\sqrt{2} R}{\pi s_0} + 1 + \frac{3 s_0 k}{2 \pi R} \right) \frac{h^2}{R^2} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5 \sqrt{2} R}{6 \pi s_0} + \frac{1}{3} + \frac{s_0 k}{4 \pi R} \right) \frac{h^3}{R^3} + \frac{5 \sqrt{2} R^3}{24 \pi s_0^3} \frac{h^4}{R^4} \right]$$

mit

$$k = \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \Big|_{\varphi=0}^{\pi/4} = 0,88137$$

Es sei nochmals betont, daß man die gewonnene abgebrochene Reihenentwicklung nur mit der Einschränkung $\frac{s_0}{R} \ll 1$ verwenden darf. In den runden Klammerausdrücken stellen die Summanden mit s_0 im Nenner die Hauptglieder dar.

Mit $R \rightarrow \infty$ geht unsere Reihenentwicklung in die bekannte Formel $p_\infty = 2 \pi k_0 \rho h$ für die Anziehung einer unendlich ausgedehnten, ebenen Platte über. Für kleine Plattenmächtigkeiten ($h \rightarrow 0$) ist $p > p_\infty$, was dem Einfluß der Krümmung zuzuschreiben ist. Dagegen ist für größere Plattenmächtigkeiten $p < p_\infty$, was natürlich eine Folge der endlichen Abgrenzung ist. Diese wird durch die Hauptglieder erfaßt, welche $\frac{R}{s_0}$ als Faktor enthalten.

3.2.2. Einfluß der exzentrischen Lage des Aufpunktes

Für einen exzentrisch gelegenen Punkt A wird die Integration entsprechend wieder getrennt über acht Teilstücke erstreckt, nur mit dem Unterschied, daß nun die Integrationsgrenzen verschieden sind. Mit den in Figur 7 eingeführten Bezeichnungen erhält man für die Plattenkorrektion im Punkt A :

$$p(A) \cong k_0 \rho R \sum_{i=1}^8 \left[\left(\Phi_i + \frac{s_i k_i}{2 R} \right) \frac{h}{R} - \left(\Phi_i + \frac{3 s_i k_i}{8 R} + \frac{R \sin \Phi_i}{2 s_i} \right) \frac{h^2}{R^2} \right. \\ \left. + \left(\frac{\Phi_i}{3} + \frac{s_i k_i}{16 R} + \frac{5 R \sin \Phi_i}{12 s_i} \right) \frac{h^3}{R^3} + \frac{R^3}{8 s_i^3} \left(\sin \Phi_i - \frac{\sin^3 \Phi_i}{3} \right) \frac{h^4}{R^4} \right]$$

mit

$$k_i = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \Phi_i}{1 - \sin \Phi_i}$$

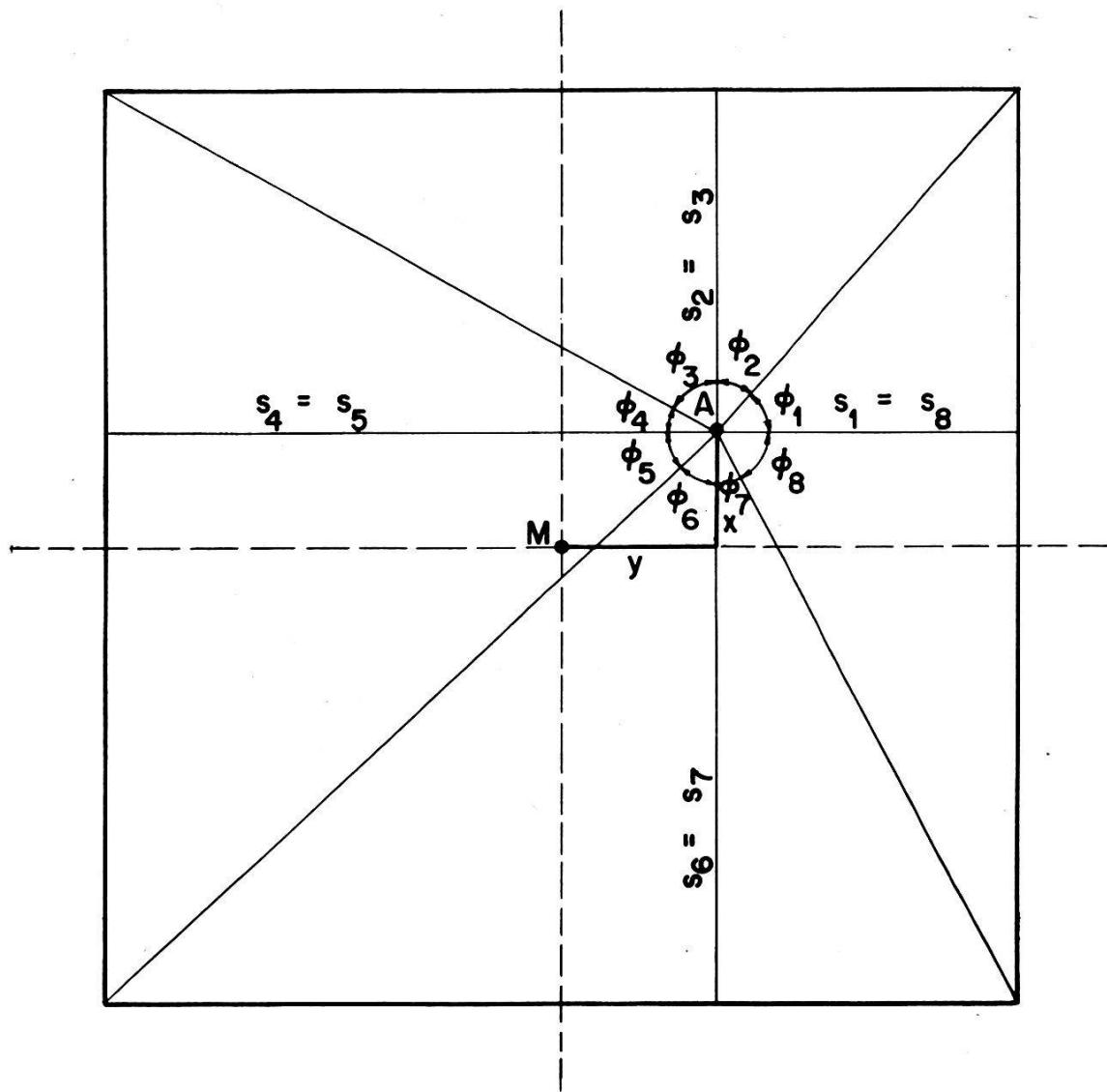


Fig. 7. Exzentrische Lage des Aufpunktes

Bezüglich der Form der Leitlinie gelten natürlich die gleichen Bemerkungen wie im zentrischen Fall. Es gelten die Näherungen:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= s_8 \cong s_0 - y \\
 s_4 &= s_5 \cong s_0 + y \\
 s_2 &= s_3 \cong s_0 - x \\
 s_6 &= s_7 \cong s_0 + x
 \end{aligned}$$

Statt der linearen Exzentrizitäten x, y des Punktes A führen wir dimensionslose Größen $u = x/s_0$ und $v = y/s_0$ ein. Die Koeffizienten der Reihe in h/R werden sodann nach u und v entwickelt. Nach der Summation über i zerlegt man $p(A)$ in den zentrischen Anteil $p(M) = p_0$ und in den negativen Anteil der Exzentrizität E , also $p(A) = p_0 - E(A)$. Die Rechnung wurde für die ersten drei Glieder der Reihe in h/R durchgeführt und jeweils nach dem zweiten, nicht verschwindenden Glied der Entwicklung in u beziehungsweise v abgebrochen. Man erhält so für E :

$$E \cong \sqrt{2} k_0 \rho R \left[E_1 \frac{h}{R} + E_2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 + E_3 \left(\frac{h}{R} \right)^3 \right]$$

wobei $E_1 = Q'$

$$E_2 = -\frac{3}{4} Q' + Q''$$

$$E_3 = \frac{1}{8} Q' - \frac{5}{6} Q''$$

und

$$Q' = \frac{s_0}{2R} \left[u^2 + v^2 + \frac{13}{48} (u^4 + v^4) - \frac{3}{8} u^2 v^2 \right]$$

$$Q'' = \frac{5R}{4s_0} \left[u^2 + v^2 + \frac{91}{80} (u^4 + v^4) - \frac{3}{8} u^2 v^2 \right]$$

bedeuten.

In erster Näherung ist der Einfluß der Exzentrizität unabhängig vom Azimut. Wegen $s_0/R \ll 1$, $h/R \ll 1$, $Q'' \gg Q'$ und $u, v \ll 1$ folgt sofort

$$E \cong \frac{5\sqrt{2}}{4} k_0 \rho \frac{h^2}{s_0} (u^2 + v^2) = \frac{5\sqrt{2}}{4} k_0 \rho \frac{h^2}{s_0^3} (x^2 + y^2) \quad (11)$$

Bei der Rechenschärfe von 10^{-3} mgl und mit $s_0 = 20$ km, $h \leq 2000$ m, $u, v \leq 0,1$ genügt die Näherung (11) für E vollkommen.

Auch im extremen Fall $u = v = 0,2$ und $h = 4000$ m genügt die Näherung $E_2 \cong Q''$. Die Glieder höherer Ordnung in u und v geben dann den Beitrag $0,08$ mgl, wenn $\rho = 2,5$ gr/cm³ angenommen wird. Der Beitrag des ersten Gliedes mit dem Koeffizienten E_1 beträgt $0,01$ mgl.

3.2.3. Numerisches Beispiel

Mit den Werten $s_0 = 20$ km, $\rho = 1$ gr/cm³ erhält man als Plattenkorrektion p in einem Punkt mit der linearen Exzentrizität $q = \sqrt{x^2 + y^2}$ und der Plattenmächtigkeit h :

$$p = 0,0419826 h - (0,4986 \cdot 10^{-7} + 1,179 \cdot 10^{-15} q^2) h^2 + 1,24 \cdot 10^{-13} h^3 + 4,913 \cdot 10^{-16} h^4$$

p in Milligal, h und q in Metern.

Diese Formel wurde bei der gravimetrischen Bestimmung der Ge steinsdichte und der Lotkrümmungen für den Punkt St. Anton [7] verwendet. Sie kommt auch bei unserer Dichtebestimmung an der Falätsche zur Anwendung. Die Tabelle I konfrontiert unsere Plattenkorrektion mit derjenigen der unendlich ebenen Platte. Schon bei relativ kleinen Mächtigkeiten treten erhebliche Differenzen auf. Wegen der Nichtlinearität der neuen Formel kommt außerdem der Wahl des Reduktionsniveaus nunmehr eine vermehrte Bedeutung zu.

Tabelle I: Plattenkorrektion für die Dichte 1 gr/cm³

<i>h</i> (m)	Ebene unendliche Platte (mgl)	Sphärische Schale ($s_0 = 20$ km)	
		$q = 0$ (mgl)	$q = 2$ km (mgl)
10	0,419	0,420	0,420
50	2,095	2,097	2,097
200	8,382	8,359	8,359
500	20,954	20,754	20,753
1000	41,909	41,033	41,028
2000	83,818	80,175	80,156
4000	167,635	152,866	152,791

4. Darstellung der Methode am Beispiel «Falätsche»

Dem Verfasser wurde zu Beginn der vorliegenden Arbeit das Gebiet des Üetlibergs zwischen Leimbach und Stallikon als geeignetes Experimentiergelände empfohlen. In der Tat weist das Relief des Üetlibergs die für gravimetrische Dichtebestimmungen günstige Bewegtheit auf. Im besonderen gilt dies für den am Rütschlibach gelegenen Erosionstrichter, welcher den Namen Falätsche trägt. Das dort anstehende Gestein gehört ausschließlich der oberen Süßwassermolasse an. Das Gesteinsmaterial darf somit als weitgehend homogen angenommen werden. Das gewählte Gelände zeichnete sich nicht zuletzt durch seine besondere Nähe von Zürich aus.

4.1. Stationsnetz

Die geographische Lage der insgesamt 35 Stationen ist aus Figur 8 ersichtlich. Ihre Wahl geschah nach folgenden Gesichtspunkten:

- Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Höhenunterschiede.
- Gleichmäßige Verteilung der Stationen im Meßgebiet.
- Die Stationen sollen wenn möglich auf anstehender Molasse liegen.

4.1.1. Vermessung

Die Verpflockung und anschließende Vermessung des Stationsnetzes nahm zwei Monate Feldarbeit in Anspruch. Die Genauigkeitsansprüche der Höhenbestimmung lagen in Anbetracht des sehr bewegten Geländes ziemlich hoch. Es wurde nur eine Toleranz von wenigen Zentimetern zugelassen. Dagegen ist die Kenntnis der Lagekoordinaten nur auf 1 m genau erforderlich. Dank dem verwendeten, vom Institut für Geodäsie der ETH freundlicherweise zur Verfügung gestellten modernen Vermessungsmaterial, einem Reduktions-Tachymeter-Theodoliten Kern DK-RT, zwei Horizontallatten und drei Kugelgelenkstativen, wurde die Vermessungsarbeit sehr erleichtert und die angestrebte Genauigkeit erreicht.

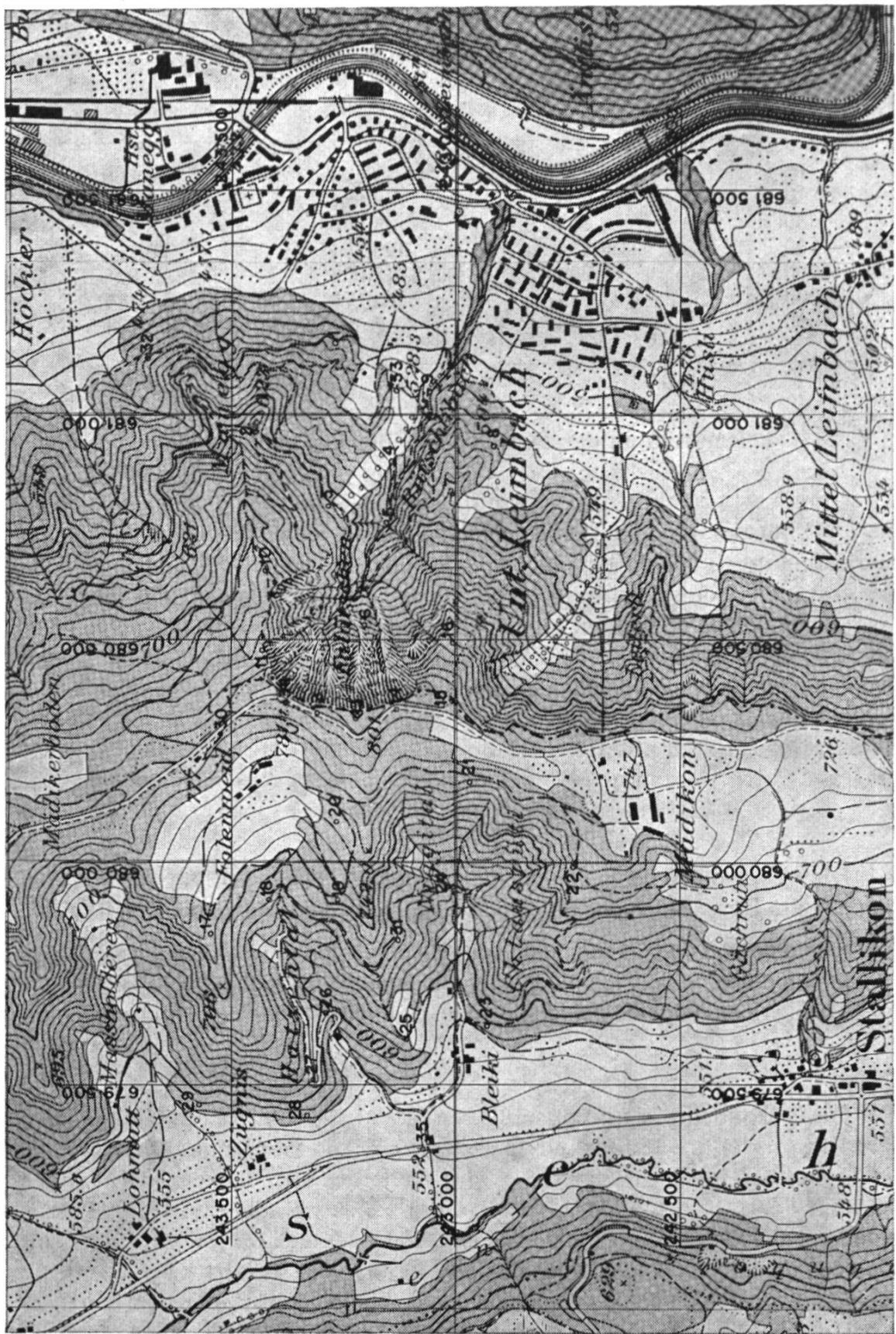


Fig. 8: Stationsnetz

Unter Verwendung der zur Verfügung stehenden Triangulationspunkte wurden die Stationen in Polygonzüge einbezogen. Es ergab sich ein mittlerer Abschlußfehler von etwa 8 cm in der Höhe und rund 3 dm in den Koordinaten. Der mittlere Höhenfehler einer Station wurde zu 2 cm abgeschätzt. Die Resultate sind in Tabelle III aufgeführt. Die Koordinaten sind auf ganze Meter gerundet. Die Höhenangaben beziehen sich auf das Niveau der Fußschrauben des Gravimeters. Die Höhe des bei den Schweremessungen gelegentlich verwendeten Stativs ist demnach inbegriffen.

4.1.2. Schweremessungen

Die Schweremessungen wurden mit dem Worden-Gravimeter Nr. 26 des Institutes für Geophysik durchgeführt. Sie zerfielen in Basis- und Detailmessungen. Die Meßpunkte 33, 34 und 35 sowie zwei Hilfspunkte (Berg- und Talstation der privaten Seilbahn vom Gut Mälikon) bildeten zusammen mit dem Fundamentalpunkt des schweizerischen Schweregrundnetzes in Zürich das Basisnetz. Die Schweredifferenzen zwischen je zwei Basispunkten wurden durch wiederholte Stationsbezüge sehr genau bestimmt und am Schlusse allfällige Widersprüche innerhalb des Netzes ausgeglichen. Die übrigen Meßpunkte wurden durch übliche Schleifenmessungen an das Basisnetz angeschlossen. In Tabelle III sind die Schweredifferenzen Δg gegenüber dem Fundamentalpunkt in Milligal für alle Stationen angegeben. Es gilt also, wenn man den Index i für die i -te Station einführt:

$$g_i = g_F + \Delta g_i$$

Die Absolutschwere g_F im Fundamentalpunkt Zürich beträgt

$$g_F = 980\,667 \text{ mgl} \quad (\text{Potsdam: } 981\,274 \text{ mgl})$$

Aus der Streuung der einzelnen Schleifenmessungen ergibt sich für die Δg_i ein mittlerer Fehler von

$$m_g = \pm 0,023 \text{ mgl}.$$

4.2. Terrainkorrekturen

Ein quadratischer Geländeausschnitt von 40 km Seitenlänge bildet die sichtbare Masse. Die Begrenzung nach unten, welche für die Plattenkorrektion eine Rolle spielt, ist durch das Reduktionsniveau $H_0 = 500 \text{ m}$ festgelegt. Der Mittelpunkt des Quadrates hat die Landeskoordinaten $Y = 680 \text{ km}$ und $X = 243 \text{ km}$. In Tabelle II sind die Blockeinteilungen der Terrainkorrekturen aufgeführt. Neben Blocknummer, Netzweite, Nullpunkt und Abmessungen (Länge und Breite) ist die Anzahl der gespeicherten und diejenige der tatsächlich bei der Berechnung für eine Station verwendeten Kotenwerte angegeben. Die nicht benützten Koten gehen auf Konto der Blockschachtelungen. Die Blöcke 1 bis 8 umfassen die festen sichtbaren Massen, wobei 7 und 8 als nächste Stationsumgebung für jede Station gesondert bestimmt wurden. Die Blöcke 10 und 11

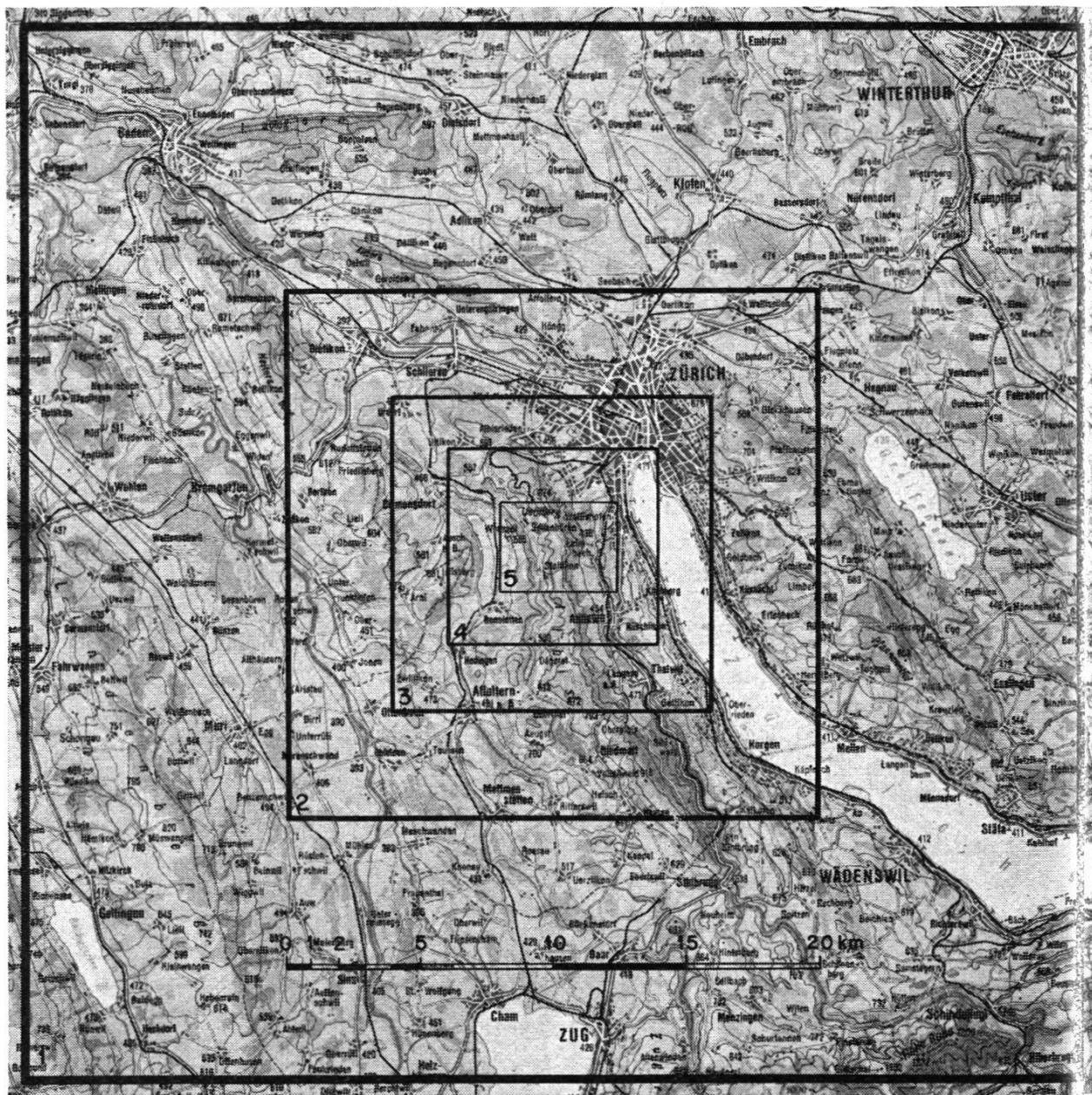


Fig. 9: Blockeinteilung für die Terrainkorrekturen

berücksichtigen die Wassermassen des Zürichsees. Die benötigte totale Rechenzeit inklusive Ein- und Ausgabe betrug rund 50 Stunden. Tabelle III vereinigt alle Meßresultate sowie die Ergebnisse der Terrain- und Plattenkorrekturen.

Grundsätzlich sind bei der Fehlerberechnung der Terrainkorrektion zwei Fehlerquellen zu unterscheiden. Ungenau geschätzte mittlere Höhen führen zu einer falschen topographischen Masse, und die Mittelung selbst – zusammen mit der genäherten Berechnung – bedeutet gegenüber der Wirklichkeit eine andere Massenverteilung. Der Einfluß des ersten Fehlers auf die Terrainkorrektion überwiegt meistens den zweiten. Die Mittelung verursacht zu kleine Terrainkorrekturen. Dieser systematische

Tabelle II: Blockeinteilung für die Terrainkorrekturen

Block-Nr. <i>b</i>	Netzweite <i>e</i> (m)	Nullpunkt		Abmessungen		Koten	
		<i>Y_b</i> (m)	<i>X_b</i> (m)	<i>m · e</i> (m)	<i>n · e</i> (m)	total	benutzt
1	2000	660 000	223 000	40 000	40 000	400	300
2	1000	670 000	233 000	20 000	20 000	400	256
3	500	674 000	237 000	12 000	12 000	576	336
4	250	676 000	239 500	8 000	7 500	960	708
5	125	678 000	241 500	4 500	3 500	1008	600
6	62,5	678 750	242 125	3 000	2 125	1632	1607
7	31,25	—	—	312,5	312,5	100	91
8	15,125	—	—	93,75	93,75	36	63
						(36 - 9 + 36)	
10	500	683 000	232 000	12 000	14 000	672	144
11	500	683 000	232 000	12 000	14 000	672	144

Total benützte Koten pro Station: 4249

Fehler wurde für eine übliche Einteilung der sichtbaren Massen abgeschätzt und als unbedeutend befunden. Dagegen verdient die Handhabung der Näherungsfunktionen einige Aufmerksamkeit. Es können je nach Konfiguration des Quaders Abweichungen beiderlei Vorzeichens zur exakten Formel auftreten. Bei vorsichtiger Wahl der Parameter λ und μ sollte aber dieser Fehler gegenüber dem ersten eine untergeordnete Rolle spielen. Die hierzu nötigen Angaben sind aus der ausführlichen Anleitung zu entnehmen. Graphische Darstellungen geben eine Übersicht der Abweichungen von der exakten Quaderformel für die verschiedenen Näherungen und Werte von λ und μ . In unserem Fall wurde $\mu_0 = 0,2$ und $\lambda_0 = 0,15$ beziehungsweise 0,4 gewählt.

Der aus der Unsicherheit der mittleren Höhe resultierende Fehler hängt von der Distanz q und der Höhe z des einzelnen Quaders ab. Für die folgende Fehlerberechnung wird eine vereinfachte Massenpunktsformel verwendet (Näherung $z \ll q$).

$$u = \frac{k_0 e^2}{2} \frac{z^2}{q^3}$$

Pro Block wird ein mittlerer Abstand Station–Quader \bar{q} angenommen. Um nun einen Wert für z zu erhalten, errechnet man sich zunächst für jeden Block aus allen Stationen einen Mittelwert \bar{u}_b der Terrainkorrektion. Dividiert man noch durch die Anzahl n der Felder pro Block, so erhält man \bar{u}_f , was einem mittleren Korrektionsbeitrag pro Station und Feld innerhalb eines Blockes entspricht. Damit kann dann nach obiger Formel auf eine mittlere Quaderhöhe \bar{z} geschlossen werden.

$$\bar{z} = \frac{\bar{q}}{e} \sqrt{\frac{2 \bar{u}_f \bar{q}}{k_0}}$$

Tabelle III: Meßresultate

Station	Koordinaten		Höhe <i>H</i> (m)	Schwere - <i>Δg</i> (mgl)	Terrainkorrekturen		
	<i>Y</i> (km)	<i>X</i> (km)			<i>T</i> (mgl)	<i>K</i> gr ⁻¹ cm ³	<i>s_b</i> (mgl)
1	681,161	243,269	508,32	18,74	0,946	- 0,597	0,01
2	680,976	243,445	624,42	44,41	1,884	3,325	0,02
3	680,796	243,284	608,24	40,07	1,426	3,107	0,02
4	680,897	243,145	547,03	27,02	1,098	0,874	0,01
5	680,758	243,156	555,04	29,60	1,570	0,738	0,01
6	680,532	243,202	631,01	45,37	1,788	3,696	0,02
7	680,823	243,008	581,40	34,49	1,170	2,241	0,02
8	680,930	242,916	537,38	25,05	0,913	0,655	0,01
9	681,055	243,060	501,86	17,71	0,959	- 0,881	0,01
10	680,653	243,424	731,70	68,39	2,699	6,977	0,02
11	680,476	243,432	757,66	73,27	2,638	8,116	0,02
12	680,338	243,306	786,85	80,09	2,968	8,997	0,02
13	680,324	243,219	800,01	83,83	3,298	9,212	0,02
14	680,346	243,130	788,18	80,84	3,035	8,985	0,02
15	680,365	243,007	786,09	80,86	3,083	8,850	0,02
16	680,494	243,006	738,74	69,97	2,664	7,305	0,02
17	679,838	243,547	717,01	61,77	1,544	7,522	0,01
18	679,914	243,417	682,50	53,54	1,106	6,524	0,01
19	679,914	243,263	706,43	59,48	1,346	7,280	0,02
20	680,092	243,256	737,23	66,16	1,462	8,444	0,02
21	680,183	242,966	752,06	70,81	1,950	8,572	0,02
22	679,989	242,736	740,11	68,35	1,797	8,229	0,02
23	679,634	242,929	588,68	34,45	0,793	2,923	0,01
24	679,947	243,005	634,07	44,49	1,150	4,462	0,01
25	679,604	243,108	618,95	40,58	0,864	4,116	0,01
26	679,660	243,289	597,77	36,31	1,009	3,087	0,01
27	679,513	243,318	609,04	38,31	0,835	3,731	0,01
28	679,431	243,331	587,04	33,61	0,774	2,873	0,01
29	679,456	243,573	590,82	34,14	0,793	3,012	0,01
30	680,289	243,527	775,79	75,35	2,118	9,388	0,02
31	679,826	243,130	671,37	52,28	1,224	5,943	0,01
32	681,127	243,691	522,62	21,41	1,115	- 0,164	0,01
33	681,058	243,131	528,68	22,94	0,877	0,326	0,01
34	680,359	243,379	780,28	77,77	2,661	9,031	0,02
35	679,357	243,071	552,08	26,32	0,495	1,689	0,01

Anhand von großmaßstäblichen Karten und durch feinere Unterteilung wurde für jeden Block ein mittlerer Ablesefehler m_z der Koten abgeschätzt. Der mittlere Fehler von \bar{u}_f ist

$$M(\bar{u}_f) = \pm 2 \frac{\bar{u}_f}{z} m_z.$$

Nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich dann für den mittleren Fehler m_T der Terrainkorrektion durch Summation über alle Blöcke:

$$m_T^2 = \sum M^2(\bar{u}_b) = \sum n M^2(\bar{u}_f)$$

Tabelle IV: Berechnung des mittleren Fehlers der Terrainkorrektion

<i>b</i>	<i>e</i> (m)	\bar{q} (m)	\bar{u}_b 10^{-3} mgl	\bar{u}_f 10^{-3} mgl	<i>n</i>	\bar{z} (m)	m_z (m)	Karten- maßstab	$M(\bar{u}_f)$ 10^{-3} mgl	$M(\bar{u}_b)$ 10^{-3} mgl
1	2000	15 000	42	0,140	300	189	30	1 : 100 000	0,045	0,78
2	1000	8 000	51	0,201	256	175	20	1 : 100 000	0,046	0,74
3	500	5 000	79	0,234	336	186	10	1 : 25 000	0,025	0,46
4	250	3 000	147	0,207	708	164	7	1 : 25 000	0,018	0,48
5	125	1 650	146	0,243	600	145	5	1 : 25 000	0,017	0,42
6	62,5	700	805	0,501	1607	117	3	1 : 5 000	0,026	1,0
7	31,25	100	231	2,543	91	28	2	1 : 5 000	0,36	3,4
8	15,625	23	100	2,780	36	7	1,5	1 : 5 000	1,2	7,2
1-8		$\bar{T} = 1601 \text{ } 10^{-3} \text{ mgl}$			$m_T = \pm 0,008 \text{ mgl gr}^{-1} \text{ cm}^3$					

In der Tabelle IV sind alle Werte aufgeführt. Man erkennt, daß die Fehlerbeiträge der stationsnahen Blöcke 7 und 8, zur Hauptsache aber Block 8, praktisch den Gesamtfehler ausmachen. Der Grund hierfür ist in den steilen Visuren, das heißt in den großen Werten von $\mu = \bar{z}/\bar{q}$, zu erblicken. Ein Höhenfehler wirkt sich in diesen Bereichen besonders stark auf die Vertikalkomponente aus. Unsere Hinweise in 3.1.3 werden damit bestens illustriert. Man ersieht wiederum die außerordentliche Wichtigkeit der nächsten Stationsumgebung und darf sich deshalb nicht scheuen, in diesem Zusammenhang entstehenden größeren Arbeitsaufwand in Kauf zu nehmen. Die besten Kartenunterlagen – zum Beispiel im Maßstab 1 : 25 000 – sind wertlos, wenn nicht die nächsten Stationsumgebungen mit entsprechender Genauigkeit aus speziellen Karten größeren Maßstabs entnommen werden können.

4.3. Resultate der Ausgleichungsrechnungen

Die vermittelnde Ausgleichung auf Grund der Fehlergleichungen (6) in Abschnitt 2.2 konnte dank der automatisierten Berechnung für mehrere Fälle in kurzer Zeit mühelos durchgeführt werden. Die Anzahl der Fehlergleichungen ist entsprechend der Gesamtzahl der Stationen konstant 35. Variiert wurde lediglich der Grad d des harmonischen Polynoms w . Die angenommene Näherungsdichte beträgt $\rho_0 = 2,50 \text{ gr/cm}^3$. Koordinaten-Nullpunkt ist der zentrale und am höchsten gelegene Stationspunkt 13.

Fall 1 $d = 1$, mit vorgegebenem Koeffizienten $B_1 = 0,30845 \text{ mgl/m}$

$$\rho = 2,52 \pm 0,01 \text{ gr/cm}^3 \quad m_e = \pm 0,132 \text{ mgl}$$

$$A = -106,97 \pm 0,04 \text{ mgl}$$

$$B_0 = 1,43 \pm 0,11 \text{ mgl/km}$$

$$B_2 = -0,38 \pm 0,05 \text{ mgl/km}$$

Fall 2 $d = 1$

$$\rho = 2,61 \pm 0,08 \text{ gr/cm}^3 \quad m_e = \pm 0,130 \text{ mgl}$$

$$A = -107,89 \pm 0,75 \text{ mgl}$$

$$B_0 = 1,43 \pm 0,11 \text{ mgl/km}$$

$$B_1 = 0,3117 \pm 0,0026 \text{ mgl/m}$$

$$B_2 = -0,33 \pm 0,07 \text{ mgl/km}$$

Fall 3 $d = 2$

$$\rho = 2,48 \pm 0,07 \text{ gr/cm}^3 \quad m_e = \pm 0,087 \text{ mgl}$$

$$A = -106,61 \pm 0,68 \text{ mgl}$$

$$B_0 = 1,56 \pm 0,15 \text{ mgl/km}$$

$$B_1 = 0,3088 \pm 0,0024 \text{ mgl/m}$$

$$B_2 = -0,90 \pm 0,19 \text{ mgl/km}$$

$$C_0 = -0,34 \pm 0,31 \text{ mgl/km}^2$$

$$C_1 = 0,65 \pm 0,93 \text{ mgl/km}^2$$

$$C_2 = 1,18 \pm 0,33 \text{ mgl/km}^2$$

$$C_3 = 0,27 \pm 0,14 \text{ mgl/km}^2$$

$$C_4 = 1,41 \pm 0,71 \text{ mgl/km}^2$$

Fall 4 $d = 3$

$$\rho = 2,50 \pm 0,08 \text{ gr/cm}^3 \quad m_e = \pm 0,088 \text{ mgl}$$

$$A = -106,80 \pm 0,75 \text{ mgl}$$

$$B_0 = 1,79 \pm 0,27 \text{ mgl/km}$$

$$B_1 = 0,3097 \pm 0,0026 \text{ mgl/m}$$

$$B_2 = -0,72 \pm 0,22 \text{ mgl/km}$$

$$C_0 = -0,21 \pm 0,85 \text{ mgl/km}^2$$

$$C_1 = -1,7 \pm 3,6 \text{ mgl/km}^2$$

$$C_2 = 1,61 \pm 0,89 \text{ mgl/km}^2$$

$$C_3 = -0,72 \pm 0,80 \text{ mgl/km}^2$$

$$C_4 = -0,37 \pm 1,12 \text{ mgl/km}^2$$

$$D_0 = -2,23 \pm 1,79 \text{ mgl/km}^3$$

$$D_1 = -0,7 \pm 5,4 \text{ mgl/km}^3$$

$$D_2 = 6,4 \pm 5,4 \text{ mgl/km}^3$$

$$D_3 = -0,59 \pm 1,74 \text{ mgl/km}^3$$

$$D_4 = 0,02 \pm 0,77 \text{ mgl/km}^3$$

$$D_5 = 3,80 \pm 3,65 \text{ mgl/km}^3$$

$$D_6 = -1,44 \pm 1,37 \text{ mgl/km}^3$$

Fall 1 stellt ein ganz gewöhnliches Nettleton-Verfahren in zwei Dimensionen dar. Ein Vergleich der Resultate zeigt, daß in Fall 1 gegenüber den andern eine große innere Genauigkeit erreicht wird. Die Ursache ist die vorbehaltlose Annahme eines konstanten vertikalen Gradienten, hier des Normalgradienten $c_n = 0,30845 \text{ mgl/m}$. Die Unbekannte B_1 stimmt

mit dem Freiluftgradienten des reduzierten Schwerefeldes im Stationspunkt 13 überein. In unseren Beispielen ist eine Abweichung vom Normalwert allerdings kaum verbürgt. Das bedeutet natürlich keineswegs, daß dies bei späteren Messungen in einem anderen Gebiet auch zutreffen würde.

Sobald ein Vertikalgradient mitbestimmt wird, steigt die Unsicherheit der bestimmten Dichte sprunghaft an. Dichte und Vertikalgradient lassen sich eben aus dem Grund nicht so gut zusammen bestimmen, weil ihre Koeffizienten K und z in den Fehlereinflüssen beide stark – z sogar exakt – mit der Meereshöhe korrelieren. Eine Korrelationsrechnung wird in Kapitel 5 durchgeführt.

Ein wichtiges Kriterium für eine sachgemäße Einführung von Unbekannten ist, vom rein mathematischen Standpunkt aus gesehen, die Größe m_e . Man macht demnach die weitere Feststellung, daß durch die Mitbestimmung eines konstanten Vertikalgradienten allein die Streuung nicht vermindert wird.

Erst Fall 3 bringt eine ganz wesentliche Verbesserung, indem der mittlere Fehler der Gewichtseinheit m_e um 34% zurückgeht. Von den neu hinzugekommenen Unbekannten sind in diesem Beispiel C_0 und C_1 unbedeutend und könnten ebensogut weggelassen werden. Am besten ist C_2 bestimmt. Nach Gleichung (9) in Abschnitt 2.4 gibt dieser Koeffizient des harmonischen Polynoms die Änderung des vertikalen Freiluftgradienten in Abhängigkeit der Höhe an.

Der Fall 4 weist den gleichen mittleren Fehler m_e auf; doch sind die Unbekannten prozentual schlechter bestimmt. Natürlich stehen hier weniger überschüssige Gleichungen zur Verfügung. Vielleicht ist die Ausgleichung auch durch die zum großen Teil offenbar unnötigen Koeffizienten des Polynoms verdorben. Einzig C_2 , eventuell auch D_0 und D_6 wird eine Existenzberechtigung zugesprochen. Leider war im Programm die Unterdrückung einzelner Unbekannten nicht vorgesehen. Die Frage, inwieweit die Unsicherheit der simultanen Bestimmung von ρ und B_1 sich auf die anderen Unbekannten überträgt, bleibt ebenfalls offen.

Beruhigend ist die Tatsache, daß die erhaltenen Dichtewerte der beiden letzten Ausgleichungen gut übereinstimmen. Die Homogenitätshypothese scheint auch hier, wie im Beispiel St. Anton [7], recht gut erfüllt zu sein. Trotzdem bleibt bei der Erklärung der Streuung $m_e = \pm 0,087 \text{ mgl}$ eine beachtliche Lücke. Mit den Gleichungen (7) in Abschnitt 2.3 und (11) in 3.2 folgt:

$$m_L^2 = \rho_0^2 m_T^2 + m_g^2$$

Dabei wurde ρ fehlerlos angenommen. Der Fehler von s_b kann vernachlässigt werden. Mit den Werten

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 2,50 \text{ gr/cm}^3 \\ m_T &= \pm 0,008 \text{ mgl gr}^{-1} \text{ cm}^3 \\ m_g &= \pm 0,023 \text{ mgl} \end{aligned}$$

erhält man

$$m_L = \pm 0,030 \text{ mgl.}$$

Nach der Gleichung $m_e^2 = m_L^2 + m_R^2$ bleibt ein unabhängiger Restfehler von der Größe

$$m_R = \pm 0,081 \text{ mgl} \quad \text{zurück.}$$

Das höhergradige Polynom vermag in Fall 4 die Streuung nicht zu reduzieren. Lokale Dichteinhomogenitäten der sichtbaren Masse bleiben somit als einzige mögliche Ursache, welche unseren Restfehler m_R erklären können. Zum Vergleich sei erwähnt, daß im Beispiel St. Anton m_R die gleiche Größenordnung aufwies, nämlich 0,066 mgl.

4.4. Darstellung des Freiluftfeldes

Der folgenden Darstellung des Freiluftfeldes soll der Fall 4 zugrunde gelegt werden. Fall 3 und Fall 4 unterscheiden sich nur geringfügig, stimmen doch die Mehrzahl der entsprechenden Residuen im Vorzeichen überein.

Die Werte des Freiluftfeldes w sind für alle 35 Meßpunkte in der Tabelle V aufgeführt. Aus ihr sind auch die Beiträge der homogenen Polynome Π_k ($k = 1, 2, 3$) sowie die Residuen v_i der Ausgleichung zu entnehmen. Wir haben nach (4), Abschnitt 2.3:

$$w = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

In unserem Fall ist $\Pi_0 = A = -106,80 \text{ mgl}$.

Ein Vergleich der Größenordnungen von w und v zeigt wiederum die Güte der Approximation des Freiluftfeldes durch ein harmonisches Polynom. Der größte Unterschied zwischen den verschiedenen Werten von w beträgt nahezu 90 mgl, das absolut größte Residuum dagegen nur 0,12 mgl.

Wir betrachten nun das Freiluftfeld in einer horizontalen Ebene. Für $z_0 = 0$, also in 800,01 m Höhe, liest man nach (10), 2.4, die horizontalen Schweregradienten

$$B_0 = 1,79 \text{ mgl/km} \text{ und } B_2 = -0,72 \text{ mgl/km} \text{ ab.}$$

Subtrahiert man von B_0 den Breitengradienten $c_\beta = 0,81 \text{ mgl/km}$ der Normalschwere, so resultiert ein regionaler Gradient von 1,18 mgl/km 36° westlich von Norden. Der entsprechende, aus der Bouguerschen Schwerekarte der Schweiz von Th. Niethammer entnommene Wert beträgt übereinstimmend etwa 1,2 mgl/km 30° westlich von Nord.

Mit $z_0 = 300,01 \text{ m}$ werde das Feld in 500 m Höhe über Meer betrachtet und die Anomalien des Untergrundes (unsichtbare Massen) untersucht. Man befindet sich so in der Nähe der tiefer gelegenen Stationen, wo die Extrapolation der gemessenen Werte $\Delta g - s$ durch das harmonische Polynom w zuverlässig sein dürfte. In Figur 10 ist das von obigem Gradienten befreite Freiluftfeld dargestellt, nämlich die Polynome $\Pi_2(z_0) + \Pi_3(z_0)$. Nach 2.3 und Gleichung (10), 2.4, enthält diese Summe

Tabelle V: Das Freiluftfeld

Station	Relativ-Koord.			Harm. Polynome und Freiluftfeld				Residuen
	x (km)	y (km)	z (m)	Π_1 (mgl)	Π_2 (mgl)	Π_3 (mgl)	$-w$ (mgl)	v (mgl)
1	0,050	0,837	291,69	89,814	- 0,990	0,756	17,222	- 0,038
2	0,226	0,652	175,59	54,311	- 0,773	0,428	52,836	0,106
3	0,065	0,472	191,77	59,162	- 0,330	0,169	47,803	- 0,043
4	- 0,074	0,573	252,98	77,794	- 0,349	0,156	29,202	- 0,010
5	- 0,063	0,434	244,97	75,433	- 0,161	0,054	31,477	0,025
6	- 0,017	0,208	169,00	52,153	- 0,020	0,005	54,665	0,049
7	- 0,211	0,499	218,61	66,958	- 0,167	0,000	40,012	- 0,093
8	- 0,303	0,606	262,63	80,348	- 0,214	- 0,031	26,700	0,005
9	- 0,159	0,731	298,15	91,516	- 0,527	0,229	15,585	0,064
10	0,205	0,329	68,31	21,285	- 0,234	0,043	85,709	- 0,119
11	0,213	0,152	42,35	13,387	- 0,080	- 0,010	93,506	- 0,045
12	0,087	0,014	13,16	4,321	- 0,004	- 0,001	102,588	0,019
13	0,000	0,000	0,00	0,000	0,000	0,000	106,803	- 0,042
14	- 0,089	0,022	11,83	3,488	0,001	0,001	103,313	0,024
15	- 0,212	0,041	13,92	3,901	0,000	0,020	102,883	- 0,089
16	- 0,213	0,170	61,27	18,469	0,001	0,010	88,324	0,099
17	0,328	- 0,486	83,00	26,639	- 0,258	- 0,098	80,520	- 0,037
18	0,198	- 0,410	117,51	37,038	- 0,184	- 0,005	69,955	0,118
19	0,044	- 0,410	93,58	29,351	- 0,202	0,009	77,644	- 0,029
20	0,037	- 0,232	62,78	19,673	- 0,062	0,003	87,188	- 0,071
21	- 0,253	- 0,141	47,95	14,495	- 0,040	0,036	92,212	0,084
22	- 0,483	- 0,335	59,90	17,922	- 0,261	0,249	88,893	- 0,018
23	- 0,290	- 0,690	211,33	65,415	- 0,600	0,208	41,780	0,025
24	- 0,214	- 0,377	165,94	51,271	- 0,140	0,065	55,606	- 0,031
25	- 0,111	- 0,720	181,06	56,384	- 0,652	0,102	50,969	0,103
26	0,070	- 0,664	202,24	63,228	- 0,494	0,109	43,960	- 0,065
27	0,099	- 0,811	190,97	59,895	- 0,782	0,081	47,609	- 0,026
28	0,112	- 0,893	212,97	66,790	- 0,945	0,113	40,845	0,053
29	0,354	- 0,868	209,19	66,036	- 0,848	- 0,047	41,662	- 0,007
30	0,308	- 0,035	24,22	8,078	- 0,025	- 0,067	98,817	0,011
31	- 0,089	- 0,498	128,64	40,032	- 0,312	0,038	67,045	- 0,080
32	0,472	0,803	277,39	86,068	- 1,404	1,044	20,995	- 0,011
33	- 0,088	0,734	271,33	83,336	- 0,624	0,340	23,751	- 0,014
34	0,160	0,035	19,73	6,372	- 0,016	- 0,009	100,456	0,120
35	- 0,148	- 0,967	247,93	77,202	- 1,169	0,261	30,509	- 0,037

außer einem kleineren linearen Anteil hauptsächlich den als lokale Anomalie definierten Ausdruck

$$\begin{aligned}
 & [(C_0 + D_1 z_0) x^2 + (C_3 + D_5 z_0) xy - (C_0 + C_2 - D_1 z_0 - 3 D_3 z_0) y^2 \\
 & + D_0 x^3 + D_4 x^2 y - (3 D_0 + D_2) xy^2 - \frac{1}{3} (D_4 + D_6) y_3]
 \end{aligned}$$

Die Werte der Anomalien sind in Hundertstelmilligal angeschrieben. Wesentlich in unserer Darstellung ist das Kurvenbild. Da nämlich das Meßgebiet sehr klein ist und weil im Prinzip eine einzige große Störung ohne geschlossene Kurvenbilder die Karte ausfüllt, kann in unserem Fall den Vorzeichen keine physikalische Bedeutung beigemessen werden. Es

