

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 61 (1963)

Heft: 12

Artikel: Application de la théorie de l'équivalence en géodésie et en statique

Autor: Ansermet, A.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-218470>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

§ 7. Exemple numérique

Nous donnons ci-après un exemple numérique calculé avec le programme N° 404.1. D'autres exemples et des conclusions d'ordre pratique sont indiqués dans [3].

§ 8. Liste des publications consultées

- [1] *W. K. Bachmann*, Calcul de la déformation de l'image plastique en photogrammétrie. Publication N° 19 de l'EPUL, 1951.
- [2] *W. K. Bachmann*, Théorie et compensation des triangulations aériennes. 1946, épuisé.
- [3] *W. K. Bachmann*, Méthode numérique d'orientation de vues aériennes quelconques dans un stéréorestituteur. Publication N° 76 EPUL, 1963.

Application de la théorie de l'équivalence en géodésie et en statique

Par A. Ansermet

Anmerkung der Redaktion

Das Problem der Äquivalenz ist von mehreren Autoren bereits vor Jahrzehnten in der Literatur behandelt worden. Dabei waren sie sich – wie es heute scheint – nicht bewußt, daß sie den Begriff der Äquivalenz in verschiedener Weise definieren, so daß jede Publikation eines einzelnen Autors für sich richtig, jedoch mit analogen Publikationen anderer Autoren nicht vergleichbar ist. – Es ist ein Verdienst von Professor Ansermet, im folgenden Artikel diesen Umstand aufzudecken und insbesondere im dritten Beispiel zu zeigen, daß bei Vorliegen von Nebenbedingungen die Zahl der frei wählbaren Variablen geringer ist als ohne diese Nebenbedingungen. Mag diese Tatsache auch selbstverständlich erscheinen, so wird sie doch von anderen Autoren nirgends erwähnt.

Professor Ansermet ist auf die Frage der Äquivalenz beim Studium statischer Probleme gestoßen. Das Problem der Äquivalenz wurde in den letzten Jahren in der geodätischen Literatur seltener als früher behandelt. Es dürfte beim Studium von Satellitentriangulationen erneut eine Rolle spielen

F. Kobold

L'application de cette théorie, planimétriquement ou spatialement, avait donné lieu, dans notre numéro de mars 1960, à un article assez succinct (voir [4]). C'est un vaste problème susceptible d'être étendu aux systèmes hyperstatiques articulés («Stabfachwerke») en vue du calcul des ellipses et ellipsoïdes de déformation. Il y a en effet une corrélation étroite avec les compensations de mesures linéaires; c'est ce qu'un auteur exprima sous la forme: «Im dreidimensionalen Raum stimmen der einknotige, statisch beliebig unbestimmte Stabverband und der zugehörige überbestimmte Bogenschnitt völlig überein» ([2], p. 104). Ce ne sont plus les coordonnées des sommets d'un réseau qui varient, mais celles des nœuds d'un système; les côtés deviennent des barres, et grâce à la réalisation de l'équivalence on peut substituer à un système de n équations

initiales (aux erreurs ou aux déformations) un autre comptant n' équations ($n' \leq n$). Si $n' = n$, l'équivalence est complète ([3], p. 75); un cas intéressant est celui où $n' = u$ (u inconnues). Il n'y a plus surdétermination, ce qui est appréciable, mais alors $m_0^2 = [p_{vv}] : (n' - u) = 0/0$; en statique, c'est la déformation quadratique moyenne pour le poids unité.

Il doit y avoir équivalence non seulement pour les valeurs des inconnues mais pour leurs poids et les poids de fonctions des inconnues; en d'autres termes: les matrices des coefficients des équations normales et les matrices inverses aux coefficients de poids des inconnues subsistent sans changement. Les cas concrets, traités ci-après, sont choisis en admettant comme hypothèses: $n' = u$, puis $n' = n$. Le lecteur sait que tous les auteurs ne définissent pas l'équivalence de la même façon.

Si on donne le centre d'une ellipse ou d'un ellipsoïde, il faut connaître, en plus, trois éléments pour la courbe et six pour la surface; or deux tangentes suffisent pour l'ellipse si elles sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués. Pour l'ellipsoïde trois plans tangents suffisent si leurs points de contact sont les extrémités de trois diamètres mutuellement conjugués.

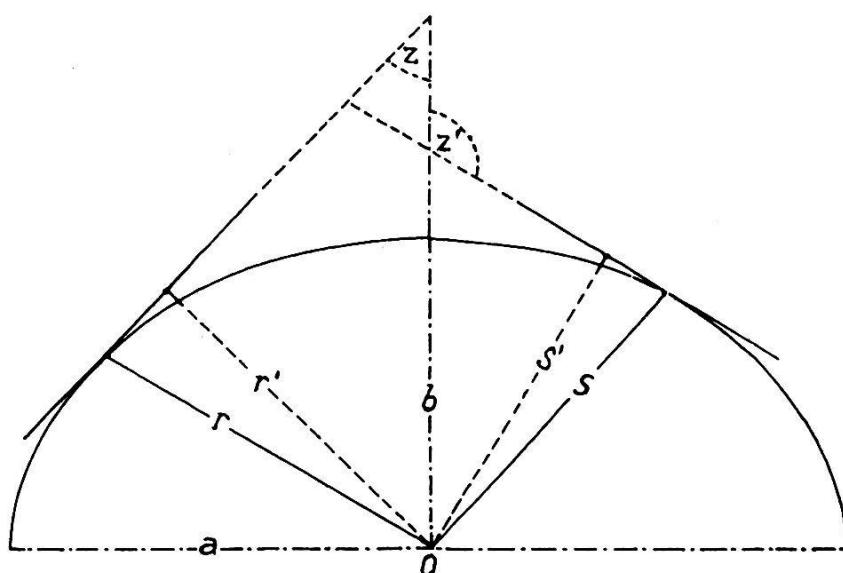
Avant de passer aux applications une remarque essentielle s'impose: l'orientation des axes de coordonnées est ici arbitraire en ce sens qu'on peut modifier cette orientation pour que les matrices des équations normales soient diagonales, ce qui facilite les calculs.

Premier exemple:

Détermination d'un point par des mesures linéaires ([4], p. 71)

Le système équivalent ne comprend plus que $n' = 2 = u$ mesures fictives, les deux inconnues étant les coordonnées du point.

Graphiquement ces mesures équivalentes permettent de tracer deux tangentes à l'ellipse (voir figure); ces droites sont parallèles aux dia-



mètres conjugués de longueurs $2r$ et $2s$, les poids fictifs étant respectivement (P_1) et (P_2) , tels que:

$$r'^2 = 1 : (P_1) \quad \text{et} \quad s'^2 = 1 : (P_2) \quad (\text{pour } m_0^2 = 1)$$

Ces r' et s' sont des rayons vecteurs de la podaire («Pedale») de l'ellipse par rapport à son centre; si les axes principaux sont $2a$ et $2b$, on a les relations géométriques connues:

$$r^2 + s^2 = a^2 + b^2 \text{ et } rs \cdot \sin(z' - z) = ab,$$

et celle moins connue:

$$\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{s'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = (P_1) + (P_2)$$

propriété d'invariance

on peut avoir:

$$r' = s', \quad r' = a \text{ ou } b, \quad s' = b \text{ ou } a$$

Les deux équations fictives sont caractérisées par les valeurs

	a_i	b_i	Poids
$v_1 = 0$	$\cos z$	$\sin z$	π_1
$v_2 = 0$	$\cos z'$	$\sin z'$	π_2

$$\text{d'où: } [\pi aa] : [\pi bb] : (+[\pi ab]) = Q_{22} : Q_{11} : (-Q_{12}),$$

ces trois derniers éléments étant les coefficients aux poids non fictifs des inconnues; éliminons π_1 et π_2 :

$$\begin{vmatrix} Q_{22} & 1 & 1 \\ Q_{11} & \operatorname{tg}^2 z & \operatorname{tg}^2 z' \\ -Q_{12} & \operatorname{tg} z & \operatorname{tg} z' \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ou} \quad Q_{22} \operatorname{tg} z \operatorname{tg} z' + Q_{12} (\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z') + Q_{11} = 0.$$

La correspondance entre ces variables est involutive.

Cas concret. Admettons le parallélisme des axes principaux de l'ellipse et des axes de coordonnées;

$$Q_{12} = 0, \quad \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} z' = -\frac{Q_{11}}{Q_{22}}$$

$$\operatorname{tg} z = -1, \quad \sin^2 z = \cos^2 z = 0,5; \quad \operatorname{tg} z' = +0,75,$$

$$\sin^2 z' = 0,36, \quad \cos^2 z' = 0,64.$$

Posons: $Q_{22} = 1$, $Q_{11} = 0,75$

$$\frac{1}{(P_2)} = 0,64 Q_{11} + 0,36 Q_{22} = 0,84 \quad \frac{1}{(P_1)} = 0,5 (1,00 + 0,75) = 0,875$$

Invariance:

$$(P_2) + (P_1) = \frac{1}{0,84} + \frac{1}{0,875} = 2,33 = \\ = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{Q_{11}} + \frac{1}{Q_{22}} = 1,33 + 1,00 \quad (m_0^2 = 1)$$

Les poids fictifs varient donc entre les limites 1,00 et 1,33.

Second exemple: Détermination d'un point spatial ou d'un nœud

$$n = 4 \quad n' = u = 3$$

Les équations initiales ont la forme classique:

$$-f_i + v_i = a_i dx + b_i dy + c_i dz \quad (\text{poids } p_i) \quad a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1,$$

les inconnues étant les variations des coordonnées.

En hyperstatique les poids p_i sont donnés par le quotient: $ES : L$, E étant le coefficient d'élasticité, S et L les sections transversales et longueurs des barres, tandis que $v = \frac{TL}{ES}$. (T = tension dans la barre). La solution provisoire est appelée souvent état fondamental [«Grundsystem»].) Considérons les valeurs numériques ci-après.

Côtés ou barres	a_i	b_i	c_i	p_i	P_i
1-2	+ 0,817	0,00	+ 0,577	0,64	0,915
1-3	0,00	- 0,817	+ 0,577	0,96	1,20
1-4	- 0,817	0,00	+ 0,577	0,64	0,915
1-5	0,00	+ 0,817	+ 0,577	0,96	1,20

1 : 0,915 = 1,093; 1 : 1,20 = 0,833. P_i : poids à posteriori. Le nœud 1 est le sommet libre d'une pyramide.

Les matrices mutuellement inverses des équations normales et aux coefficients de poids sont diagonales, ce qui facilite le calcul des P_i :

$$1 : P_1 = 1 : P_3 = \overline{0,817^2} \times 1,170 + \overline{0,577^2} \times 0,940 = 1,093 ;$$

$$\text{de même } \frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_4} = 0,833$$

Les matrices sont:

$$\begin{bmatrix} 0,854 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,280 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,067 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1,170 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,781 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,940 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

$$Contrôle: [p_i : P_i]_1^4 = 2(0,64 \times 1,093 + 0,96 \times 0,833) = 3,00 = u.$$

Équivalence. Il y a aussi une propriété d'invariance pour les trois poids fictifs; mais auparavant il faut déterminer les coefficients des trois équations nouvelles et fictives. Dans le cas particulier six coefficients seulement ont des valeurs arbitraires à cause des relations: $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$; ce cas ne fut pas toujours traité dans la littérature.

Pour l'exemple numérique ci-dessus on trouve:

Côtés ou barres	a_i	b_i	c_i	$p_i = (P_i)$
$v_1 = 0$	1-2'	+ 0,653	+ 0,490	+ 0,577
$v_2 = 0$	1-3'	0,00	- 0,817	+ 0,577
$v_3 = 0$	1-4'	- 0,653	+ 0,490	+ 0,577

Les matrices inverses mutuellement sont les mêmes que ci-dessus.

Les axes principaux de l'ellipsoïde d'erreur ou de déformation sont 2 a , 2 b , 2 c

$$a^2 = m_0^2 Q_{11} \quad b^2 = m_0^2 Q_{22} \quad c^2 = m_0^2 Q_{33} \quad (m_0^2 = 1),$$

tout ceci en admettant les mêmes p_i en géodésie et statique.

Théoriquement une autre solution serait la suivante:

Côtés ou barres	a_i	b_i	c_i	$p_i = (P_i)$
$v_1 = 0$	1-2''	+ 0,633	+ 0,775	0
$v_2 = 0$	1-3''	+ 0,633	- 0,775	0
$v_3 = 0$	1-4''	0	0	+ 1

$$2 \times 1,067$$

$$Invariance: 1,00 + 1,20 + 1,00 = \overline{0,854 + 1,28} + 1,067 = 3,20.$$

Les poids fictifs varient entre les limites 0,854 et 1,28; on a donc une certaine liberté.

On a en effet (voir [4]):

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{r'}\right)^2 + \left(\frac{1}{s'}\right)^2 + \left(\frac{1}{t'}\right)^2$$

Ces r' , s' , t' sont des rayons vecteurs de la surface podaire («Fusspunktfläche») de l'ellipsoïde par rapport à son centre; ce sont les perpendiculaires abaissées sur trois plans tangents parallèles à trois plans diamétraux conjugués.

Troisième exemple: Equivalence complète pour une paire de points P et P'

$$n = n' = 11, \quad u = 4, \quad i = 1, 2 \dots 11.$$

$$-f_i + v_i = a_i dx \times b_i dy + c_i dx' + d_i dy' \quad (\text{poids } p_i)$$

$$a_i^2 + b_i^2 = c_i^2 + d_i^2 = 1$$

a_i	b_i	c_i	d_i	p_i	Côtés	a_i	b_i	c_i	d_i
+0,342	+0,940			1	$P-6$	+0,375	+0,927		
+0,906	+0,423			1,2	$P-7$	+0,891	+0,454		
+0,643	-0,766			1	$P-8$	+0,616	-0,788		
+0,423	-0,906			1,2	$P-9$	+0,454	-0,891		
-0,985	-0,174			1	$P-10$	-0,990	-0,139		
+1		-1		p	$P-P'$	+1		-1	
		+0,6	+0,8	1,3	$P'-6'$			+0,707	+0,707
		+0,8	-0,6	1,3	$P'-7'$			+0,707	-0,707
		+0,259	+0,966	1	$P'-8'$			+0,407	+0,914
		+0,707	-0,707	1	$[pff \cdot 4]$			+0,588	-0,809
		-0,966	-0,259	1	$= [pvv]$			-0,995	-0,105
					$P'-10'$				

Il suffit d'écrire les matrices des équations normales:

$$\begin{bmatrix} 2,7+p & 0 & -p & 0 \\ 0 & 2,7 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 2,8+p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,8 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} p+1,5p_1+p_2 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 1,5p_1+p_2 & 0 & 0 \\ -p & 0 & p+p_3+1,5p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3+1,5p_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Equivalece: } 2,7 = 1,5 p_1 + p_2, \quad 2,8 = p_3 + 1,5 p_4$$

Si $p = 0$, on a en P et P' des cercles d'erreur. Il n'y a plus de liaison PP' .

Considérations finales. Dans le cas de trois inconnues, traité ci-dessus, il n'y a pas d'éléments surabondants; ce cas est plus d'une fois développé dans la littérature, mais dans l'hypothèse où les coefficients des équations initiales (aux erreurs, aux déformations) sont mutuellement indépendants, ce qui n'est pas réalisé ici.

Le dernier exemple est consacré à un double-point ou un double-nœud dans le plan; pour rendre le calcul plus clair des simplifications furent apportées, soit: $[paa] = [pbb]$; $[pcc] = [pdd]$; les autres coefficients des équations normales sont nuls sauf $[pac]$. A cet effet, les côtés ou les barres sont deux à deux égaux et perpendiculaires ou trois à trois égaux et inclinés à 120° mutuellement. Les conditions d'équivalence sont alors aisées à établir, et il y a des éléments surabondants.

Les coefficients a et b sont: $a = \cos z$, $b = \sin z$; considérons les valeurs z et $z + 90^\circ$ (poids p), puis z' et $z' + 90^\circ$ (poids p'); la condition d'équivalence est: $p + p' = [paa] = [pbb] = \text{const.}$, mais les quatre valeurs z , z' , p et p' peuvent varier.

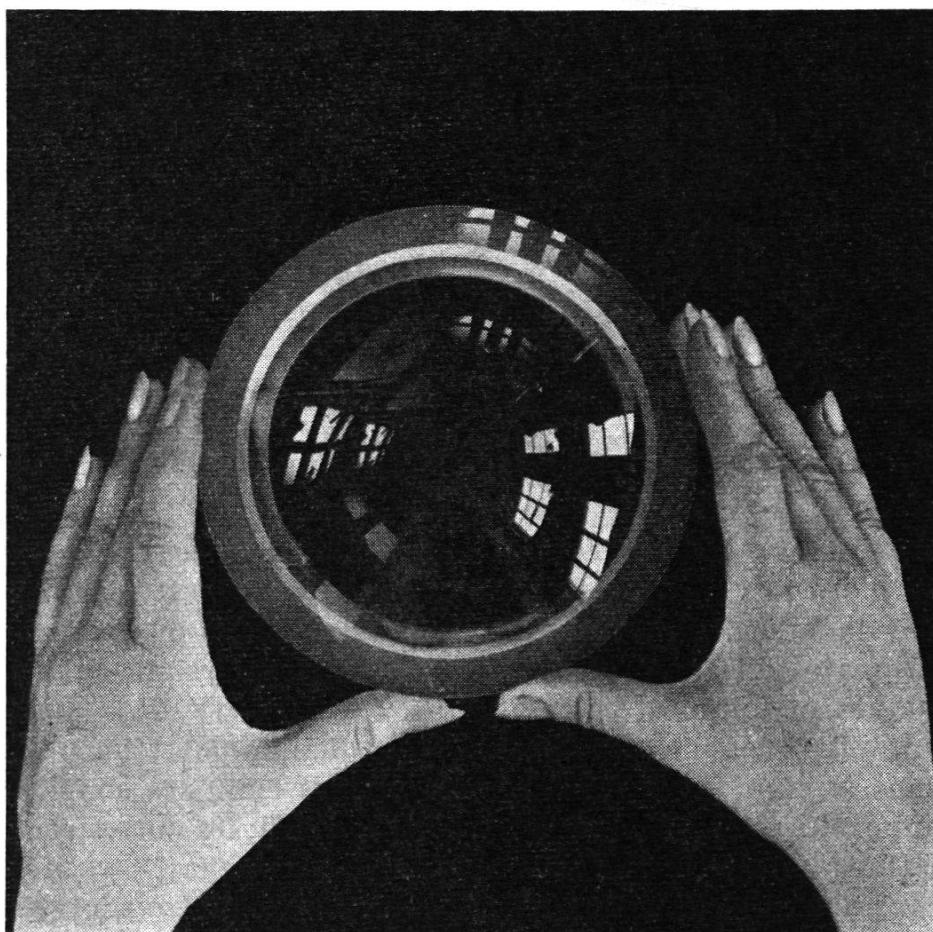
Littérature

- [1] *C.F. Baeschlin*, Ausgleichungsrechnung (Cours ETH).
- [2] *K. Friedrich*, Beweise für die Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate (ZfV, 1943).
- [3] *H. Wolf*, Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (Hamburg).
- [4] *Ansermet*, Théorie de l'équivalence (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, mars 1960).

Hinweise auf neue Instrumente

Ein neues Weitwinkelobjektiv von Wild Heerbrugg

Neben den üblichen panchromatischen Emulsionen werden heute in der Luftbildmessung und besonders auch für die Photointerpretation in zunehmendem Maße Filme mit Infrarotemulsionen verwendet. Dieser



Das neue Weitwinkelobjektiv Wild 6" Universal-Aviogon $f: 5,6$