Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 12 · LXI. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Dezember 1963

Développements mathématiques pour l'orientation numérique de vues aériennes quelconques dans un stéréorestituteur

Par D^r W. K. Bachmann,
professeur à l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne

(Suite et fin)

Chapitre III *Programmes N^o 403.45 et N^o 404.1*

Calcul de la déformation de l'image plastique avant et après l'orientation absolue

§ 1. Exposé du problème

Au chapitre I, nous avons entre autres calculé les coefficients de poids et de corrélation des éléments d'orientation $\varkappa_B$, φ_B, ω_B, by_B, bz_B ainsi que l'erreur moyenne μ à craindre sur l'unité de poids. Nous en avons ensuite déduit au chapitre II les coefficients de poids et de corrélation des coordonnées X, Y, Z et les *erreurs moyennes* μ_x, μ_y, μ_z des n points observés.

Ce qui nous intéresse maintenant, ce sont les *déformations vraies* δx_i, δy_i, δz_i aux points P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) de l'image plastique, engendrées par les *erreurs vraies* $d\varkappa_B$, $d\varphi_B$, $d\omega_B$, dby_B, dbz_B des éléments d'orientation relative. Elles seront données par des équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= f_1\,(x_i, y_i, z_i; d\varkappa_B, d\varphi_B, d\omega_B, dby_B, dbz_B) \\ \delta y_i &= f_2\,(\text{mêmes variables}) \\ \delta z_i &= f_3\,(\text{mêmes variables}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.1.1)}$$

où f_1, f_2, f_3 désignent des fonctions connues des variables figurant entre parenthèses. Ces fonctions sont linéaires par rapport à $d\varkappa_B$, $d\varphi_B$, $d\omega_B$,

dby_B, dbz_B. Par conséquent, ces déformations dépendent d'une part des coordonnées du point observé et d'autre part de la valeur des éléments d'orientation $\varkappa_B, \ldots, bz_B$. Mais nous ne pouvons pas attribuer n'importe quelle valeur à $d\varkappa_B, \ldots, dbz_B$, car les parallaxes verticales doivent rester entre certaines limites. De plus, $d\varkappa_B, \ldots, dbz_B$ jouent le rôle de variables aléatoires qui sont *dépendantes,* ce qui complique singulièrement le problème. Mais nous pouvons essayer d'exprimer les variables dépendantes $d\varkappa_B, \ldots, dbz_B$ en fonction de 5 nouvelles variables aléatoires *indépendantes* $T_1, T_2, \ldots, T_5$. On y parvient moyennant une substitution linéaire qui sera indiquée au § 2. En désignant par $\mu_{T_1}, \ldots, \mu_{T_5}$ les erreurs moyennes à craindre sur ces nouvelles variables, l'ellipsoïde d'erreur moyenne à 5 dimensions est défini par l'équation

$$\boxed{\frac{T_1^2}{\mu^2_{T_1}} + \ldots + \frac{T_5^2}{\mu^2_{T_5}} = 1} \tag{III.1.2}$$

Si $k_1, k_2, \ldots, k_5$ désignent 5 paramètres, non tous nuls, l'ellipsoïde d'erreur peut être représenté sous forme paramétrique par les équations

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_5^2}} \cdot \mu_{T_1} = \frac{k_1}{\sqrt{[k^2]}} \cdot \mu_{T_1} \\ &\vdots \\ T_5 &= \frac{k_5}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_5^2}} \cdot \mu_{T_5} = \frac{k_5}{\sqrt{[k^2]}} \cdot \mu_{T_5} \end{aligned}} \tag{III.1.3}$$

ce que l'on vérifie immédiatement en introduisant ces expressions dans (III.1.2).

§ 2. Introduction de variables indépendantes à la place de $\varkappa_B, \varphi_B, \omega_B, by_B, bz_B$

Les unités pour les coefficients de poids et de corrélation précédemment calculés sont

Unités:			
$\varkappa, \varphi, \omega$	:	1^{gr}	(III.2.1)
by, bz, μ	:	1 mm	

Désignons les nouvelles variables par $T_1, T_2, \ldots, T_5$. Nous allons les introduire à l'aide de la substitution suivante:

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= + d\varkappa_B \\ T_2 &= + d\varkappa_B + \alpha_2\, d\varphi_B \\ T_3 &= + d\varkappa_B + \alpha_3\, d\varphi_B + \beta_3\, d\omega_B \\ T_4 &= + d\varkappa_B + \alpha_4\, d\varphi_B + \beta_4\, d\omega_B + \gamma_4\, dby_B \\ T_5 &= + d\varkappa_B + \alpha_5\, d\varphi_B + \beta_5\, d\omega_B + \gamma_5\, dby_B + \delta_5\, dbz_B \end{aligned}} \qquad \text{(III.2.2)}$$

Puisque ces nouvelles variables sont par hypothèse indépendantes, nous devons avoir

$$\boxed{Q_{T_i\,T_j} = 0 \quad \text{pour } i \neq j} \qquad \text{(III.2.3)}$$

Ecrivons les conditions (III.2.3) à partir de la substitution (III.2.2); nous avons

$$\left.\begin{aligned} Q_{T_1 T_2} &= 0 \\ Q_{T_1 T_3} &= 0 \\ Q_{T_1 T_4} &= 0 \\ Q_{T_1 T_5} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ donnent } \boxed{\begin{aligned} Q_{\varkappa\, T_2} &= 0 \\ Q_{\varkappa\, T_3} &= 0 \\ Q_{\varkappa\, T_4} &= 0 \\ Q_{\varkappa\, T_5} &= 0 \end{aligned}} \qquad \text{(III.2.4)}$$

$$Q_{T_2 T_3} = (Q_{T_1} + \alpha_2\, Q_\varphi) \cdot Q_{T_3} = Q_{T_1 T_3} + \alpha_2\, Q_{\varphi\, T_3} \text{ d'où } Q_{\varphi\, T_3} = 0$$

On a donc maintenant les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} Q_{T_2 T_3} &= 0 \\ Q_{T_2 T_4} &= 0 \\ Q_{T_2 T_5} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ donnent } \boxed{\begin{aligned} Q_{\varphi\, T_3} &= 0 \\ Q_{\varphi\, T_4} &= 0 \\ Q_{\varphi\, T_5} &= 0 \end{aligned}} \qquad \text{(III.2.5)}$$

et puis

$$\begin{aligned} Q_{T_3 T_4} &= (Q_\varkappa + \alpha_3\, Q_\varphi + \beta_3\, Q_\omega) \cdot Q_{T_4} = 0 \\ &= Q_{\varkappa\, T_4} + \alpha_3\, Q_{\varphi\, T_4} + \beta_3\, Q_{\omega\, T_4} = 0 \quad \text{d'où} \quad Q_{\omega\, T_4} = 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\left.\begin{aligned} Q_{T_3 T_4} &= 0 \\ Q_{T_3 T_5} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ donnent } \boxed{\begin{aligned} Q_{\omega\, T_4} &= 0 \\ Q_{\omega\, T_5} &= 0 \end{aligned}} \qquad \text{(III.2.6)}$$

et finalement

$$Q_{T_4 T_5} = 0 \qquad \text{donne} \qquad \boxed{Q_{by\, T_5} = 0} \qquad \text{(III. 2.7)}$$

Nous avons résumé les résultats obtenus au tableau (III.2.8) ci-après où les coefficients de corrélation indiqués par une croix doivent être nuls.

Q_{ij}	$\varkappa$	φ	ω	by	bz
T_1					
T_2	$\times$				
T_3	$\times$	$\times$			
T_4	$\times$	$\times$	$\times$		
T_5	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

(III.2.8)

Nous obtenons ainsi 10 conditions, et comme la substitution (III.2.2) comporte 10 paramètres, le problème peut être résolu. En appliquant de nouveau le calcul symbolique des coefficients de poids, les équations (III.2.8) donnent lieu au système (III.2.9) ci-après où les coefficients $\alpha_2, \ldots, \delta_5$ figurant à la première ligne doivent être multipliés par les coefficients de poids et de corrélation indiqués au tableau.

Connaissant ainsi les coefficients $\alpha_2, \ldots, \delta_5$ des équations (III.2.2), nous allons en déduire la matrice inverse, afin de pouvoir calculer $\varkappa$, φ, ω, by, bz en fonction de $T_1, \ldots, T_5$. Cette matrice inverse est donnée par les équations (III.2.10) ci-après où tous les termes ε_{ij} situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{array}{ll}
d\varkappa_B{}^{\text{gr}} & = + \varepsilon_{11}\, T_1 + \varepsilon_{12}\, T_2 + \varepsilon_{13}\, T_3 + \varepsilon_{14}\, T_4 + \varepsilon_{15}\, T_5 \\
d\varphi_B{}^{\text{gr}} & = + \varepsilon_{21}\, T_1 + \varepsilon_{22}\, T_2 + \varepsilon_{23}\, T_3 + \varepsilon_{24}\, T_4 + \varepsilon_{25}\, T_5 \\
d\omega_B{}^{\text{gr}} & = + \varepsilon_{31}\, T_1 + \varepsilon_{32}\, T_2 + \varepsilon_{33}\, T_3 + \varepsilon_{34}\, T_4 + \varepsilon_{35}\, T_5 \\
dby_B{}^{\text{mm}} & = + \varepsilon_{41}\, T_1 + \varepsilon_{42}\, T_2 + \varepsilon_{43}\, T_3 + \varepsilon_{44}\, T_4 + \varepsilon_{45}\, T_5 \\
dbz_B{}^{\text{mm}} & = + \varepsilon_{51}\, T_1 + \varepsilon_{52}\, T_2 + \varepsilon_{53}\, T_3 + \varepsilon_{54}\, T_4 + \varepsilon_{55}\, T_5
\end{array} \qquad \text{(III.2.10)}$$

Nous avons ainsi tout ce qu'il nous faut pour passer des anciennes variables $\varkappa_B$, φ_B, ω_B, by_B, bz_B aux nouvelles $T_1, \ldots, T_5$ et vice versa. D'après (III.1.3), un ensemble de 5 valeurs $k_1, \ldots, k_5$, non toutes nulles, donne lieu à des valeurs bien déterminées de $T_1, \ldots, T_5$ et par conséquent aussi de $d\varkappa_B$, $d\varphi_B$, $d\omega_B$, dby_B, dbz_B; nous dirons qu'il définit *un état de l'image plastique.*

§ 3. *Introduction de l'orientation absolue*

Supposons qu'on calcule l'un quelconque des états en choisissant $k_1, \ldots, k_5$. On a dans ce cas affaire à des valeurs bien déterminées de $d\varkappa_B, \ldots, dbz_B$ qu'on a calculées à partir de $T_1, \ldots, T_5$. On peut dès lors calculer pour chacun des n points de l'image plastique les déformations δx_i, δy_i, δz_i. Ce sont donc les *erreurs vraies* des coordonnées de ces points, exprimées en fonction des *erreurs vraies* $d\varkappa_B, \ldots, dbz_B$ des éléments de l'orientation relative. Mais ces déformations δx_i, δy_i, δz_i peuvent ensuite être éliminées partiellement par un changement convenable de l'orien-

(III.2.9)

	α_2	α_3	β_3	α_4	β_4	γ_4	α_5	β_5	γ_5	δ_5	1	
$Q_{\varkappa} T_2$	$Q_{\varkappa\varphi}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$Q_{\varkappa\varkappa}$	$= 0$
$Q_{\varkappa} T_3$	.	$Q_{\varkappa\varphi}$	$Q_{\varkappa\omega}$	.	.	.	.	.	.	.	$Q_{\varkappa\varkappa}$	$= 0$
$Q_{\varphi} T_3$	.	$Q_{\varphi\varphi}$	$Q_{\varphi\omega}$	.	.	.	.	.	.	.	$Q_{\varphi\varkappa}$	$= 0$
$Q_{\varkappa} T_4$	.	.	.	$Q_{\varkappa\varphi}$	$Q_{\varkappa\omega}$	$Q_{\varkappa\, by}$	.	.	.	.	$Q_{\varkappa\varkappa}$	$= 0$
$Q_{\varphi} T_4$	.	.	.	$Q_{\varphi\varphi}$	$Q_{\varphi\omega}$	$Q_{\varphi\, by}$	.	.	.	.	$Q_{\varkappa\varphi}$	$= 0$
$Q_{\omega} T_4$	.	.	.	$Q_{\omega\varphi}$	$Q_{\omega\omega}$	$Q_{\omega\, by}$	.	.	.	.	$Q_{\omega\varkappa}$	$= 0$
$Q_{\varkappa} T_5$	.	.	.	.	.	.	$Q_{\varkappa\varphi}$	$Q_{\varkappa\omega}$	$Q_{\varkappa\, by}$	$Q_{\varkappa\, bz}$	$Q_{\varkappa\varkappa}$	$= 0$
$Q_{\varphi} T_5$	.	.	.	.	.	.	$Q_{\varphi\varphi}$	$Q_{\varphi\omega}$	$Q_{\varphi\, by}$	$Q_{\varphi\, bz}$	$Q_{\varphi\varkappa}$	$= 0$
$Q_{\omega} T_5$	.	.	.	.	.	.	$Q_{\omega\varphi}$	$Q_{\omega\omega}$	$Q_{\omega\, by}$	$Q_{\omega\, bz}$	$Q_{\omega\varkappa}$	$= 0$
$Q_{by} T_5$	.	.	.	.	.	.	$Q_{by\,\varphi}$	$Q_{by\,\omega}$	$Q_{by\, by}$	$Q_{by\, bz}$	$Q_{by\,\varkappa}$	$= 0$

tation absolue de l'image plastique. Nous voulons maintenant voir quels doivent être

a) le changement d'échelle,
b) les rotations,
c) les translations

à donner à l'image plastique pour que les déformations résiduelles totales deviennent aussi petites que possible. Suivant ce qu'on entend par «aussi petites que possible» on a affaire à différentes solutions. Nous allons choisir celle qui, à notre avis, correspond le mieux aux conditions pratiques, *en séparant la planimétrie de l'altimétrie.* Introduisons les désignations suivantes pour les n points de l'image plastique:

Coordonnées initiales des n points, rapportées à leur centre de gravité P_0' (x_0', y_0', z_0')

Orientation relative correcte.
Echelle des coordonnées 1 : 1 Unité: 1 cm (III.3.1)

N° P_1 x_1' y_1' z_1'
⋮
N° P_n x_n' y_n' z_n'

Coordonnées variées des n points, rapportées à leur centre de gravité P_0'' (x_0'', y_0'', z_0'')

Orientation relative entachée des erreurs vraies
$d\varkappa_B$, $d\varphi_B$, $d\omega_B$, dby_B, dbz_B (III.3.2)
Echelle des coordonnées 1 : 1 Unité: 1 cm

N° P_1 x_1'' y_1'' z_1''
⋮
N° P_n x_n'' y_n'' z_n''

Etant donné que les erreurs résiduelles ne peuvent être minima que si les deux centres de gravité P_0' et P_0'' sont en coïncidence – ce qui est un résultat bien connu – nous introduisons dans (III.3.1) et (III.3.2) directement les coordonnées réduites au centre de gravité correspondant. Pour simplifier la programmation, nous laissons dans cette phase les coordonnées variées fixes et nous appliquerons aux coordonnées initiales les transformations mathématiques correspondant à l'orientation absolue de l'image plastique. Nous allons considérer successivement l'orientation absolue en planimétrie, puis en altimétrie.

a) *Planimétrie*

Au point de vue de l'ajustage de la planimétrie, l'image plastique doit subir une rotation $d\alpha$ autour de l'axe vertical passant par le centre de gravité P_0' et une modification d'échelle. En introduisant les coordonnées polaires s et α (voir figure III.1), nous obtenons

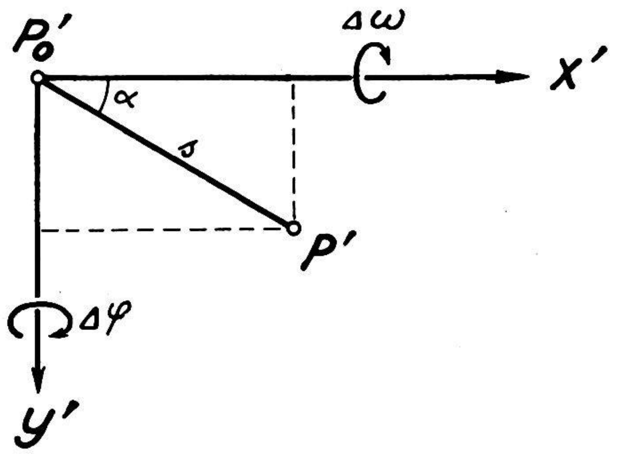

fig. III.1

$$x' = s \cdot \cos\alpha \qquad d_1 x' = -s \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = -y' \cdot d\alpha$$
$$y' = s \cdot \sin\alpha \qquad d_1 y' = +s \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha = +x' \cdot d\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_1 x_i' &= -y_i' \cdot d\alpha \\ d_1 y_i' &= +x_i' \cdot d\alpha \end{aligned}} \qquad \text{(III.3.3)}$$

Pour *la modification de l'échelle,* nous posons

$$\boxed{\begin{aligned} d_2 x_i' &= \lambda \cdot x_i' \\ d_2 y_i' &= \lambda \cdot y_i' \end{aligned}} \qquad \text{(III.3.4)}$$

et les coordonnées transformées (x_i''', y_i''') après la rotation et la modification d'échelle sont ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} x_i''' &= x_i' + \lambda \cdot x_i' - d\alpha \cdot y_i' \\ y_i''' &= y_i' + \lambda \cdot y_i' + d\alpha \cdot x_i' \end{aligned}} \qquad \text{(III.3.5)}$$

Calculons maintenant les différences

$$\boxed{\begin{aligned} v_{x_i} &= x_i'' - x_i''' = -x_i' \cdot \lambda + y_i' \cdot d\alpha + (x_i'' - x_i') \\ v_{y_i} &= y_i'' - y_i''' = -y_i' \cdot \lambda - x_i' \cdot d\alpha + (y_i'' - y_i') \end{aligned}} \qquad \text{(III.3.6)}$$

En posant

$$\boxed{x_i'' - x_i' = \varepsilon_{x_i} \quad y_i'' - y_i' = \varepsilon_{y_i}} \tag{III.3.7}$$

les équations (III.3.6) deviennent

$$\boxed{\begin{aligned} v_{x_i} &= - x_i' \cdot \lambda + y_i' \cdot d\alpha + \varepsilon_{x_i} \\ v_{y_i} &= - y_i' \cdot \lambda - x_i' \cdot d\alpha + \varepsilon_{y_i} \end{aligned}} \tag{III.3.8}$$

Nous devons maintenant calculer les termes absolus ε_{x_i} et ε_{y_i}. Comme nous avons dans la mémoire de la calculatrice les grandeurs x_i, y_i, δx_i, δy_i tandis que les coordonnées réduites aux centres de gravité P_0' et P_0'' nous manquent encore, nous procédons comme il suit:

1° Réduction au centre de gravité P_0'

X_i, Y_i = coordonnées initiales des n points

Centre de gravité P_0' (x_0', y_0'):

$$\boxed{x_0' = \frac{1}{n}[x_i] \quad y_0' = \frac{1}{n}[y_i]} \tag{III.3.9}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_i' &= x_i - x_0' \\ y_i' &= y_i - y_0' \end{aligned}} \quad \text{Coordonnées réduites au centre de gravité } P_0' \tag{III.3.10}$$

2° Réduction au centre de gravité P_0''

$$\left\{ \begin{aligned} x_i + \delta x_i \\ y_i + \delta y_i \end{aligned} \right\} \quad \text{coordonnées variées des } n \text{ points}$$

Centre de gravité P_0'' (x_0'', y_0'')

$$\boxed{\begin{aligned} x_0'' &= \frac{1}{n}[x_i] + \frac{1}{n}[\delta x_i] \\ y_0'' &= \frac{1}{n}[y_i] + \frac{1}{n}[\delta y_i] \end{aligned}} \tag{III.3.11}$$

En posant maintenant

$$\boxed{\delta x_0 = \frac{1}{n}[\delta x_i] \qquad \delta y_0 = \frac{1}{n}[\delta y_i]} \tag{III.3.12}$$

et en tenant compte de (III.3.9), les équations (III.3.11) deviennent

$$\boxed{\begin{aligned} x_0'' &= x_0' + \delta x_0 \\ y_0'' &= y_0' + \delta y_0 \end{aligned}} \qquad \text{(III.3.13)}$$

et les coordonnées (x_i'', y_i''), réduites au centre de gravité P_0'', sont dès lors

$$\boxed{\begin{aligned} x_i'' &= (x_i + \delta x_i) - x_0'' = x_i - x_0' + \delta x_i - \delta x_0 \\ y_i'' &= (y_i + \delta y_i) - y_0'' = y_i - y_0' + \delta y_i - \delta y_0 \end{aligned}} \qquad \text{(III.3.14)}$$

En posant alors

$$\boxed{\begin{aligned} (\delta x_i)_{\text{réd.}} &= \delta x_i - \delta x_0 = \delta x_i - \frac{1}{n}[\delta x_i] \\ (\delta y_i)_{\text{réd.}} &= \delta y_i - \delta y_0 = \delta y_i - \frac{1}{n}[\delta y_i] \end{aligned}} \qquad \text{(III.3.15)}$$

Les équations (III.3.14) deviennent

$$\boxed{\begin{aligned} x_i'' &= x_i - x_0' + (\delta x_i)_{\text{réd.}} \\ y_i'' &= y_i - y_0' + (\delta y_i)_{\text{réd.}} \end{aligned}} \qquad \text{(III.3.16)}$$

En considérant maintenant les équations (III.3.7), (III.3.10) et (III.3.16), nous obtenons

$$\boxed{\varepsilon_{x_i} = x_i'' - x_i' = (\delta x_i)_{\text{réd.}} \qquad \varepsilon_{y_i} = y_i'' - y_i' = (\delta y_i)_{\text{réd.}}} \qquad \text{(III.3.17)}$$

Les grandeurs ε_{x_i} et ε_{y_i} se calculent donc simplement par réduction des δx_i et δy_i; nous les introduisons ensuite dans les équations (III.3.8).

Afin de pouvoir appliquer par analogie les formules de la méthode des moindres carrés aux équations (III.3.8), nous nous proposons de calculer les inconnues λ et $d\alpha$ de façon qu'on ait

$$\boxed{[v_{x_i} v_{x_i}] + [v_{y_i} v_{y_i}] = \text{minimum.}} \qquad \text{(III.3.18)}$$

Dans ces conditions, les relations (III.3.8) jouent le rôle d'équations aux erreurs donnant lieu aux équations normales suivantes:

$$\left\{[x_i' x_i'] + [y_i' y_i']\right\} \lambda - [x_i' \varepsilon_{x_i}] - [y_i' \varepsilon_{y_i}] = 0$$
$$\left\{[x_i' x_i'] + [y_i' y_i']\right\} d\alpha + [y_i' \varepsilon_{x_i}] - [x_i' \varepsilon_{y_i}] = 0 \qquad \text{(III.3.19)}$$

En introduisant ensuite ces valeurs de λ et de $d\alpha$ dans les équations (III.3.8), on trouve les valeurs de v_{x_i} et v_{y_i} pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Finalement nous calculerons encore pour chaque état la valeur de

$$f_s = \sqrt{\frac{[v_{x_i} v_{x_i}] + [v_{y_i} v_{y_i}]}{n}} \qquad \text{(III.3.20)}$$

qui caractérise en quelque sorte la précision planimétrique de l'état calculé.

b) Altimétrie

Le changement d'échelle que nous venons d'introduire modifie naturellement aussi les altitudes. Il transforme les z_i' (voir équations III.3.1 et III.3.4) en

$$(1 + \lambda)\, z_i' = z_i' + \lambda \cdot z_i' \qquad \text{(III.3.21)}$$

D'autre part, nous devons encore introduire les rotations $\Delta\omega$ et $\Delta\varphi$ autour des axes X' et Y' (voir figure III.1) ainsi que la translation verticale Δz. En tenant compte de toutes ces variations, la cote initiale z_i' devient z_i''' et nous avons

$$z_i''' = z_i' + \lambda \cdot z_i' + \Delta z - y_i' \cdot \Delta\omega + x_i' \cdot \Delta\varphi \qquad \text{(III.3.22)}$$

En posant maintenant

$$v_{z_i} = z_i'' - z_i''' \qquad \text{(III.3.23)}$$

nous obtenons

$$v_{z_i} = -\Delta z + y_i' \cdot \Delta\omega - x_i' \cdot \Delta\varphi + \left\{z_i'' - z_i' - \lambda \cdot z_i'\right\} \qquad \text{(III.3.24)}$$

Mais nous avons

$$\delta z_0 = \frac{1}{n}[\delta z_i] \qquad (\delta z_i)_{\text{réd.}} = \delta z_i - \delta z_0$$
$$z_i'' - z_i' = (\delta z_i)_{\text{réd.}} \qquad \text{(III.3.25)}$$

et en posant

$$\boxed{\varepsilon_{z_i} = (\delta z_i)_{\text{réd.}} - \lambda \cdot z_i'} \tag{III.3.26}$$

l'équation (III.3.24) devient

$$\boxed{v_{z_i} = -\Delta z + y_i' \cdot \Delta\omega - x_i' \cdot \Delta\varphi + \varepsilon_{z_i}} \tag{III.3.27}$$

Comme précédemment nous interprétons maintenant les relations (III.3.27) comme équations aux erreurs (ce qui n'est rien d'autre qu'une convention) et les équations normales deviennent ainsi

$$\boxed{\begin{array}{c} n \cdot \Delta z - [\varepsilon_{z_i}] = 0 \\ +[y_i' y_i'] \cdot \Delta\omega - [y_i' x_i'] \cdot \Delta\varphi + [y_i' \cdot \varepsilon_{z_i}] = 0 \\ -[y_i' x_i'] \cdot \Delta\omega + [x_i' x_i'] \cdot \Delta\varphi - [x_i' \cdot \varepsilon_{z_i}] = 0 \\ \varepsilon_{z_i} = (\delta z_i)_{\text{réd.}} - \lambda \cdot z_i' \end{array}} \tag{III.3.28}$$

La résolution de ces trois équations nous donne alors

$$\Delta = [y_i' y_i'] \cdot [x_i' x_i'] - [y_i' x_i'] \cdot [y_i' x_i'] \tag{III.3.29}$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{\Delta} \left\{ -[x_i' x_i'] [y_i' \cdot \varepsilon_{z_i}] + [y_i' x_i'] \cdot [x_i' \cdot \varepsilon_{z_i}] \right\} \tag{III.3.30}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\Delta} \left\{ +[y_i' y_i'] \cdot [x_i' \cdot \varepsilon_{z_i}] - [y_i' x_i'] \cdot [y_i' \cdot \varepsilon_{z_i}] \right\} \tag{III.3.31}$$

$$\Delta z = + \frac{[\varepsilon_{z_i}]}{n} \tag{III.3.32}$$

Une fois la valeur des inconnues calcuée, on obtient les v_{z_i} à l'aide des équations (III.3.27) et nous déterminons pour finir la moyenne quadratique

$$\boxed{f_z = \sqrt{\frac{[v_z v_z]}{n}}} \tag{III.3.33}$$

pour chaque état.

§ 4. *Influence des différentes variables d'orientation sur la déformation de l'image plastique*

Nous voulons maintenant étudier séparément l'influence de chacune des variables d'orientation sur la déformation de l'image plastique. Reprenons dans ce but les formules (III.2.10); en remarquant – comme déjà indiqué plus haut – que tous les coefficients au-dessus de la diagonale principale sont nuls, ces équations deviennent

$$\boxed{\begin{aligned} d\varkappa_B{}^{gr} &= +\varepsilon_{11}\,T_1 \\ d\varphi_B{}^{gr} &= +\varepsilon_{21}\,T_1 + \varepsilon_{22}\,T_2 \\ d\omega_B{}^{gr} &= +\varepsilon_{31}\,T_1 + \varepsilon_{32}\,T_2 + \varepsilon_{33}\,T_3 \\ (dby_B)_{mm} &= +\varepsilon_{41}\,T_1 + \varepsilon_{42}\,T_2 + \varepsilon_{43}\,T_3 + \varepsilon_{44}\,T_4 \\ (dbz_B)_{mm} &= +\varepsilon_{51}\,T_1 + \varepsilon_{52}\,T_2 + \varepsilon_{53}\,T_3 + \varepsilon_{54}\,T_4 + \varepsilon_{55}\,T_5 \end{aligned}} \qquad \text{(III.4.1)}$$

Exprimons alors les variables $T_1, T_2, \ldots, T_5$ en fonction de $k_1, k_2, \ldots, k_5$ en utilisant les formules (III.1.3)

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= \frac{k_1}{\sqrt{[k^2]}} \cdot \mu_{T_1} \\ &\vdots \\ T_5 &= \frac{k_5}{\sqrt{[k^2]}} \cdot \mu_{T_5} \end{aligned}} \qquad \text{(III.1.3)}$$

Les équations (III.4.1) deviennent ainsi, si l'on chasse le dénominateur $\sqrt{[k^2]}$: voir équations (III.4.2) et (III.4.3) page suivante.

Sachant que ce n'est que *le rapport* entre les grandeurs $k_1, \ldots, k_5$ qui intervient effectivement dans le calcul de $T_1, \ldots, T_5$ (voir les équations III.1.3) et par conséquent aussi dans celui de $d\varkappa$, $d\varphi$, $d\omega$, dby, dbz, nous pouvons choisir l'une d'elles arbitrairement. Nous en profitons pour donner aux équations (III.4.3) la forme des équations aux poids de la théorie des erreurs, ce qui a pour avantage de permettre d'utiliser à nouveau une partie déjà existante du programme.

Nous désignerons les solutions pour lesquelles *une seule des différentielles $d\varkappa$, $d\varphi$, $d\omega$, dby, dbz* est différente de zéro par *états fondamentaux,* et nous aurons donc 5 de ces états à considérer. Désignons les membres de gauche des équations (III.4.3) par $c_1, c_2, \ldots, c_5$. Pour trouver les états fondamentaux, nous devons attribuer à ces constantes les valeurs indiquées au tableau (III.4.4), qui nous donne du reste aussi les valeurs correspondantes des k_i.

$$
\begin{aligned}
+\sqrt{[k^2]}\cdot d\chi^{\mathrm{gr}} &= +(\varepsilon_{11}\,\mu_{T_1})\cdot k_1 \\
+\sqrt{[k^2]}\cdot d\varphi^{\mathrm{gr}} &= +(\varepsilon_{21}\,\mu_{T_1})\cdot k_1 + (\varepsilon_{22}\,\mu_{T_2})\cdot k_2 \\
+\sqrt{[k^2]}\cdot d\omega^{\mathrm{gr}} &= +(\varepsilon_{31}\,\mu_{T_1})\cdot k_1 + (\varepsilon_{32}\,\mu_{T_2})\cdot k_2 + (\varepsilon_{33}\,\mu_{T_3})\cdot k_3 \\
+\sqrt{[k^2]}\cdot dby_{\mathrm{mm}} &= +(\varepsilon_{41}\,\mu_{T_1})\cdot k_1 + (\varepsilon_{42}\,\mu_{T_2})\cdot k_2 + (\varepsilon_{43}\,\mu_{T_3})\cdot k_3 + (\varepsilon_{44}\,\mu_{T_4})\cdot k_4 \\
+\sqrt{[k^2]}\cdot dbz_{\mathrm{mm}} &= +(\varepsilon_{51}\,\mu_{T_1})\cdot k_1 + (\varepsilon_{52}\,\mu_{T_2})\cdot k_2 + (\varepsilon_{53}\,\mu_{T_3})\cdot k_3 + (\varepsilon_{54}\,\mu_{T_4})\cdot k_4 + (\varepsilon_{55}\,\mu_{T_5})\cdot k_5
\end{aligned}
\tag{III.4.2}
$$

En divisant chacune de ces équations par le coefficient de la diagonale principale, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{[k^2]}}{(\varepsilon_{11}\,\mu_{T_1})}\cdot d\chi^{\mathrm{gr}} &= +1\cdot k_1 \\
\frac{\sqrt{[k^2]}}{(\varepsilon_{22}\,\mu_{T_2})}\cdot d\varphi^{\mathrm{gr}} &= \frac{+\varepsilon_{21}\,\mu_{T_1}}{\varepsilon_{22}\,\mu_{T_2}}\cdot k_1 + 1\cdot k_2 \\
\frac{\sqrt{[k^2]}}{(\varepsilon_{33}\,\mu_{T_3})}\cdot d\omega^{\mathrm{gr}} &= \frac{+\varepsilon_{31}\,\mu_{T_1}}{\varepsilon_{33}\,\mu_{T_3}}\cdot k_1 + \frac{\varepsilon_{32}\,\mu_{T_2}}{\varepsilon_{33}\,\mu_{T_3}}\cdot k_2 + 1\cdot k_3 \\
\frac{\sqrt{[k^2]}}{(\varepsilon_{44}\,\mu_{T_4})}\cdot dby_{\mathrm{mm}} &= \frac{+\varepsilon_{41}\,\mu_{T_1}}{\varepsilon_{44}\,\mu_{T_4}}\cdot k_1 + \frac{\varepsilon_{42}\,\mu_{T_2}}{\varepsilon_{44}\,\mu_{T_4}}\cdot k_2 + \frac{\varepsilon_{43}\,\mu_{T_3}}{\varepsilon_{44}\,\mu_{T_4}}\cdot k_3 + 1\cdot k_4 \\
\frac{\sqrt{[k^2]}}{(\varepsilon_{55}\,\mu_{T_5})}\cdot dbz_{\mathrm{mm}} &= \frac{+\varepsilon_{51}\,\mu_{T_1}}{\varepsilon_{55}\,\mu_{T_5}}\cdot k_1 + \frac{\varepsilon_{52}\,\mu_{T_2}}{\varepsilon_{55}\,\mu_{T_5}}\cdot k_2 + \frac{\varepsilon_{53}\,\mu_{T_3}}{\varepsilon_{55}\,\mu_{T_5}}\cdot k_3 + \frac{\varepsilon_{54}\,\mu_{T_4}}{\varepsilon_{55}\,\mu_{T_5}}\cdot k_4 + 1\cdot k_5
\end{aligned}
\tag{III.4.3}
$$

(III.4.4)

Etats fondamentaux	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
I	+ 1	0	0	0	0
II	0	+ 1	0	0	0
III	0	0	+ 1	0	0
IV	0	0	0	+ 1	0
V	0	0	0	0	+ 1
Etats fondamentaux					
I	$(k_1)_{\mathrm{I}}$	$(k_2)_{\mathrm{I}}$	$(k_3)_{\mathrm{I}}$	$(k_4)_{\mathrm{I}}$	$(k_5)_{\mathrm{I}}$
II	$(k_1)_{\mathrm{II}}$	$(k_2)_{\mathrm{II}}$	$(k_3)_{\mathrm{II}}$	$(k_4)_{\mathrm{II}}$	$(k_5)_{\mathrm{II}}$
III	$(k_1)_{\mathrm{III}}$	$(k_2)_{\mathrm{III}}$	$(k_3)_{\mathrm{III}}$	$(k_4)_{\mathrm{III}}$	$(k_5)_{\mathrm{III}}$
IV	$(k_1)_{\mathrm{IV}}$	$(k_2)_{\mathrm{IV}}$	$(k_3)_{\mathrm{IV}}$	$(k_4)_{\mathrm{IV}}$	$(k_5)_{\mathrm{IV}}$
V	$(k_1)_{\mathrm{V}}$	$(k_2)_{\mathrm{V}}$	$(k_3)_{\mathrm{V}}$	$(k_4)_{\mathrm{V}}$	$(k_5)_{\mathrm{V}}$

Connaissant la valeur des paramètres pour les états fondamentaux, nous pouvons en déduire n'importe quel état moyennant une combinaison linéaire des états fondamentaux. En effet, si $m_1, \ldots, m_5$ désignent 5 nouveaux paramètres, nous pouvons calculer les valeurs $k_1, \ldots, k_5$ d'un état quelconque à l'aide des formules

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= m_1\,(k_1)_{\mathrm{I}} + m_2\,(k_1)_{\mathrm{II}} + \ldots + m_5\,(k_1)_{\mathrm{V}} \\ k_2 &= m_1\,(k_2)_{\mathrm{I}} + m_2\,(k_2)_{\mathrm{II}} + \ldots + m_5\,(k_2)_{\mathrm{V}} \\ &\vdots \\ k_5 &= m_1\,(k_5)_{\mathrm{I}} + m_2\,(k_5)_{\mathrm{II}} + \ldots + m_5\,(k_5)_{\mathrm{V}} \end{aligned}} \qquad \text{(III.4.5)}$$

où $m_1, \ldots, m_5$ peuvent avoir des valeurs quelconques, non toutes nulles. Ici encore *seul le rapport* de ces différentes valeurs intervient effectivement dans le calcul des différentielles $d\varkappa, \ldots, dbz$. Les valeurs de $m_1, \ldots,$ m_5 définissent en quelque sorte l'importance de chacun des termes $d\varkappa,$ $\ldots, dbz$ dans l'état à calculer. Ainsi, en prenant par exemple

$$m_1 = +1 \qquad m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 0$$

nous obtenons

$$d\varkappa \neq 0 \qquad d\varphi = d\omega = dby = dbz = 0,$$

ce qui nous donne l'état fondamental I. Si l'on choisit par contre

$$m_1 = +1 \qquad m_2 = +1 \qquad m_3 = m_4 = m_5 = 0,$$

on aura

$$d\varkappa \neq 0 \qquad d\varphi \neq 0 \qquad d\omega = dby = dbz = 0$$

et ainsi de suite. Les valeurs de $m_1, \ldots, m_5$ pour les différents états à calculer sont fournis à la calculatrice par une bande perforée.

§ 5. Exécution des calculs sur Zebra avec le programme N° 403.45

Calcul de la déformation de l'image plastique avant et après l'orientation absolue

Manipulations	Résultats uniquement au téléscripteur

Le programme N° 403.45 utilise les résultats contenus dans la machine après le calcul avec le programme N° 401.4. Il faut donc toujours procéder comme il suit:

1° Effectuer les calculs préliminaires avec le programme N° 401.4.

2° Une fois les calculs avec le programme N° 401.4 terminés (Stop dynamique), *introduire le programme N° 403.45 par Clear et Start.* Dès que ce programme a été lu, la machine commence à calculer. Il faut alors choisir la position des clefs U1, U2 et U3.

3° *Choix de la position des clefs U1 et U2 pour l'impression.*

Normalement U1 = 0 U2 = 1	les résultats intermédiaires en virgule flottante ne sont pas imprimés.
Si U1 = 1 et U2 = 0	Impression des résultats intermédiaires.

4° *Placer la bande des états sous le lecteur (pas de Start!)*

Bande des états

Seulement si U3 = 1 →	+ i	= Numéro d'ordre du 1^{er} état à calculer
	+ r	= Nombre d'états à calculer
	+ #	
Etat 1	m_1 m_2 ⋮ m_5	En passant d'un état au suivant, le numéro d'ordre augmente automatiquement d'une unité. Le nombre r des états à calculer n'est pas limité.
	+ #	
Etat 2	m_1' m_2' ⋮ m_5'	
	+ # ⋮	

5° *Tout de suite après 4° choisir la position de U 3.*

U3 = 0	U3 = 1

La machine exécute tous les calculs préliminaires du programme N° 403.45. Les résultats sont imprimés ou non suivant la position des clefs U1 et U2; voir sous 3°. Une fois ces calculs préliminaires terminés

Impression FIN

Stop dynamique en Q95z Dial i Stop. Dial r Lecture bande. Calcul des r états puis retour en Q95z.	*Pas de Stop.* Lecture de la bande des états, calcul et impression. Une fois les r états calculés *Stop en Q95z.*

Remarques concernant la bande des états

Lorsqu'on a U 3 = 1, la bande des états commence par

$$\begin{cases} +\, i = \text{Numéro d'ordre du } 1^{\text{er}} \text{ état à calculer} \\ +\, r = \text{Nombre d'états à calculer} \\ +\, \# \end{cases}$$

Si l'on a par contre U 3 = 0, ces deux grandeurs sont introduites par Dial; voir plus haut.

La bande numérique des états permet d'influencer la valeur numérique des différentielles $d\varkappa, \ldots, dbz$. Chacun des paramètres $m_1, m_2, \ldots, m_5$ n'influence que l'une des variables $d\varkappa$, $d\varphi$, $d\omega$, dby, dbz, et l'association s'opère suivant le schéma

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ d\varkappa & d\varphi & d\omega & dby & dbz \end{array}}$$

Les paramètres $m_1, m_2, \ldots, m_5$ ne doivent pas tous être nuls. Si l'un d'eux est nul, la différentielle de la variable d'orientation qui lui est associée suivant le schéma ci-dessus est également nulle. Les paramètres $m_1, \ldots, m_5$ peuvent être positifs ou négatifs. Il n'y a que *leur rapport* qui intervient dans le calcul de $dx, \ldots, dbz$; leur valeur est uniquement limitée par le gabarit d'impression qui est

Gabarit d'impression des m_i
+ 1234.1

Le nombre r des états à calculer n'est pas limité.

§ 6. Combinaison des programmes N° 401.4 et N° 403.45

Programme N° 404.1

Afin de faciliter l'utilisation des programmes N° 401.4 et 403.45, nous les avons réunis en un seul qui porte le N° 404.1. Avec ce dernier les calculs s'effectuent comme il suit:

Calculs avec le programme N° 404.1

Bande numérique

Même préparation que pour le programme N° 400.10, mais la bande préliminaire et la bande principale doivent être réunies en une seule.

Manipulations

Sortie des résultats au téléscripteur.

1° Introduction de la première partie du programme par *Clear et Start*. Stop.

2° Introduction de la bande numérique par Start.

3° Une fois la bande numérique complètement lue, placer la seconde partie du programme sous le lecteur (pas de Start) et choisir U1 = 0 U2 = 1 U3 = 1.

4° Une fois la première partie des calculs terminée, la machine lit *automatiquement* la seconde partie du programme placée sous le lecteur. Exécution de la deuxième partie des calculs. Pendant l'exécution des calculs placer la bande des états sous le lecteur (pas de Start). Ces calculs étant terminés, la machine imprimera FIN et prendra *automatiquement* les r états les uns après les autres. Elle exécute tous les calculs et stoppe finalement en Q95z.

Remarque

Si l'on sait d'avance quels états on aura à calculer, on les ajoutera avec $\left\{\begin{array}{l} +\,i \\ +\,r \\ +\,\# \end{array}\right\}$ à la fin de la bande programme. Les opérations mentionnées sous 3° étant alors faites, la suite est entièrement automatique.

§ 7. *Exemple numérique*

Nous donnons ci-après un exemple numérique calculé avec le programme N° 404.1. D'autres exemples et des conclusions d'ordre pratique sont indiqués dans [3].

§ 8. *Liste des publications consultées*

[1] *W. K. Bachmann,* Calcul de la déformation de l'image plastique en photogrammétrie. Publication N° 19 de l'EPUL, 1951.

[2] *W. K. Bachmann,* Théorie et compensation des triangulations aériennes. 1946, épuisé.

[3] *W. K. Bachmann,* Méthode numérique d'orientation de vues aériennes quelconques dans un stéréorestituteur. Publication N° 76 EPUL, 1963.

Application de la théorie de l'équivalence en géodésie et en statique

Par A. Ansermet

Anmerkung der Redaktion

Das Problem der Äquivalenz ist von mehreren Autoren bereits vor Jahrzehnten in der Literatur behandelt worden. Dabei waren sie sich – wie es heute scheint – nicht bewußt, daß sie den Begriff der Äquivalenz in verschiedener Weise definieren, so daß jede Publikation eines einzelnen Autors für sich richtig, jedoch mit analogen Publikationen anderer Autoren nicht vergleichbar ist. – Es ist ein Verdienst von Professor Ansermet, im folgenden Artikel diesen Umstand aufzudecken und insbesondere im dritten Beispiel zu zeigen, daß bei Vorliegen von Nebenbedingungen die Zahl der frei wählbaren Variablen geringer ist als ohne diese Nebenbedingungen. Mag diese Tatsache auch selbstverständlich erscheinen, so wird sie doch von anderen Autoren nirgends erwähnt.

Professor Ansermet ist auf die Frage der Äquivalenz beim Studium statischer Probleme gestoßen. Das Problem der Äquivalenz wurde in den letzten Jahren in der geodätischen Literatur seltener als früher behandelt. Es dürfte beim Studium von Satellitentriangulationen erneut eine Rolle spielen *F. Kobold*

L'application de cette théorie, planimétriquement ou spatialement, avait donné lieu, dans notre numéro de mars 1960, à un article assez succinct (voir [4]). C'est un vaste problème susceptible d'être étendu aux systèmes hyperstatiques articulés («Stabfachwerke») en vue du calcul des ellipses et ellipsoïdes de déformation. Il y a en effet une corrélation étroite avec les compensations de mesures linéaires; c'est ce qu'un auteur exprima sous la forme: «Im dreidimensionalen Raum stimmen der einknotige, statisch beliebig unbestimmte Stabverband und der zugehörige überbestimmte Bogenschnitt völlig überein» ([2], p. 104). Ce ne sont plus les coordonnées des sommets d'un réseau qui varient, mais celles des nœuds d'un système; les côtés déviennent des barres, et grâce à la réalisation de l'équivalence on peut substituer à un système de n équations