Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 61 (1963)

Heft: 7

Artikel: Le rôle de la déviation de la verticale en corrélation avec les nivellements trigonométriques

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-218453

Le rôle de la déviation de la verticale en corrélation avec les nivellements trigonométriques

Par A. Ansermet

Au cours de ces dernières années diverses publications ont paru tendant à développer les méthodes de nivellement trigonométrique; il y avait lieu notamment de chercher à intégrer, dans un même calcul de compensation, les éléments angulaires mesurés et ceux, encore inconnus, caractérisant la déviation de la verticale à chaque station. Ce problème est manifestement assez complexe; pour un réseau altimétrique déterminé, le nombre des inconnues augmente sensiblement.

Parmi les publications auxquelles il est fait allusion il convient de citer celle de la Commission géodésique suisse de 1960 (voir [2]); il faut savoir gré aux auteurs de ces recherches, MM. Kobold et Wunderlin, d'avoir traité ce sujet de façon si magistrale. Ce problème est vaste et fera sans doute l'objet d'autres publications de la part de ces mêmes auteurs.

Le but poursuivi par ces lignes est limité; sur la base d'exemples concrets, choisis parmi les plus simples, le praticien peut se familiariser avec un mode de calcul qui n'est pas encore très courant.

Avant de poursuivre, pour mémoire, rappelons qu'en principe et initialement il est nécessaire de décider si la compensation sera effectuée dans le système des altitudes «orthométriques» ou dans celui des altitudes «ellipsoïdales» ([3], p. 237). L'équation initiale, qui sera appliquée ici, est celle contenue dans la publication déjà mentionnée ([2], p. 9). Une solution provisoire est calculée au préalable; puis émettons certaines hypothèses destinées à simplifier les calculs et à faciliter l'interprétation des résultats. Posons, pour chaque visée: $D_z : \cos^2\alpha \cong 636\,620$ cm, car le coefficient $\rho^{cc} \cdot \cos^2\alpha : D_z$ revient dans chaque équation.

Pour la compensation proprement dite, la valeur D_z peut être arrondie; c'est la longueur curviligne du côté à l'altitude du point visé, tandis que α est l'angle vertical mesuré. D'autre part le coefficient de réfraction n'est pas traité comme une inconnue; la forme générale de l'équation aux erreurs sera:

$$-f + v = -\Delta H_s + \Delta H_z + \cos A_z \cdot \xi + \sin A_z \cdot \eta \qquad ([2], \text{p. } 9) \qquad (1)$$

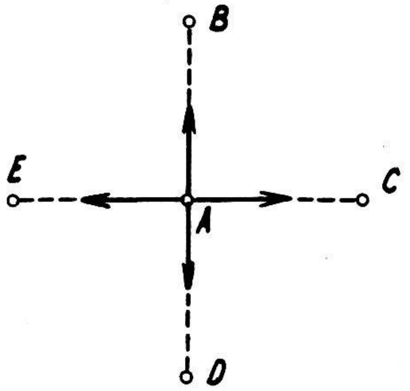
f étant le terme absolu, A_z l'azimut géographique de la visée, tandis que ξ et η sont les composantes inconnues de la déviation de la verticale. Toujours pour la compensation les valeurs α et A_z peuvent être arrondies.

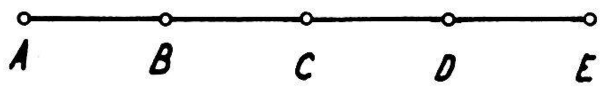
Par suite de l'hypothèse faite, les coefficients de ΔH_s et ΔH_z sont égaux à 1, mais ce 1 a une dimension donnée par le quotient $\rho^{cc} : D_z$; en d'autres termes, numériquement, ces ΔH expriment des secondes centésimales ou des centimètres. Ce sont les corrections à apporter aux valeurs provisoires H_s, H_z des altitudes des points de stationnement et des points visés. Il y a donc quatre inconnues par équation en général.

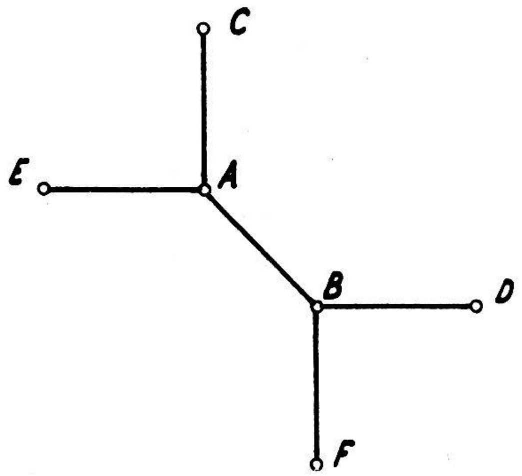
Trois exemples concrets seront traités.

1° Relèvement altimétrique simple

Il y a quatre visées effectuées en A et trois inconnues ΔH_s, ξ, η. Admettons: $\sin^2 A_z \cong 0$ ou 1; on a immédiatement (voir figure):







visées	coefficients			poids p_i
AB	—1	+1	0	1
AC	—1	0	+1	1
AD	—1	—1	0	1
AE	—1	0	—1	1

En application des formules connues (voir [1]):

$[paa] = 4 \quad [pbb] = [pcc] = 2$

$[pab] = [pac] = [pbc] = 0$,

les équations normales sous forme implicite étant:

$[pav] = [pbv] = [pcv] = 0$

Les v sont les corrections à apporter aux angles α.

Les coefficients de poids sont:

$$Q_{11} = 0{,}25;\ Q_{22} = Q_{33} = 0{,}5;\ Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = 0$$

ou sous forme matricielle:

$$m_0^2 \cong [pvv]:1 \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Matrice inverse:} \quad \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

m_0 est l'erreur moyenne quadratique relative à l'unité de poids.

Les valeurs $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ et $\sqrt{0{,}5} = 0{,}71$ permettent de calculer les erreurs moyennes des inconnues; c'est ΔH_s qui est obtenu avec le plus de précision. Les ξ et η sont les composantes de la déviation $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ au point de stationnement; les poids p_i sont amplifiés 1,33 fois, car $[p_i : P_i]_1^4 = 3$.

On pourrait éliminer les trois inconnues pour aboutir à une équation de condition dans laquelle les coefficients des v sont égaux.

2° Cheminement altimétrique ABCDE

Il y a deux points de rattachement A et E dont tous les éléments intervenant dans le calcul sont connus; théoriquement il y a neuf inconnues, trois par point nouveau (B, C, D). Faisons l'hypothèse

$$\sin^2 A_z \cong 1;$$

le calcul devient plus simple; les inconnues ξ n'interviennent plus. Pour une valeur quelconque, par exemple $\sin^2 A_z \cong 0{,}5$, on ne pourra pas compenser ni calculer car il y a une inconnue de trop; on raisonnera ainsi: le pôle est fictivement déplacé pour réaliser $\sin^2 A_z \cong 1$. En général, pour la compensation, on admettra que la surface est sphérique ($\log R^m \cong 6{,}8047$) sauf si le réseau est étendu. Il suffit de connaître les coefficients à $^1/_{500}{}^e$ et les termes absolus à $^1/_{1000}{}^e$ près.

Le tableau des coefficients devient, en groupant les ΔH ensemble:

visées	ΔH_B	ΔH_C	ΔH_D	η_B	η_C	η_D	poids p_i	poids à posteriori
AB	+1	0	0	0	0	0	1	P_1
BA	—1	0	0	—1	0	0	1	P_2
BC	—1	+1	0	+1	0	0	1	P_3
CB	+1	—1	0	0	—1	0	1	P_4
CD	0	—1	+1	0	+1	0	1	P_5
DC	0	+1	—1	0	0	—1	1	P_6
DE	0	0	—1	0	0	+1	1	P_7
ED	0	0	+1	0	0	0	1	P_8

$$[p_i : P_i]_1^8 = 6$$

d'où la matrice du système d'équations normales:

$$
\begin{bmatrix}
4 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-2 & 4 & -2 & +1 & 0 & -1 \\
0 & -2 & 4 & 0 & +1 & 0 \\
0 & +1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & +1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{bmatrix}
$$

A cause de la symétrie on a:
$P_1 = P_8 \qquad P_3 = P_6$
$P_2 = P_7 \qquad P_4 = P_5$
$m_0^2 \cong [pvv] : 2$
La matrice inverse, celle des coefficients de poids devient:

$$
\begin{bmatrix}
0{,}542 & +0{,}5 & +0{,}208 & -0{,}25 & +0{,}167 & +0{,}25 \\
+0{,}5 & 1{,}00 & +0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}00 & +0{,}5 \\
+0{,}208 & +0{,}5 & 0{,}542 & -0{,}25 & -0{,}167 & +0{,}25 \\
-0{,}25 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}00 & -0{,}25 \\
+0{,}167 & 0{,}00 & -0{,}167 & 0{,}00 & 0{,}667 & 0{,}00 \\
+0{,}25 & +0{,}5 & +0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}00 & 0{,}75
\end{bmatrix}
$$

ou

$$
\begin{bmatrix}
Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \cdots & Q_{16} \\
Q_{21} & Q_{22} & & & \\
Q_{31} & & \ddots & & \\
\vdots & & & Q_{55} & Q_{56} \\
Q_{61} & & & Q_{65} & Q_{66}
\end{bmatrix}
$$

Calcul des poids à posteriori et contrôle

$1 : P_1 = 0{,}542 \qquad 1 : P_2 = 0{,}542 + 0{,}75 - 2 \times 0{,}25 = 0{,}792$

$1 : P_3 = 0{,}542 + 1{,}00 + 0{,}75 - 2 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}25 - 2 \times 0{,}5 = 0{,}792$

$1 : P_4 = 0{,}542 + 1{,}00 + 0{,}667 - 2 \times 0{,}5 - 2 \times 0{,}167 + 2 \times 0{,}00 =$
$= 0{,}874$

$[1 : P_i]_1^8 = 2\,[1 : P_i]_1^4 = 2\,(0{,}542 + 0{,}792 + 0{,}792 + 0{,}874) = 6{,}00$

(6 inconnues) ([3], p. 68)

$\sqrt{0{,}542} = 0{,}74; \quad \sqrt{1{,}00} = 1{,}00; \quad \sqrt{0{,}75} = 0{,}87; \quad \sqrt{0{,}667} = 0{,}82$

Ces valeurs permettent de calculer les erreurs moyennes des inconnues.

Pour mémoire rappelons que dans le réseau de l'Oberland bernois ([2], p. 10) il y avait 42 inconnues (14 × 3) et 73 équations aux erreurs; il était nécessaire d'avoir recours aux calculatrices électroniques.

3° *Détermination altimétrique d'une paire de points*

Pour les visées AB ou BA on fait l'hypothèse: $\sin^2 A_z \cong 0{,}5$
et pour les autres visées: $\sin^2 A_z \cong 0$ ou 1.

On obtient immédiatement le tableau des coefficients:

visées	ΔH_A	ξ_A	η_A	ξ_B	η_B	ΔH_B	poids p_i	poids à posteriori
AB	—1	—0,707	+0,707	0	0	+1	1	P_1
BA	+1	0	0	+0,707	—0,707	—1	1	P_2
AC	—1	+1	0	0	0	0	1	P_3
CA	+1	0	0	0	0	0	1	P_4
AE	—1	0	—1	0	0	0	1	P_5
EA	+1	0	0	0	0	0	1	P_6
BD	0	0	0	0	+1	—1	1	P_7
DB	0	0	0	0	0	+1	1	P_8
BF	0	0	0	—1	0	—1	1	P_9
FB	0	0	0	0	0	+1	1	P_{10}

$[p_i : P_i]_1^{10} = 6$. On aurait pu grouper les inconnues autrement: $m_0^2 \cong [pvv] : 4$. On voit que $P_1 = P_2$ $P_3 = P_5 = P_7 = P_9$ $P_4 = P_6 = P_8 = P_{10}$ à cause de la symétrie.

Comme précédemment on a deux matrices mutuellement inverses:

$$\begin{bmatrix} 6 & -0{,}293 & +0{,}293 & +0{,}707 & -0{,}707 & -2 \\ -0{,}293 & 1{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}707 \\ +0{,}293 & -0{,}5 & 1{,}5 & 0 & 0 & +0{,}707 \\ +0{,}707 & 0 & 0 & 1{,}5 & -0{,}5 & +0{,}293 \\ -0{,}707 & 0 & 0 & -0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}293 \\ -2 & -0{,}707 & +0{,}707 & +0{,}293 & -0{,}293 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +0{,}230 & +0{,}071 & -0{,}071 & -0{,}096 & +0{,}096 & +0{,}103 \\ +0{,}071 & 0{,}794 & +0{,}206 & -0{,}039 & +0{,}039 & +0{,}096 \\ -0{,}071 & +0{,}206 & 0{,}794 & +0{,}039 & -0{,}039 & -0{,}096 \\ -0{,}096 & -0{,}039 & +0{,}039 & 0{,}794 & +0{,}206 & -0{,}071 \\ +0{,}096 & +0{,}039 & -0{,}039 & +0{,}206 & 0{,}794 & +0{,}071 \\ +0{,}103 & +0{,}096 & -0{,}096 & -0{,}071 & +0{,}071 & +0{,}230 \end{bmatrix}$$

Calcul des poids à posteriori et contrôle

$$1 : P_1 = 0{,}23 + 0{,}5 \times 0{,}794 + 0{,}5 \times 0{,}794 + 0{,}23 + 1{,}41 \times 0{,}071 + \\ + 1{,}41 \times 0{,}071 - 2 \times 0{,}103 - 1 \times 0{,}206 - 1{,}41 \times 0{,}096 - \\ - 1{,}41 \times 0{,}096 = 0{,}772$$

$1 : P_3 = 0{,}23 + 0{,}794 - 1{,}41 \times 0{,}096 = 0{,}883$ $\quad$ $1 : P_4 = 0{,}230$

$[1 : P_i]_1^{10} = 2 \times 0{,}772 + 4 \times 0{,}883 + 4 \times 0{,}230 = 6{,}00$ (six inconnues)

$$\sqrt{0{,}230} = 0{,}48 \qquad \sqrt{0{,}794} = 0{,}89$$

La détermination des ΔH est plus précise que celle des ξ et η dans notre cas; grâce à l'hypothèse faite, la comparaison est aisée puisque, numériquement, les valeurs obtenues pour les ΔH expriment des centimètres ou des secondes centésimales. Une dernière remarque: En tirant des dix équations aux erreurs quatre groupes de sept équations, et en éliminant les six inconnues dans chaque groupe, on obtient quatre équations de condition (calcul par voie électronique).

Littérature

[1] *C. F. Baeschlin,* Ausgleichungsrechnung (Cours ETH 1935).

[2] *F. Kobold* et *N. Wunderlin,* Die Bestimmung von Lotabweichungen und Meereshöhen ... (Commission géodésique suisse, 1960).

[3] *H. Wolf,* Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (Hamburg 1962).

Einiges über die Alp-Wasserversorgung Farneralp–Guntliberg

(Gemeinde Goldingen, Kanton St. Gallen)

Von A. Scherrer, Kulturingenieur, St. Gallen/Bern

Die vom Zürcher Landwirtschaftlichen Kantonalverein (ZLKV) dem kantonalen Meliorations- und Vermessungsamt St. Gallen übertragene Aufgabe bestand aus folgenden zwei Teilen:

Für die Farneralp: Versorgung von Haus, Alpstall und verschiedener Weidbrunnen mit genügend und einwandfreiem Wasser.

Für den Guntliberg: Verwendung der sogenannten «Hinteren Quelle» für die Versorgung der Hirtenhütte und von zwei Weidbrunnen.

Nach verschiedenen, zeitraubenden Studien kam schlußendlich folgende Lösung zustande.

A. Teil Farneralp

1. Wasserbeschaffung

Die der Zürcher Heilstätte Wald gehörende Wasserversorgung in der Rüti vermochte den Anforderungen des Sanatoriumsbetriebes schon seit langem nicht mehr zu genügen, weder in quantitativer noch in qualitativer Hinsicht. Deshalb wurde dieses Wasser nur noch zur Speisung der Feuerlöschreserve und für Reinigungszwecke benützt. Der ZLKV konnte sich vertraglich das Recht sichern, bei der Sammelbrunnenstube des Sanatoriums laufend 4 l/min Wasser zu beziehen – eine relativ kleine Menge, aber für die Alp doch sehr wertvoll. Voraussetzung war freilich dessen vorherige Reinigung, wenigstens der als Trinkwasser zur Verwendung gelangenden Menge.