

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 61 (1963)

Heft: 4

Artikel: Die prinzipiellen Mängel des isostatischen Konzeptes

Autor: Ledersteger, K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-218444>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

- [31] *E. Samal*, Dynamik der Spannbandlagerung. ATM J 013–7, Februar 1959.
- [32] *E. Samal*, Einstell- und Nullpunktssicherheit von Band- und Spannbandlagerungen. ATM J 013–8, April und Juli 1959.
- [33] *D. Schellens*, Ausschaltung der Horizontschräge bei automatischen Nivellieren. IV. Internationale Kurse für geodätische Streckenmessung. München 1961.
- [34] *J. Schöne*, Fehlereinflüsse bei Messungen von selbsthorizontierenden Nivellierinstrumenten ... Vermessungstechnik, 1962, Nr. 8, p. 204–207.
- [35] *E. Schwabe*, Wirbelstromdämpfung und -bremsung mit daueragnetischen Systemen. ETZ-A, Bd. 78, H. 14, 11. 7. 1957, p. 495.
- [36] *R. Straumann, F. Straumann, G. Krüger*, Die Spiralfeder als ferromagnetisches Problem. Scientia Electrica IV, 1958, Nr. 2.
- [37] *S. Timoshenko und J. N. Goodier*, Theory of elasticity. New York, McGraw-Hill, 1951, p. 249.
- [38] *R. Tomaschek und W. Schaffernicht*, Untersuchungen über die zeitlichen Änderungen der Schwerkraft. Annalen der Physik 15, 1932, Nr. 7, p. 787.
- [39] *H. Voit*, Über die Dimensionierung des Bifilargravimeters. Geofisica pura e applicata XV, 1949, p. 90.
- [40] *C. Weber*, Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Forschungsarbeiten, Heft 249, VDI, Berlin 1921.

Die prinzipiellen Mängel des isostatischen Konzeptes

Von K. Ledersteger, Wien

Die Lehre vom Massenausgleich in der Erdkruste oder vom isostatischen Gleichgewicht ist schon längst keine Hypothese mehr, sondern eine durch die Erfahrung wohlbegündete Theorie. Aber selbstverständlich kann jegliche Modellvorstellung der Isostasie wegen ihres notwendigerweise schematischen Charakters dem überaus komplizierten Aufbau der Erdkruste nur mehr oder minder gut gerecht werden. Im großen und ganzen darf es aber als erwiesen gelten, daß die über das Geoid herausragenden Kontinentalmassen nicht als Überschußmassen gewertet werden dürfen, die einfach einer Normalerde aufgesetzt sind, sondern daß sie weitgehend durch unterirdische Massendefekte kompensiert sind. Eine ähnliche Kompensation durch unterirdische Massenüberschüsse liegt für die Weltmeere vor, die man als Massendefizite auffaßt. Man ist aber zu der Überzeugung gelangt, daß es noch Teile der Erdkruste gibt, die sich noch nicht im isostatischen Gleichgewicht befinden, also Teile mit Über- oder Unterkompensation. Die drei entwickelten Modellvorstellungen, die lokale Isostasie nach Pratt-Hayford und Airy-Heiskanen sowie die regionale Isostasie nach Vening Meinesz, sind mehr oder minder zutreffende Idealisierungen, von denen die eine da, die andere dort den tatsächlichen Verhältnissen besser entspricht. Im allgemeinen verdient in physikalischer Hinsicht die Airysche Annahme des Schwimmgleichgewichtes den Vorzug vor der Prattschen Aufblähungstheorie und die regionale Kompensation nach Vening Meinesz den Vorzug vor den beiden lokalen Modellen, bei denen die Kompensation in vertikalen Elementarsäulen

stattfinden soll, was nur bei einer wesentlich geringeren Starrheit der Erdrinde denkbar ist. Wenn auch eine gewisse Vertrautheit mit der Grundidee der Isostasie vorausgesetzt werden darf, wird doch mancherlei Bekanntes wiederholt werden müssen, um das Verständnis der folgenden Überlegungen nicht allzusehr durch Rückweise auf die vorhandene Literatur zu erschweren.

Zweck vorliegender Studie ist der Nachweis, daß bei der theoretischen Grundlegung der Isostasie einige wesentliche Gesichtspunkte außer acht geblieben sind, die sich bei einer tieferen Beschäftigung mit der Theorie des Normalsphäroides der Erde fast von selbst aufdrängen und die dazu geeignet scheinen, manch ungeklärte Frage wenn schon nicht vollständig zu lösen, so wenigstens aufzuhellen, wie den scheinbaren Widerstreit zwischen Massenausgleich und Druckausgleich und die merkwürdige Schwerpunktsverschiebung bei der isostatischen Reduktion, die man zwar als physikalisch unmöglich erkannt hat, ohne sie aber beseitigen zu können. Wäre die Isostasie in einer der drei genannten Modellvorstellungen streng richtig, so müßte die zugehörige isostatische Reduktion das hydrostatische Gleichgewicht, das unterhalb der Ausgleichsfläche des Druckes herrscht, auch oberhalb, das heißt in der Erdkruste, herstellen. Die Erde wäre dann vollständig regularisiert, und die isostatischen Schwereanomalien müßten durchwegs verschwinden. Der indirekte Effekt der isostatischen Reduktion würde unmittelbar die Undulationen des Geoides liefern. Daß dies nicht der Fall ist, beruht sicherlich zum Teil auf dem Umstand, daß der komplizierte Bau der Erdkruste kaum die Anwendung eines einheitlichen, der Rechnung noch zugänglichen Modells gestattet, ebenso sicher aber auch teilweise auf den grundsätzlichen Mängeln des isostatischen Konzeptes.

Wir wenden uns zuerst dem Problem des Massen- oder Druckausgleiches zu und legen der Diskussion die Hayfordsche Variante der Prattschen Aufblähungstheorie zugrunde. Nach Pratt wird in einer gewissen Tiefe D die isostatische Ausgleichsfläche angenommen. Diese soll die Begrenzung des Hauptteiles der Erdmasse sein, der sich im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, ist also die oberste Fläche, die noch gleichzeitig durch konstanten Druck und konstante Dichte ausgezeichnet ist. Die über der Ausgleichsfläche liegenden Massen können in Vertikalsäulen von beliebig kleinem Querschnitt zerlegt werden und haben um so geringere Dichte, je höher sie über das Geoid hinausragen. Lediglich aus rechen-technischen Gründen zählt Hayford die Kompensationstiefe D nicht wie Pratt vom Geoid, sondern von der physischen Erdoberfläche oder, korrekter ausgedrückt, von der Lithosphäre ab. Die mittlere Säule in Figur 1, die oben mit dem Geoid abschließt ($h = 0$), habe die mittlere Krustendichte $\rho = 2,67$, die Säule mit der Höhe h eine kleinere, jene unter dem Meer der Tiefe T beginnende Säule eine größere Dichte ρ' . Bemerkt sei, daß diese Annahme Vor- und Nachteile hat. Auf den Kontinenten ist es gut, wenn die Kompensation bereits an der Oberfläche und nicht erst im Geoid beginnt, weil dadurch eine Dichteabnahme nach innen vermieden wird. Hingegen haben unter dem Meere die Kompensationssäulen der

Dicke D den Nachteil, daß dadurch die Ausgleichsfläche den oben definierten Sinn verliert. Dies läßt sich leicht vermeiden, wenn man, wie wir es später machen wollen, die Kompensation nur bis zur Ausgleichsfläche reichen läßt.

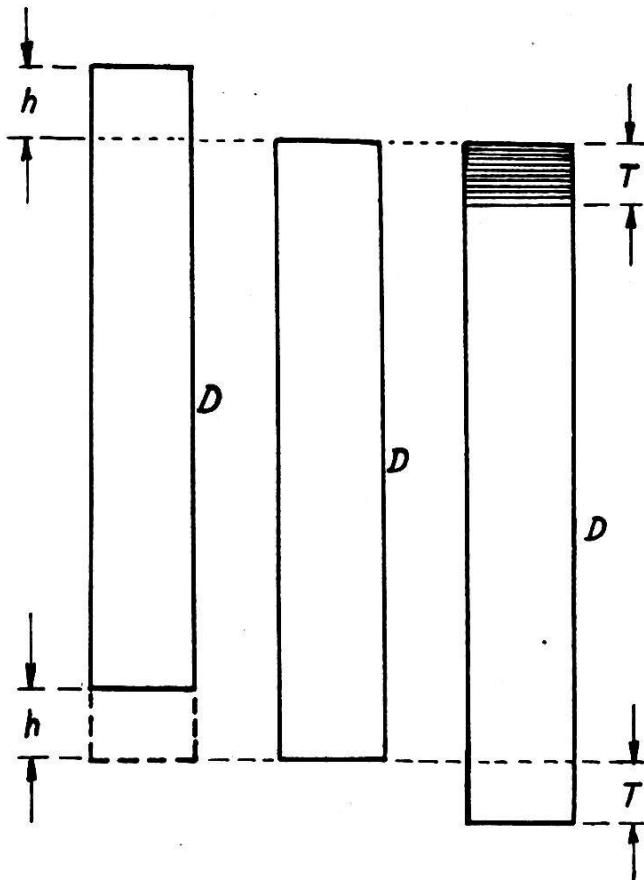


Fig. 1

Fordert man Massengleichheit in den Säulen, vernachlässigt aber die durch die Erdkrümmung bedingte Lotlinienkonvergenz, so liegt der Fall des genäherten Massenausgleiches vor. Auf den Kontinenten ergibt sich

$$D\rho' = (D - h)\rho$$

oder das Dichtedefizit

$$\Delta\rho' = (\rho' - \rho) = -\frac{h}{D}\rho \quad (1)$$

und im ozeanischen Falle, unter $\rho_W = 1,03$ die Dichte des Meerwassers verstanden,

$$(D + T)\rho = D\rho' + T\rho_W,$$

also der Dichteüberschuß

$$\Delta\rho' = +\frac{T}{D}(\rho - \rho_W). \quad (1a)$$

Will man die Konvergenz der Lotlinien wenigstens rein sphärisch berücksichtigen und wird der Querschnitt Q der Elementarsäulen im Geoid oder auf der Oberfläche der Kugel vom Radius $R = 6371,2$ km mit 1 angenommen ($z = 0$), so läuft dies auf eine andere Definition von ρ' und $\Delta\rho$ hinaus, und man findet für den nunmehr vorliegenden strengen Massenausgleich bei sofortiger Beschränkung auf den kontinentalen Fall:

$$\rho' \int_{-D+h}^h (1 + z/R)^2 dz = \rho \int_{-D+h}^0 (1 + z/R)^2 dz. \quad (2)$$

Wird im Integranden $(z/R)^2$ unterdrückt, so folgt

$$\rho' D + \frac{\rho'}{R} [h^2 - (D-h)^2] = \rho (D-h) \left(1 - \frac{D-h}{R}\right)$$

und mit $\rho' = \rho + \Delta\rho$ und nach Einführung der Näherung (1) in die Korrektionsglieder

$$\rho h + \Delta\rho \cdot D = -\frac{\rho h D}{R}. \quad (\text{a})$$

Das Ergebnis (1) des genäherten Massenausgleiches können wir in dieselbe Form bringen:

$$\rho h + \Delta\rho' D = 0. \quad (\text{b})$$

Fordern wir anstelle der Massengleichheit konstanten Druck der Elementarsäulen in der Ausgleichsfläche, so müssen wir die Zunahme der Schwerebeschleunigung nach innen berücksichtigen. Aus der Definitionsgleichung

$$\int_0^h \rho g dz = - \int_{-D+h}^h \Delta\rho \cdot g dz \quad (3)$$

ersieht man unmittelbar, daß sich dieser Fall wegen der geringen Veränderlichkeit von g mit der Höhe nur wenig vom genäherten Massenausgleich unterscheiden kann. Im Zentrum der Topographie, das heißt in der Höhe $h/2$, sei die Schwere g . Das Zentrum der negativen Kompenationsmassen liegt genau um $(D-h)/2$, also näherungsweise um $D/2$, unterhalb des erstgenannten Zentrums. Mithin ergibt sich dort nach der Preyschen Schwerereduktion

$$g_c = g + \frac{g}{R} D - \frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{g}{R} D = g + \frac{1}{4} \frac{g}{R} D, \quad (4)$$

wenn man $\rho : \rho_m \doteq 1/2$ setzt ($\rho = 2,67$, mittlere Erddichte $\rho_m = 5,52$), und es folgt aus (3)

$$\rho' g_c D = \rho g_c D - \rho g h$$

oder $\rho h + \Delta\rho'' D = +\frac{\rho h D}{4 R}, \quad (\text{c})$

wenn man abermals im Korrektionsglied die Näherung (1) verwendet.

Man sieht, daß der genäherte Massenausgleich (b) dem strengen Druckausgleich (c) viermal näher liegt als dem strengen Massenausgleich (a). Gleichheit von Masse und Druck ist mit dem Pratt-Hayfordschen Modell unvereinbar.

Bei Berücksichtigung der Lotlinienkonvergenz ergeben sich die Volumina der Topographie und der Kompensation, wenn man den Querschnitt $Q = 1$ im Geoid mit $h(1 + h/R)$ beziehungsweise mit $D[1 - (D - 2h)/R]$ multipliziert. Vernachlässigt man h/R und denkt die Topographie auf die Kugel vom Radius R kondensiert, so hat diese Belegung die Flächendichte ρh . Ähnlich kann die Kompensationsmasse auf die Kugel vom Radius $(R - D/2)$ kondensiert werden und hat die Flächendichte ρD , die aber von Fall zu Fall eine andere ist:

$$\Delta\rho D(1 - D/R) = \Delta\rho'D = \Delta\rho''D(1 + D/4R) = -\rho h. \quad (5)$$

(5) ist bloß eine Zusammenfassung der drei Gleichungen (a) bis (c). Die Flächendichte ist am größten beim strengen Massenausgleich $|\Delta\rho D| = \rho h(1 + D/R)$, wodurch tatsächlich die Flächenverringerung

$$(R - D/2)^2 : R^2 = (1 - D/R)$$

gerade aufgehoben wird. Beim genäherten Massenausgleich ist die Flächendichte dieselbe wie die der Topographie und daher die Kompensationsmasse kleiner, was in noch stärkerem Maße für den Druckausgleich zutrifft. Wir erhalten demnach für die Massensumme aus Topographie (m_t) und Kompensation (m_k) beim

$$\text{strengen Massenausgleich: } m_t + m_k = 0, \quad (a')$$

$$\text{genäherten Massenausgleich: } m_t + m_k = +\rho h Q \cdot D/R, \quad (b')$$

$$\text{Druckausgleich: } m_t + m_k = +\rho h Q \cdot 5D/4R. \quad (c')$$

Soweit die bisherigen Ergebnisse, die man am besten in der vorzüglichen Darstellung des Isostasieproblems bei Heiskanen¹ verfolgen kann.

Damit sind wir aber bei einem Widerspruch angelangt. Der reine Massenausgleich ist physikalisch nicht zu rechtfertigen. Denn die Auflockerung des Krustenmaterials bei der Bildung der Kontinente ist unweigerlich mit einer Druckabnahme in der Ausgleichsfläche verbunden, die um so größer ist, je höher eine Elementarsäule über das Geoid herausragt; die Ausgleichsfläche soll aber eine Fläche konstanten Druckes sein. Umgekehrt ist beim Druckausgleich im kontinentalen Falle die Masse der Topographie größer als die negative Kompensationsmasse. Bei der isostatischen Reduktion wird also nicht die gesamte Masse der Topographie zur Auffüllung des unterirdischen Defizites gebraucht, während auf den Ozeanen andererseits die Überschußmassen des Untergrundes nicht zur Auffüllung des Defizites des Ozeanwassers genügen. Mithin verlangt der isostatische Druckausgleich auch horizontale Massenver-

¹ W. A. Heiskanen, F. A. Vening Meinesz, «The Earth and Its Gravity Field», New York/Toronto/London 1958, Kapitel 5.

schiebungen, womit gleichzeitig erreicht werden kann, daß die Gesamtmasse der Erde unverändert bleibt, was unbedingt erforderlich ist. Wir dürfen wohl mit Recht annehmen, daß sich der Erdkörper vor der Kru-
stenbildung gänzlich im hydrostatischen Gleichgewicht befunden hat. Dann aber muß vollständige Massengleichheit mit Druckgleichheit in der Ausgleichsfläche verbunden sein. Aber die Massengleichheit ist nur als Erhaltung der Gesamtmasse und nicht im Sinne einer Massengleichheit in den Elementarsäulen zu verstehen.

Tieferen Einblick in die noch offenen Fragen erhalten wir, wenn wir die Möglichkeiten einer Regularisierung der Erdkruste untersuchen. Die Erde sei bis zur Oberfläche des Mantels, die wir als idealisierte Mohorovičić-Fläche betrachten dürfen, im hydrostatischen Gleichgewicht. Die über der Manteloberfläche liegenden Massen denken wir abgehoben und wollen sie zweiteilig, bestehend aus einer homogenen Wasserhülle und einer einparametrischen Kruste, wieder aufbauen. Die homogene Wasserhülle hat ein Dichtegesetz mit zwei Konstanten, während für die feste Kruste gemäß

$$\rho = \rho_{\max} \left[1 - \nu \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (6)$$

ein Dichtegesetz mit drei Konstanten vorliegt². Dürfen wir die Gesamtmasse (Ozean + Kruste) als gegeben ansehen, so liegen demnach ∞^5 Möglichkeiten für den Aufbau einer idealen Gleichgewichtsfigur oder für die Regularisierung vor. Sind überdies die Tiefe des Weltozeans, die Dichte des Wassers und die Dicke der festen Kruste bekannt, so bleiben nur mehr ∞^2 Möglichkeiten; das heißt, wir haben noch sinnvoll über zwei Konstanten zu verfügen, um eine streng eindeutige Lösung zu gewinnen. Nun muß auf jeden Fall der Drehimpuls des in sich geschlossenen mechanischen Systems der Erde und damit das polare Trägheitsmoment C unverändert bleiben. Ebenso dürfen wir fordern, daß auch der Anteil der Kruste am arithmetischen Mittel der beiden äquatorialen Trägheitsmomente vor und nach der Regularisierung derselbe ist. Der tiefere Sinn dieser Forderung ist, daß dann die statische Abplattung des Normal-sphäroides der Erde identisch ist mit der statischen Abplattung des wirklichen Erdkörpers, welche aus den Bahnstörungen der künstlichen Satelliten abgeleitet werden kann. Es muß aber betont werden, daß letztere Forderung zwar äußerst zweckentsprechend und naheliegend, jedoch nicht unbedingt notwendig ist.

Halten wir diese Regularisierungsart fest, so müssen bei den isostatischen Massenverschiebungen die Trägheitsmomente C und $(A + B)/2$ erhalten bleiben. In diesem Sinne ist es sehr interessant, daß eine Berechnung der durch die isostatischen Massenverschiebungen bewirkten Änderung des Hauptträgheitsmomentes C aus 14 schematischen Schollen

² K. Ledersteger, «Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfiguren», Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1960.

durch W. de Sitter³ $\Delta C = -3,4 \cdot 10^{-7} C = -0,027 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$ ergeben hat. Dieser kleine Wert des Verhältnisses $\Delta C : C$ weicht nur mehr geringfügig vom Sollwert Null ab.

Auch das Problem des Volumens der Erde oder der Oberfläche der festen Kruste hängt eng mit der Isostasie zusammen. Bei den üblichen isostatischen Modellen werden die Kontinente zur Auffüllung des innerkrustalen Massendefizits und ebenso die Massenüberschüsse unter den Meeresböden zur Auffüllung des Defizits des Wassers verwendet. Damit aber ist das Meer vollständig verschwunden, und anstelle des Volumens der tatsächlichen Erde tritt das Volumen des Geoides. Es ist klar, daß auf diesem Wege keine wirkliche Regularisierung der Erdkruste erfolgt. Die Frage ist also, in welcher Tiefe nach der Regularisierung die Oberfläche der festen Kruste oder der Meeresboden liegt. Im nichtisostatischen Falle ist diese Tiefe ohne Zweifel identisch mit der mittleren Tiefe der Lithosphäre. So hat auch Prey⁴ seine nichtisostatische Normalerde konstruiert. Auf Grund seiner Entwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde⁵ ist die mittlere Tiefe der Lithosphäre 2456 m, während die mittlere Tiefe der Hydrosphäre 2681 m beträgt. Werden also die Kontinente abgetragen und in die Ozeane versenkt und sodann das Meer über die geglättete Oberfläche der festen Erde ausgegossen, so liegt der Wasserspiegel dieser Normalerde 225 m über dem Geoid, und die Normalerde ist volumengleich mit der tatsächlichen Erde. Im isostatischen Falle muß die Oberfläche der festen Kruste unbedingt tiefer liegen, wodurch sich das Volumen der regularisierten Erde kleiner als das der wirklichen Erde ergibt, während natürlich das Volumen des Meeres unverändert bleibt. Im Extremfall liegt nach der Regularisierung der Meeresboden in der mittleren Tiefe der Hydrosphäre, und das Normalsphäroid wird volumengleich mit dem Geoid.

In all diesen Fällen kann von einer Massengleichheit in den Elementarsäulen keine Rede sein. Vielmehr ist eine Regularisierung nur denkbar, wenn wir vertikale *und* horizontale Massenverschiebungen vornehmen, die wir am besten in zwei Etappen durchführen, womit natürlich nichts über den tatsächlichen Vorgang bei der Ausbildung des isostatischen Gleichgewichtes gesagt sein soll. Es handelt sich also bloß um eine Modellkonstruktion, bei der wir des leichteren Verständnisses wegen vom Normalsphäroid ausgehen. Dabei sei angenommen, daß das Normalsphäroid volumengleich mit dem Geoid ist oder daß der Meeresboden in der Tiefe von 3679 m liegt, welche nach der neuen Delfter Entwicklung⁶ für die

³ W. de Sitter, «On the Flattening and the Constitution of the Earth», Bull. of Astr. Inst. of the Netherlands, Vol. 2, p. 97–108, 1924.

⁴ A. Prey, «Zur Frage nach dem isostatischen Massenausgleich in der Erdrinde», I. Mitteilung, Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. 29, 1931.

⁵ A. Prey, «Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung», Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 11, 1922.

⁶ Die Ergebnisse der neuen, noch unveröffentlichten Delfter Entwicklung nach Kugelfunktion bis zur 32. Ordnung wurden mir freundlicherweise von Herrn Prof. Bruins zur Verfügung gestellt.

mittlere Tiefe der Hydrosphäre resultierte. Ferner betrachten wir nicht nur das Meer, sondern auch die feste Kruste als homogen, operieren also mit der jeweiligen Mitteldichte, was bei der geringen Dichtezunahme in der Kruste sicherlich erlaubt ist. Damit gewinnen wir sofort zwei Normalsäulen, nämlich die des Normalsphäroides und eine Vergleichssäule für die wirkliche Erde (Fig. 2). Erstere besteht aus einer Wassersäule der Dicke $T_n = 3679$ m und aus einem festen Teil der Dicke ($D - T_n$) und der Dichte ($\rho + x_n$); letztere ist eine bis zum Geoid reichende homogene Säule der Dichte $\rho = 2,67$. Diese repräsentiert das Ergebnis der durch die übliche isostatische Reduktion angestrebten «Regularisierung», bei welcher das Meer vollständig verschwindet.

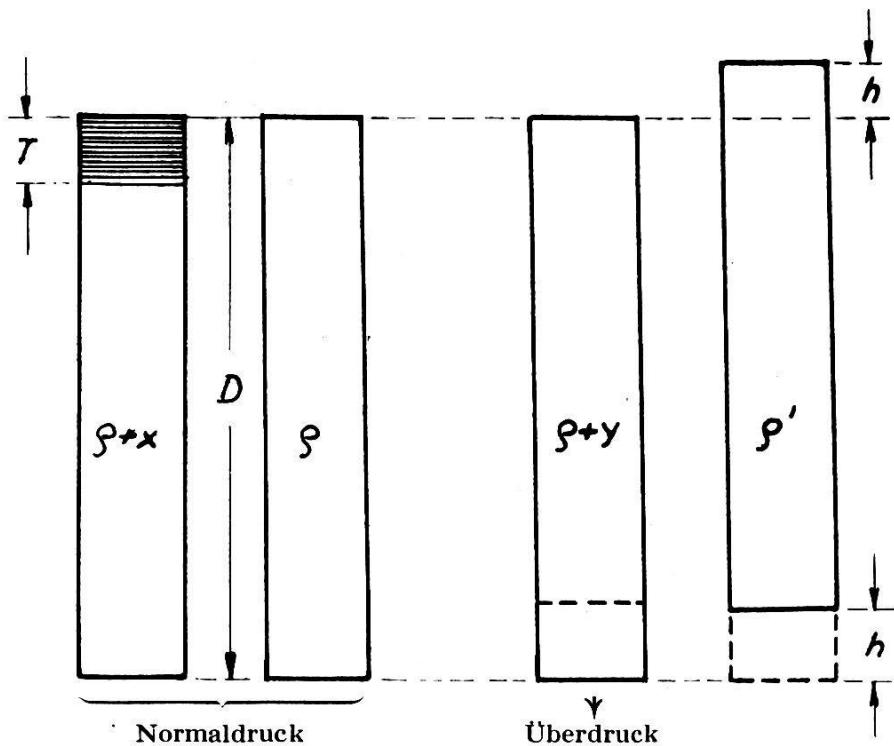


Fig. 2

Beide Normalsäulen mögen in der Ausgleichsfläche den Normaldruck bewirken, so daß wir aus der Forderung der Druckgleichheit und unter Beachtung von (4) eine Bestimmungsgleichung für x_n gewinnen:

$$(\rho + x_n) D \left(1 + \frac{1}{4} \frac{D}{R}\right) - (\rho + x_n - 1,03) T_n = \rho D \left(1 + \frac{1}{4} \frac{D}{R}\right)$$

oder

$$x_n D \left(1 + \frac{1}{4} \frac{D}{R}\right) = (1,64 + x_n) T_n. \quad (7)$$

Mit $R = 6371,2$ km und $D = 30$ km wird $\frac{1}{4} \frac{D^2}{R} = 0,035315$ km, also

$$x_n (30\,035,3 - T_n) = 1,64 T_n, \quad (7a)$$

worin T_n in Metern auszudrücken ist. Mit $T_n = 3679 \text{ m}$ folgt $x_n = 0,22892$. Diese Gleichung liefert natürlich zu jeder beliebigen Meerestiefe T den Dichtezuwachs x des Untergrundes, der zur Erhaltung des Normaldruckes erforderlich ist:

$$\begin{array}{ll} T = 1 \text{ km}; & x = 0,05648 \\ T = 2 \text{ km}; & x = 0,11700 \\ T = 3 \text{ km}; & x = 0,18199 \end{array} \quad \begin{array}{ll} T = 5 \text{ km}; & x = 0,32754 \\ T = 6 \text{ km}; & x = 0,40940 \\ T = 7 \text{ km}; & x = 0,49837 \end{array} \quad (7b)$$

Nunmehr berechnen wir die in der Säule des Normalsphäroides vorhandene Masse:

$$\begin{aligned} (\rho + x_n) \int_{-D}^{-T_n} (1 + 2z/R) dz + 1,03 \int_{-T_n}^0 (1 + 2z/R) dz &= \\ = (\rho + x_n) (D - T_n) [1 - (D + T_n)/R] + 1,03 T_n (1 - T_n/R). & \end{aligned} \quad (8)$$

Dies gibt für $D = 30 \text{ km}$:

$$75\,900,19 + 3787,18 = 79\,686,38.$$

Nach Multiplikation mit dem Querschnitt $Q = 1 \text{ m}^2$ stellen die beiden Zahlen die in Tonnen ausgedrückten Massen der festen Kruste und des Wassers in den Elementarsäulen des Normalsphäroides dar. Für die zweite Normalsäule findet man:

$$\rho \int_{-D}^0 (1 + 2z/R) dz = \rho D (1 - D/R) = 79\,722,83, \quad (9)$$

also einen Massenzuwachs von $36,45 \text{ t}$, das heißt, die verdrängte Wassermasse $3787,13 \text{ t}$ muß durch die größere Masse $3823,70 \text{ t}$ festen Krustenmaterials ersetzt werden, damit die durch die Massenauflockerung bedingte Druckabnahme kompensiert wird.

Dieser nur durch horizontale Massenverschiebungen ermöglichte Massenzuwachs setzt bereits ein, sobald die Meerestiefe kleiner als T_n wird. Man findet ihn leicht, wenn man in (8) den Index n beiseite läßt und zu jeder Meerestiefe T das zugehörige x nach (7) berechnet. Bezogen auf die zweite Normalsäule, liefert die Differenz (8) — (9) bei Vernachlässigung von T^2/R den relativen Massenzuwachs

$$xD (1 - D/R) - (1,64 T + xT)$$

und zusammen mit (7):

$$-xD \frac{5}{4} \frac{D}{R} = -1,64 T \cdot \frac{5}{4} \frac{D}{R} = -0,6142 \rho T \frac{5}{4} \frac{D}{R} \quad (10)$$

oder speziell für $D = 30 \text{ km}$ insgesamt, das heißt bezogen auf das Normalsphäroid:

$$[35,51 - 0,009\,6528 T_m] \text{ t/m}^2. \quad (10a)$$

In dieser Formel ist die Konstante, für die wir oben den genaueren Wert 36,45 gefunden haben, den begangenen Vernachlässigungen angepaßt. Für ein Meer von 2 km Tiefe ergibt sich zum Beispiel ein Massenzuwachs 16,20 t/m². Umgekehrt bewirkt in der Tiefsee $T > T_n$ die Kompression der Kruste einen Druckanstieg, zu dessen Kompensation mehr festes Material wegzunehmen ist, als Wasser zufließt. Für $T = 7$ km folgt bereits eine Massenverminderung im Betrage —32,06 t/m².

Auf dem Festlande ist mit zunehmender Höhe h ein ansteigender Massenzuwachs erforderlich, den wir als Dichtezuwachs y in einer mit dem Geoid abschließenden Säule der Dicke ($D - h$) darstellen, welche in der Ausgleichsfläche einen Überdruck erzeugt, der durch entsprechende Auflockerung zu tilgen ist. Diese Auflockerung erfolgt nach dem Prinzip der Massengleichheit, bis mit dem Normaldruck die notwendige Druckgleichheit hergestellt ist. Die Massengleichung (2) lautet jetzt:

$$\rho' \int_{-D+h}^h (1 + 2z/R) dz = (\rho + y) \int_{-D+h}^0 (1 + 2z/R) dz \quad (2a)$$

und liefert

$$(\rho + y)(D - h) \left(1 - \frac{D - h}{R} \right) = \rho' \left[D + \frac{h^2}{R} - \frac{(D - h)^2}{R} \right],$$

was mit der wesentlich negativen Größe $\Delta\rho = (\rho' - \rho)$ bei Vernachlässigung von h^2/R schließlich ergibt:

$$(-\Delta\rho + y)D = (\rho + y)h(1 + D/R). \quad (2b)$$

Durch diese Massengleichung ist bei gegebenem h bloß die Defizitdichte ($\Delta\rho - y$) bestimmt, ohne daß eine Trennung der beiden Summanden möglich wäre.

Vor der Auflockerung ist der Überdruck $y(D - h)g_c$ vorhanden. Die Auflockerung faßt man gedanklich am leichtesten so, daß man zunächst die Topographie als Zusatzmasse der Dichte ($\rho + y$) deutet, wodurch der Überdruck zum Betrage

$$y(D - h)g_c + (\rho + y)hg$$

ansteigt, der durch Massenentzug der Dichte ($-\Delta\rho + y$) getilgt wird:

$$y(D - h)(1 + D/4R) + (\rho + y)h = D(-\Delta\rho + y)(1 + D/4R). \quad (11)$$

Zusammen mit (2b) ergibt dies für die Zusatzmasse und Zusatzdichte mit derselben Genauigkeit:

$$y(D - h) = (\rho + y)h \frac{5}{4} \frac{D}{R}; \quad y = \frac{5}{4} \frac{h}{R} \rho = 3,3375 \frac{h}{R}. \quad (12)$$

Die gesamte Zusatzmasse in den kontinentalen Elementarsäulen ist demnach

$$35,51 + y(D - h) = (35,51 + 0,0157153 h_m) \text{ t/m}^2 \quad (13)$$

und die weitere Dichteabnahme gegenüber $\rho = 2,67$

$$\Delta\rho = -[\rho h (1 - D/4R)] : D = -0,0889 h_{\text{km}}. \quad (14)$$

Damit scheint das Problem gelöst. Nach horizontalen Massenverschiebungen, welche die Druckverhältnisse in der Ausgleichsfläche ändern, kann ein strenger Druckausgleich durchgeführt werden, indem man vertikale Massenverschiebungen unter strenger Beibehaltung der nunmehrigen Massen in den Elementarsäulen vornimmt. Aber die vorstehenden Ausführungen sind noch in verschiedenen Richtungen unvollständig. So wurde ohne Beweis vorausgesetzt, daß das Normalsphäroid mit dem Geoid volumgleich ist, obwohl ein größeres Volumen denkbar ist. Da die mittlere Tiefe der Lithosphäre nach der Delfter Entwicklung 3348 m, die der Hydrosphäre jedoch 3679 m beträgt, könnte die Oberfläche des Normalsphäroides bis maximal 331 m über dem Geoid liegen. Letzterer nichtisostatische Wert ist natürlich gerade wegen der Existenz der Isostasie ausgeschlossen. Sollte aber die Dicke der gesamten Hülle (Ozean + fester Kruste) beim Normalsphäroid etwas größer sein als der Wert D , der sich für die wirkliche Erde aus der seismischen, gravimetrischen und geologischen Forschung ergibt, so ließen sich obige Rechnungen ebenfalls widerspruchsfrei durchführen. Auch haben wir bei den Massenverschiebungen gar nicht berücksichtigt, ob sie nicht möglicherweise mit einer Verschiebung des Schwerpunkts und mit einer Änderung des Trägheitsmomentes C verbunden sind, was beides theoretisch nicht sein dürfte. Die drei aufgeworfenen Fragen hängen übrigens vermutlich eng zusammen.

Es sei noch die Frage der Schwerpunktsverschiebung untersucht. Um die auf die Flächeneinheit bezogene Masse der Topographie zu berechnen, müssen wir die entsprechenden Koeffizienten L und H der Entwicklungen der Lithosphäre und der Hydrosphäre mit den Dichten 2,67 und 1,03 multiplizieren und die Produkte voneinander subtrahieren:

$$q = (2,67 L - 1,03 H) \text{ t/m}^2. \quad (15)$$

Bequemer ist es, die Wassermassen auf die Krustendichte zu kondensieren, wodurch eine neue Lithosphäre entsteht:

$$\bar{L} = L - \frac{1,03}{2,67} H; \quad q = 2,67 \bar{L}. \quad (16)$$

Bekanntlich hängt die Schwerpunktslage von den Gliedern 1. Ordnung der Kugelfunktionsentwicklung ab. Mit den Gliedern 1. Ordnung der neuen Delfter Entwicklung ergibt sich:

$$L_{1,0} = + 945 \text{ m}; \quad H_{1,0} = + 867 \text{ m}; \quad \bar{L}_{1,0} = + 610,5 \text{ m};$$

$$q_{1,0} = + 1630,1 \text{ t/m}^2$$

$$L_{1,1}^{(c)} = + 1188 \text{ m}; \quad H_{1,1}^{(c)} = + 1052 \text{ m}; \quad \bar{L}_{1,1}^{(c)} = + 782,2 \text{ m};$$

$$q_{1,1}^{(c)} = + 2088,4 \text{ t/m}^2$$

$$L_{1,1}^{(s)} = + 800 \text{ m}; \quad H_{1,1}^{(s)} = + 646 \text{ m}; \quad \bar{L}_{1,1}^{(s)} = + 550,8 \text{ m};$$

$$q_{1,1}^{(s)} = + 1470,6 \text{ t/m}^2$$

und man erhält:

$$q_1(\varphi, \lambda) = q_{1,0} \sin \varphi + q_{1,1}^{(c)} \cos \varphi \cos \lambda + q_{1,1}^{(s)} \cos \varphi \sin \lambda. \quad (17)$$

Im nichtisostatischen Falle bedeuten die Kontinente zusätzliche Massen und die Ozeane zusätzliche Massendefekte, welche den Schwerpunkt der Normalerde verschieben. Diese Verschiebung ist auf das Maximum von q_1 hingerichtet. Sind s , φ_s und λ_s die Polarkoordinaten der Verschiebung, so sind ihre Komponenten in den Koordinatenrichtungen

$$\begin{aligned} \Delta x &= s \cos \varphi_s \cos \lambda_s = q_{1,1}^{(c)} / \rho_m \\ \Delta y &= s \cos \varphi_s \sin \lambda_s = q_{1,1}^{(s)} / \rho_m; \quad \Delta z = s \sin \varphi_s = q_{1,0} / \rho_m, \end{aligned} \quad (18)$$

worin $\rho_m = 5,5168$ die mittlere Erddichte bedeutet. Man findet:

$$s = \frac{q_{1,0} \max}{\rho_m} = \frac{4\pi}{3E} R^3 \cdot q_{1,0} \max = \frac{1}{\rho_m} \sqrt{q_{1,0}^2 + q_{1,1}^{(c)2} + q_{1,1}^{(s)2}} = 549,2 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{q_{1,1}^{(s)}}{\sqrt{q_{1,1}^{(c)2} + q_{1,1}^{(s)2}}}; \quad \varphi_s = 32^\circ 33' \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \lambda_s = q_{1,1}^{(s)} : q_{1,1}^{(c)}; \quad \lambda_s = 35^\circ 09'.$$

Der Verschiebungsvektor weist auf Palästina hin.

Im isostatischen Falle bleibt die Richtung dieses Vektors natürlich unverändert, während sich sein Betrag zummindest stark verkleinert. Zur Abschätzung kondensieren wir die Topographie auf die Kugel vom Radius R , die Kompensationsmasse auf die in der mittleren Tiefe gelegenen Kugel vom Radius $(R - D/2)$. Dann ist die Flächendichte der Topographie $\rho \bar{L}$, die der Kompensation gemäß (10) $\rho \bar{L} (1 + D/R)$, also:

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{4\pi}{3E} \rho \bar{L}_{1,0} \max [R^3 - (R - \frac{1}{2}D)^3 (1 + D/R)] = \\ &= s \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{D}{R} \right) \left(1 + \frac{D}{R} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{D}{R} s. \end{aligned} \quad (20)$$

Wie schon erwähnt, wird beim strengen Massenausgleich, wie wir ihn in den Elementarsäulen durchgeführt haben, die größere Flächendichte der Kompensation gerade durch die Flächenverringerung aufgehoben. Hingegen hängt die Schwerpunktslage von der Differenz der Produkte (Masse mal Abstand vom Koordinatenursprung) ab, und s_i könnte demnach nur verschwinden, wenn die Kompensationsmasse entsprechend größer wäre als die Masse der Topographie, während andererseits der Betrag (20) eine logische Folge des strengen Massenausgleiches ist. Dieser Betrag ist sehr klein; für $D = 30$ km und 60 km resultieren beziehungsweise 1,29 und 2,59 m.

Mit (20) ist aber nur die aus der vertikalen Massenbewegung hervorgehende Schwerpunktsverschiebung gewonnen. Wir haben also noch die aus dem horizontalen Massentransport resultierende Schwerpunktsverlagerung abzuleiten. Hierzu gehen wir von der mit (16) eingeführten Entwicklung

$$\bar{L} = L - 0,3858 H \quad (16a)$$

aus. Auf dem Festlande ist $H = 0$ und daher $\bar{L} = L = h$. Auf dem Meere ist $L = H = -T$, also $\bar{L} = -0,6142 T$. Mithin können wir die beiden Gleichungen (10a) und (13) für die horizontalen Massenverschiebungen in eine zusammenfassen:

$$\left[35,51 + \rho \bar{L}_m \frac{5}{4} \frac{D}{R} \right] t/m^2, \quad (21)$$

woraus sich gemäß (19) eine Schwerpunktsverschiebung des Betrages

$$(\rho \bar{L}_{1, \max} : \rho_m) \cdot \frac{5}{4} \frac{D}{R} = \frac{5}{4} \frac{D}{R} s \quad (22)$$

in der gleichen Richtung ergibt. Für $D = 30$ und 60 km folgen für diese Verschiebung 3,23 und 6,46 m.

Die horizontalen und vertikalen Massentransporte zusammen verursachen somit die Schwerpunktsverschiebung

$$\frac{7}{4} \frac{D}{R} s. \quad (23)$$

Dies ist aber genau dieselbe Verschiebung, wie sie sich beim üblichen Druckausgleich ergibt. Denn dort ist gemäß (5) die Flächendichte der Kompensation $\rho \bar{L} (1 - D/4R)$, also

$$s_i = s \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{D}{R} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{D}{R} \right) \right] = \frac{7}{4} \frac{D}{R} s. \quad (23a)$$

Diese theoretisch natürlich undenkbare Schwerpunktsverschiebung, die bei der isostatischen Reduktion eine entgegengesetzt gleiche Verschie-

bung des Schwerpunkts des Cogeoides gegenüber dem Schwerpunkt der tatsächlichen Erde zur Folge hat, wurde schon vielfach diskutiert, ohne daß bisher eine wirklich befriedigende Erklärung des Widerspruchs gelungen wäre. Der Widerspruch kann daher anscheinend nur auf einen Mangel des isostatischen Konzeptes zurückgeführt werden, der auch bei Einführung der horizontalen Massenverschiebungen bestehen bleibt.

Bei der vorliegenden Lösung sind aber noch zwei weitere Fragen offen. Wir haben nämlich die horizontalen Massenverschiebungen aus der Forderung des gleichen Normaldruckes in unseren beiden Normalsäulen abgeleitet und stillschweigend angenommen, daß bei diesen Massenverschiebungen die Gesamtmasse der Erde erhalten bleibt. Nun zeigen aber die obigen Ausführungen über die Regularisierung der Erdkruste deutlich, daß die Forderung desselben «Normaldruckes» in der Ausgleichsfläche keineswegs notwendig ist. Notwendig ist allein, daß in der Ausgleichsfläche sowohl beim Normalsphäroid wie auch bei der wirklichen Erde konstanter Druck herrscht, ohne daß diese Konstante in beiden Figuren denselben Wert haben muß, und daß die Masse der gesamten Kruste unverändert bleibt. Hierfür liegt aber in der Gleichung (21) ein wichtiges Kriterium vor. Denn bei Erhaltung der Gesamtmasse muß (21) für das Glied nullter Ordnung von \bar{L} verschwinden. Die beiden Hauptglieder der Delfter Entwicklung: $L_0 = -3348 \text{ m}$ und $H_0 = -3679 \text{ m}$ liefern gemäß (16a): $\bar{L}_0 = -1928,8 \text{ m}$. Will man dies in (21) einführen, so ist zu bedenken, daß der Massenzuwachs $f(30) = 36,45$ beziehungsweise 35,51 unter der Voraussetzung der Druckgleichheit in den beiden Normalsäulen für $D = 30 \text{ km}$ berechnet wurde. Unter derselben Voraussetzung müßte die Erhaltung der Gesamtmasse für ein bestimmtes D die Gleichung

$$f(D) - 6437,4 D/R = 0 \quad (24)$$

befriedigen. Rechnen wir aber den Massenzuwachs $f(D)$ nach den Formeln (7) bis (9), so finden wir der Reihe nach für:

$$\begin{aligned} D = 30 \text{ km: } & + 36,45 - 30,31 = + 6,14 \text{ t/m}^2 \\ 40 & + 48,23 - 40,42 = + 7,81 \\ 50 & + 60,00 - 50,52 = + 9,48 \\ 60 & + 71,78 - 60,62 = + 11,16 \end{aligned}$$

Kleinere Werte von D sind physikalisch sicher unmöglich. Übrigens würden unsere Näherungsformeln nicht mehr genügen, sobald die Differenz ($D - T_n$) kleiner wird.

Zuerst haben wir zu prüfen, ob diese Diskrepanz auf die Unsicherheit in der Entwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse zurückgeführt werden kann. Halten wir die mittlere Festlandshöhe mit $+331 \text{ m}$ fest und führen die mittlere Tiefe der Hydrosphäre als Unbekannte x ein, so gilt: $L_0 = x + 331$ und

$$\bar{L}_0 = 0,6142 x + 331. \quad (25)$$

Andererseits ist der Koeffizient von D/R in Gleichung (24):

$$+ \frac{5}{4} \rho \bar{L}_0 = + 3,3375 L_0,$$

und wir finden aus der Verbindung mit (25):

$$\begin{array}{lll} D = 30 \text{ km: } \bar{L}_0 = -2319,4, H_0 = -4315 \text{ m} \\ 40 & -2301,8 & -4287 \\ 50 & -2290,8 & -4269 \\ 60 & -2283,8 & -4257 \end{array},$$

also offensichtlich zu große Werte für H_0 . Es scheint demnach, daß die Annahme der Druckgleichheit in der Ausgleichsfläche beim Normal-sphäroid und bei der tatsächlichen Erde unmöglich ist.

Läßt man daher diese Annahme fallen, so ist nach (24) der Massenzuwachs $f(D)$ in der zweiten Normalsäule durch $+6437,4 D/R$ bestimmt, und wir finden aus (8) und (9) zur Bestimmung des Dichteunterschiedes x_n die Gleichung:

$$\begin{aligned} (\rho + x_n)(D - T_n)[1 - (D + T_n)/R] &= \\ &= \rho D (1 - D/R) - 3787,18 - 6437,4 D/R. \end{aligned} \quad (26)$$

Damit aber kann der Druck in der Ausgleichsfläche sowohl beim Normal-sphäroid (A) als auch bei der wirklichen Erde (B) berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= (\rho + x_n) D (1 + D/4 R) - (1,64 + x_n) T_n \\ B &= \rho D (1 + D/4 R), \end{aligned}$$

immer mit der oben eingeführten Annäherung. Es ergeben sich folgende Druckwerte und Differenzen, ausgedrückt in 10^3 kp/m^2 :

$$\begin{array}{llll} D = 30 \text{ km: } A = 80200,47; B = 80194,29; (A - B) = + 6,18 \\ 40 & 106975,50 & 106967,63 & + 7,87 \\ 50 & 133771,50 & 133761,92 & + 9,58 \\ 60 & 160588,46 & 160577,16 & + 11,29 \end{array}$$

Die gesuchte Druckdifferenz ist natürlich numerisch nur ganz geringfügig größer als die oben ausgewiesene Massenzunahme. Es ist aber auch die Kenntnis der Druckwerte A und B selbst von Interesse; wir sehen, daß es sich bloß um eine relative Differenz von 0,07 bis 0,08 Promille handelt, welche mit wachsendem D abnimmt.

Die vorliegende Lösung vermag also grundsätzlich Druck- und Massenausgleich sinngemäß zu verbinden und die Erhaltung der Gesamtmasse unter gleichzeitiger Bestimmung der Druckdifferenz in den beiden Normalsäulen zu garantieren. Jedoch muß noch besonders hervorgehoben werden, daß hier ganz im Sinne der Pratt-Hayfordschen Hypothese die Ausgleichstiefe D mit der Erdkrustendicke identifiziert wurde, was besagt, daß die Normaldichte 2,67 der Erdkruste bis zur Ausgleichsfläche gelten soll. In Wahrheit reicht aber die Erdkruste nur bis zur

Mohorovič-Diskontinuität, welche unter den Bergen wesentlich tiefer liegt als unter den Meeren. Ihre mittlere Dichte wird mit etwa 30 km angenommen. Im Sinne der Hypothese von Airy-Heiskanen ist also die Tiefe der Ausgleichsfläche größer als die mittlere Dicke der Erdkruste. Mithin hätten wir in unseren beiden Normalsäulen in 30 km Tiefe einen Dichtesprung anzunehmen, der in der zweiten Normalsäule etwa 0,6 Einheiten beträgt, in der ersten Normalsäule hingegen um x_n geringer ist.

Jedoch bleibt auch jetzt noch eine Reihe von Fragen offen. Das abermalige Auftreten der Schwerpunktsverschiebung beweist, daß auch das neue Modell der Isostasie noch unvollkommen ist. Auch wurde das Volumproblem und die Frage der Konstanz des Trägheitsmomentes C noch nicht untersucht. Es bleibt nur zu hoffen, daß die Lösung dieser Probleme eine Verbesserung des isostatischen Modells ermöglicht, die Schwerpunktsverschiebung aufhebt und die direkte Berechnung der Ausgleichstiefe auf Grund der Delfter Entwicklungen gestattet.

Eidgenössische Technische Hochschule

Institut für Orts-, Regional- und Landesplanung

Seminar für Gemeindeingenieure

(Orts-, Regional- und Landesplanung)

Sommersemester 1963

- | | |
|----------|---|
| 3. Mai | Dr. F. Kastner, Leiter des Österreichischen Institutes für Raumplanung, Reichsratsstraße 17, Wien I: «Aktuelle Fragen der Planung in Österreich» |
| 10. Mai | Dr. iur. P. Guthäuser, Direktionssekretär der Kantonalen Baudirektion Aargau, Aarau: «Organisation von Regionalplanungsverbänden mit besonderer Berücksichtigung der Nordwestschweiz» |
| 17. Mai | Dr. A. Huber, Forstmeister, Lahnstraße 23, Schaffhausen: «Zur Regionalplanung des Randengebietes» |
| 24. Mai | Dr. H. J. Rapp, dipl. Ing. ETH, Hallenweg 5, Muttenz: «Beziehungen der Gemeinden zur Nationalstraßenplanung in verkehrstechnischer Hinsicht» |
| 7. Juni | Dr. rer. pol. K. Ulmi, Schützenrain 4, Zürich 4/47: «Nationale und regionale Industrialisierungspolitik» |
| 14. Juni | Dipl.-Ing. F. Baldinger, Chef des Amtes für Gewässerschutz, Kantonale Baudirektion, Aarau: «Gewässerschutz in der Orts- und Regionalplanung» |
| 21. Juni | Dipl.-Ing. H. Braschler, Chef des Kantonalen Meliorations- und Vermessungsamtes, Myrtenstraße 8, St. Gallen: «Meliorationen und Siedlungskorrekturen in der Ostschweiz» |