Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 61 (1963)

Heft: 3

Artikel: Les calculs de compensation basés sur des sommes trigonométriques

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-218442

Les calculs de compensation basés sur des sommes trigonométriques

par A. Ansermet

Dans de nombreux domaines, en technique instrumentale notamment (voir [3]), on rencontre des fonctions périodiques qu'il faut analyser et dont on doit déterminer les coefficients. Dans la pratique on se borne en général à calculer une expression dite «somme trigonométrique» revêtant la forme suivante:

$$\begin{aligned} S(x) = y = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Ce problème n'est pas nouveau, mais la solution classique ne donne pas toujours satisfaction au praticien; le but de ces lignes est surtout de mettre en évidence certains aspects de cette somme quant à son application. L'expression $S(x)$ peut être convertie en une somme de sinus ou de cosinus ([2], p. 211), par exemple:

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x = r \sin (x + \alpha)$$

où $$r^2 = A_1^2 + B_1^2 \qquad \operatorname{tg} \alpha = A_1 : B_1$$

Après cette substitution sous forme de sinus, les termes prennent le nom d'harmoniques, la quantité telle que r étant une demi-amplitude. Faisons de plus l'hypothèse initiale suivante: Les valeurs observées de x sont contenues dans une seule période, égale ou ramenée à la valeur 2π. On aura n couples de valeurs expérimentales

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3 \ldots x_n, y_n$$

donnant lieu à un système de n équations.

Un premier cas, très simple, est celui où le nombre d'équations est égal au nombre des inconnues; il n'y a pas de compensation. $S(x)$ reçoit alors le nom de somme trigonométrique d'interpolation; ce cas simple est traité à fond dans la littérature ([2], p. 213). Toutes les discordances sont éliminées, mais ce calcul présente peu d'intérêt.

Pour la compensation proprement dite, et en vue de faciliter les calculs, on s'efforce de réaliser la condition suivante: La matrice du système d'équations normales est diagonale, et il en est de même pour la matrice inverse, celle des coefficients de poids des inconnues compensées.

La solution usuelle consiste à réaliser l'équidistance des n valeurs de x, mais une solution plus générale sera développée.

Solution de Bessel

Pour faciliter les écritures la période 2π sera exprimée en degrés (360°); de plus on peut avoir recours à une solution provisoire; l'équation (1) prend alors la forme familière et générale:

$$-f + v = dA_0 + dA_1 \cos x + dA_2 \cos 2x + \ldots \\ + dB_1 \sin x + dB_2 \sin 2x + \ldots \tag{2}$$

la définition des f étant connue (valeur provisoire — valeur observée), tandis que les dA et dB sont les corrections à apporter aux valeurs provisoires des inconnues. D'autres particularités sont à signaler: On peut éliminer dA_0 en formant des équations réduites, mais les termes absolus f sont seuls à réduire car, grâce à l'équidistance des x, on a: $[\sin x] = [\cos x] = [\cos 2x] = \ldots = 0$.

Des cas concrets montreront de façon explicite la marche à suivre le nombre des inconnues est limité à cinq, ce qui suffit au point de vue didactique. On aura successivement $n = 6$, puis $n = 7$:

	$x =$	$2x =$	$\cos x =$	$\sin x =$	$\cos 2x =$	$\sin 2x =$	
1	30°	60°	+ 0,866	+ 0,500	+ 0,500	+ 0,866	+ 1
2	90°	180°	0,00	+ 1,00	— 1,00	0,00	+ 1
3	150°	300°	— 0,866	+ 0,500	+ 0,500	— 0,866	+ 1
4	210°	420°	— 0,866	— 0,500	+ 0,500	+ 0,866	+ 1
5	270°	540°	0,00	— 1,00	— 1,00	0,00	+ 1
6	330°	660°	+ 0,866	— 0,500	+ 0,500	— 0,866	+ 1

Certains calculateurs attribuent la valeur zéro à x, initialement, au lieu de 30°; cette valeur est arbitraire. Poids à priori: $p = 1$.

Inconnues: dA_1, dB_1, dA_2, dB_2, dA_0.

On obtient immédiatement la matrice des équations normales et l'inverse:

$$\begin{bmatrix} 3{,}00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}00 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

En remarquant que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et de même pour $2x$, on obtient les poids à posteriori qui sont tous égaux: $\frac{1}{P} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Contrôle de ces poids: $[p : P] = 6 \times \frac{5}{6} = 5$ (5 inconnues).

Le calcul des termes absolus des équations normales est facile.

En particulier on a: $\quad -[f] = 6\,dA_0$

$$-[\cos x \cdot f] = 3\,dA_1 \qquad -[\sin x \cdot f] = 3\,dB_1 \ldots \tag{3}$$

C'est grâce à la propriété connue dite d'orthogonalité que les matrices sont diagonales. L'exemple ci-après fut conçu en vue d'être combiné avec le précédent; on a encore converti en degrés:

	$x =$	$2x =$	$\cos x =$	$\sin x =$	$\cos 2x =$	$\sin 2x =$	
1	25°,7	51°,4	+ 0,901	+ 0,434	+ 0,624	+ 0,782	1
2	77°,1	154°,3	+ 0,223	+ 0,975	— 0,901	+ 0,434	1
3	128°,6	257°,1	— 0,624	+ 0,782	— 0,223	— 0,975	1
4	180°	360°	— 1,00	0,00	+ 1,00	0,00	1
5	231°,4	462°,9	— 0,624	— 0,782	— 0,223	+ 0,975	1
6	282°,9	565°,7	+ 0,223	— 0,975	— 0,901	— 0,434	1
7	334°,3	668°,6	+ 0,901	— 0,434	+ 0,624	— 0,782	1

Quatre éléments diagonaux de la matrice des équations normales sont égaux à 3,5 et le cinquième à 7. A priori on a $p = 1$.

Pour les sept poids à posteriori on obtient la valeur $^5/_7 = \frac{1}{P}$ ou $P = {}^7/_5 = 1{,}4$. Dans ces deux exemples les poids sont amplifiés 1,2, puis 1,4 fois.

Solution générale

L'application trop systématique de l'équidistance dans le choix des valeurs de x présente des inconvénients; graphiquement les ordonnées $y_1, y_2 \ldots y_n$ sont donc tracées à intervalles réguliers, et leurs extrémités coïncident plus ou moins avec la courbe représentative de la fonction $S(x) = y$. Si cette courbe présente des sinuosités prononcées, il serait désirable que l'intervalle entre deux ordonnées puisse varier, la matrice des équations normales restant diagonale. Une solution consiste à combiner deux groupes de valeurs x, ceux pour lesquels $n = 6$ et $n = 7$ par exemple; les valeurs initiales pour x peuvent varier, la différence $30° — 25°,7 = 4°,3$ étant arbitraire. Le calculateur a donc bien des possibilités.

	$x =$
1	25°,7
2	30°
3	77,1
4	90
5	128,6
6	150
7	180
8	210
9	231,4
10	270
11	282,9
12	330
13	334,3

Deux intervalles 51°,4 et 60°

La forme des équations normales est toujours:

$$[v] = 0; [\cos x \cdot v] = [\sin x \cdot v] = [\cos 2x \cdot v] = [\sin 2x \cdot v] = 0, \qquad (4)$$

et pour la matrice on obtient, en se basant sur ce qui précède:

$$
\begin{bmatrix}
6{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6{,}5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6{,}5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6{,}5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 13{,}0
\end{bmatrix}
$$

Les valeurs inverses des éléments diagonaux sont les coefficients de poids des inconnues compensées. L'amplification des poids est ici égale à $^{13}/_{5} = 2{,}6$ fois.

A certains égards on pourrait renoncer à l'équidistance des valeurs observées, mais les calculs deviennent longs; cette solution portant sur deux équidistances (51',4 et 60°) joue un rôle intermédiaire. Dans certains cas elle sera fort opportune.

Méthode de Tchebicheff

Lorsque le nombre des inconnues augmente et surtout si le nombre n des observations devient fort élevé, on a recours à une solution plus simple dont le mérite revient à Tchebicheff; une solution provisoire n'est plus nécessaire. La forme initiale est de nouveau:

$$
\begin{aligned}
S(x) = y = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots \\
+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots
\end{aligned}
$$

L'inconnue A_0 est toujours calculée par l'expression:

$$n A_0 = [y]_1^n. \quad \text{Ce } A_0 \text{ peut être éliminé.}$$

De plus on admet la valeur initiale $x = 0$; traitons un cas concret pour $n = 48$ et 9 inconnues. Il y a équidistance, et la période est 2π.

La somme trigonométrique considérée est dite d'ordre $p = 4$. L'examen du tableau permet instantanément d'écrire les relations (5):

$$
\left.
\begin{array}{lll}
y_0 - y_{180} \cong 2(A_1 + A_3) & y_{90} - y_{270} \cong 2(B_1 - B_3) & (\nu = 1) \\
y_0 - y_{90} + y_{180} - y_{270} \cong 4A_2 & y_{45} - y_{135} + y_{225} - y_{315} \cong 4B_2 & (\nu = 2) \\
\multicolumn{2}{l}{y_0 - y_{60} + y_{120} - y_{180} + y_{240} - y_{300} \cong 6A_3;} & \\
\multicolumn{2}{l}{\quad y_{30} - y_{90} + y_{150} - y_{210} + y_{270} - y_{330} \cong 6B_3} & (\nu = 3) \\
\multicolumn{2}{l}{y_0 - y_{45} + y_{90} - y_{135} + y_{180} - y_{225} + y_{270} - y_{315} \cong 8A_4} & (\nu = 4) \\
\multicolumn{2}{l}{y_{22,5} - y_{67,5} + y_{112,5} - y_{157,5} + y_{202,5} - y_{247,5} + y_{292,5} -} & \\
\multicolumn{2}{l}{\quad - y_{337,5} \cong 8B_4} & (\nu = 4)
\end{array}
\right\} \quad (5)
$$

	x	$2x$	$3x$	$4x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cos 2x$	$\sin 2x$	$\cos 3x$	$\sin 3x$	$\cos 4x$	$\sin 4x$
1	0	0	0	0	+1,00	0,00	+1,00	0,00	+1,00	0,00	+1,00	0,00
2	7°,5											
3	15°	30°	45°	60°	+0,966	+0,259	+0,866	+0,500	+0,707	+0,707	+0,500	+0,866
4	22,5	45	67,5	90	+0,924	+0,383	+0,707	+0,707	+0,383	+0,924	0,00	+1,00
5	30	60	90	120	+0,866	+0,500	+0,500	+0,866	0,00	+1,00	—0,500	+0,866
6	37,5											
7	45	90	135	180	+0,707	+0,707	0,00	+1,00	—0,707	+0,707	—1,00	0,00
8	52,5											
9	60	120	180	240	+0,500	+0,866	—0,500	+0,866	—1,00	0,00	—0,500	—0,866
10	67,5	135	202,5	270	+0,383	+0,924	—0,707	+0,707	—0,924	—0,383	0,00	—1,00
11	75	150	225	300	+0,259	+0,966	—0,866	+0,500	—0,707	—0,707	+0,500	—0,866
12	82,5											
13	90	180	270	360	0,00	+1,00	—1,00	0,00	0,00	—1,00	+1,00	0,00
14	97,5											
15	105	210	315	420	—0,259	+0,966	—0,866	—0,500	+0,707	0,707	+0,500	+0,866
16	112,5	225	337,5	450	—0,383	+0,924	—0,707	—0,707	+0,924	—0,383	0,00	+1,00
17	120	240	360	480	—0,500	+0,866	—0,500	—0,866	+1,00	0,00	—0,500	+0,866
18	127,5											
19	135	270	405	540	—0,707	+0,707	0,00	—1,00	+0,707	+0,707	—1,00	0,00
20	142,5											
21	150	300	450	600	—0,866	+0,500	+0,500	—0,866	0,00	+1,00	—0,500	—0,866
22	157,5	315	472,5	630	—0,924	+0,383	+0,707	—0,707	—0,383	+0,924	0,00	—1,00
23	165	330	495	660	—0,966	+0,259	+0,866	—0,500	—0,707	+0,707	+0,500	—0,866
24	172,5											
25	180	360	540	720	—1,00	0,00	+1,00	0,00	—1,00	0,00	+1,00	0,00
26	187,5											
27	195	390	585	780	—0,966	—0,259	+0,866	+0,500	—0,707	—0,707	+0,500	+0,866
28	202,5	405	607,5	810	—0,924	—0,383	+0,707	+0,707	—0,383	—0,924	0,00	+1,00
29	210	420	630	840	—0,866	—0,500	+0,500	+0,866	0,00	—1,00	—0,500	+0,866
30	217,5											
31	225	450	675	900	—0,707	—0,707	0,00	+1,00	+0,707	—0,707	—1,00	0,00
32	232,5											
33	240	480	720	960	—0,500	—0,866	—0,500	+0,866	+1,00	0,00	—0,500	—0,866
34	247,5	495	742,5	990	—0,383	—0,924	—0,707	+0,707	+0,924	+0,383	0,00	—1,00
35	255	510	765	1020	—0,259	—0,966	—0,866	+0,500	+0,707	+0,707	+0,500	—0,866
36	262,5											
37	270	540	810	1080	0,00	—1,00	—1,00	0,00	0,00	+1,00	+1,00	0,00
38	277,5											
39	285	570	855	1140	+0,259	—0,966	—0,866	—0,500	—0,707	+0,707	+0,500	+0,866
40	292,5	585	877,5	1170	+0,383	—0,924	—0,707	—0,707	—0,924	+0,383	0,00	+1,00
41	300	600	900	1200	+0,500	—0,866	—0,500	—0,866	—1,00	0,00	—0,500	+0,866
42	307,5											
43	315	630	945	1260	+0,707	—0,707	0,00	—1,00	—0,707	—0,707	—1,00	0,00
44	322,5											
45	330	660	990	1320	+0,866	—0,500	+0,500	—0,866	0,00	—1,00	—0,500	—0,866
46	337,5	675	1012,5	1350	+0,924	—0,383	+0,707	—0,707	+0,383	—0,924	0,00	—1,00
47	345	690	1035	1380	+0,966	—0,259	+0,866	—0,500	+0,707	—0,707	+0,500	—0,866
48	352,5											

Des remarques essentielles sont opportunes: il a été fait abstraction des *v;* de plus cette succession de termes positifs et négatifs entraîne l'élimination de l'inconnue A_0 même si ce A_0 n'était pas éliminé.

Les formules générales de Tchebicheff sont, en substituant 2π à 360°:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_\nu + A_{3\nu} + A_{5\nu} + A_{7\nu} + \ldots \cong \frac{1}{2\nu}\Bigg[y(0) - y\left(\frac{\pi}{\nu}\right) + \\
+ y\left(2\frac{\pi}{\nu}\right) - y\left(3\frac{\pi}{\nu}\right) + \ldots - y\left((2\nu-1)\frac{\pi}{\nu}\right)\Bigg] \\
B_\nu - B_{3\nu} + B_{5\nu} - B_{7\nu} + \ldots \cong \frac{1}{2\nu}\Bigg[y\left(\frac{\pi}{2\nu}\right) - y\left(\frac{3\pi}{2\nu}\right) + \\
+ y\left(\frac{5\pi}{2\nu}\right) \ldots y\left((4\nu-1)\frac{\pi}{2\nu}\right)\Bigg]
\end{aligned}
\right\} \quad (6)
$$

Il n'y a que des indices multiples impairs de ν pour les A et les B. Dans les relations (5) on a successivement $\nu = 1, 2, 3, 4$. Si $\nu = 1$, on considère comme valables les indices ν et 3ν; si $\nu = 2, 3, 4$, on fait abstraction des valeurs $3\nu = 6$, $3\nu = 9$, $3\nu = 12$, et ainsi de suite. Dans l'exemple numérique la valeur n fut portée à 48 pour mieux montrer l'application de la méthode.

En *résumé* les praticiens disposent des solutions suivantes:

1° celle classique de Bessel qui est trop connue pour donner lieu à des commentaires;

2° celle plus générale tendant à fractionner la série d'éléments observés en deux groupes ayant chacun une équidistance propre pour les valeurs x; la matrice des équations normales est aussi diagonale;

3° la méthode de Tchebicheff, pour un nombre n fort élevé d'observations.

Pour terminer rappelons, au sujet de ce problème, une appréciation d'un géodésien éminent (sans traduire): «Genau genommen ergeben die Gleichungen gar nicht die A und B selbst, sondern Aggregate aus unendlich vielen Gliedern» (Helmert, Ausgleichungsrechnung, p. 411). Cette remarque visait la solution de Bessel.

Littérature

[1] *Fréchet* et *Romann,* Représentation de lois empiriques (Paris, Eyrolles).

[2] *Runge* und *König,* Numerisches Rechnen (Berlin, Springer).

[3] *A. Ansermet,* Beitrag zur Bestimmung von Kreisteilungsverbesserungen (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1954).