

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural
<b>Band:</b>	60 (1962)
<b>Heft:</b>	3
<b>Artikel:</b>	Die geodätischen Probleme der künstlichen Satelliten (Satellitengeodäsie)
<b>Autor:</b>	Ledersteger, K.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-217678">https://doi.org/10.5169/seals-217678</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungs-  
wesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein;  
Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Amélio-  
rations foncières; Société suisse des ingénieurs du  
Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 3 · LX. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. März 1962

## Die geodätischen Probleme der künstlichen Satelliten (Satellitengeodäsie)

Von K. Ledersteger, Wien

Die Lehre von den künstlichen Satelliten ist heute bereits eine derart umfassende Spezialwissenschaft geworden, daß es kaum einen Menschen gibt, der sie wirklich vollkommen beherrscht. Nach Jahrzehntelangen stillen und zähen Vorarbeiten, bei denen es galt, fast unüberwindlich erscheinende Schwierigkeiten zu meistern, und die namentlich während des letzten Weltkrieges wegen ihrer großen militärischen Bedeutung streng geheimgehalten wurden, hat plötzlich im Oktober 1957 der erste «Sputnik» der staunenden Menschheit den Beweis für die Möglichkeit der technischen Überwindung der Schwerkraft vor Augen geführt und damit den Blick in eine schier traumhafte Zukunft der Astronautik eröffnet, in welcher der Mensch allmählich das Sonnensystem erobern wird.

Noch stehen wir am Anfang dieser gigantischen Entwicklung. Der hochspezialisierte Raketentechniker hat im Verein mit dem Physiker und Chemiker und mit dem Himmelsmechaniker noch zahlreiche schwierige Probleme zu lösen, wobei die Kunde, welche die bisherigen künstlichen Satelliten in geisterhafter Automatik oder durch die Großtat tollkühner Pioniere von den höheren und höchsten Schichten der Atmosphäre zu uns bringen, von den Geophysikern in wissenschaftlicher Detailarbeit systematisch gedeutet werden muß, bevor die Ergebnisse nutzbringend die künftige Planung lenken können. Aber auch dem Geodäten eröffnet sich mit den künstlichen Satelliten ein weites Betätigungsgebiet, teils physikalischer, teils geometrischer Natur. Konnte er aus den bisherigen «atmosphärischen» Satelliten, und zwar aus der Drehung ihrer Bahnen und Apsidenlinien, bereits wertvolle Schlüsse auf das äußere Potentialfeld der Erde und seine wichtigsten Massefunktionen ziehen, welche namentlich in Verbindung mit einer neuen, gänzlich auf dem Außenraumpotential begründeten Theorie der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren die Probleme der Erdfigur und des physikalischen Aufbaus des Erdinnern mächtig befruchten, so werden die künftigen «geodätischen» Satelliten, welche

unbeeinflußt von atmosphärischen Störungen ihre Bahn ziehen werden, neben dem exakten Studium des Schwerefeldes auch das wichtigste Problem der geometrischen Geodäsie lösen, nämlich die Schaffung eines streng auf das Erdzentrum bezogenen Systems polarer Koordinaten der Oberflächenpunkte, womit gleichzeitig auch die schon alte Frage einer geodätischen Verbindung der Kontinente über die Ozeane hinweg einer befriedigenden Lösung zugeführt werden wird.

Aus diesen kurzen Andeutungen dürfte bereits hinreichend klar geworden sein, daß die Satellitengeodäsie zwar nur ein kleiner, keineswegs aber nebenschächer Ausschnitt aus der gesamten Satellitenwissenschaft ist. Neben den beiden gerade erwähnten geometrischen und physikalischen Fragenkomplexen könnte man zur Satellitengeodäsie noch die Theorie und Praxis der Beobachtungen zählen. Doch darf in dieser Hinsicht auf den entsprechenden Abschnitt der «Kosmischen Geodäsie» von Berroth und Hofmann sowie auf den Vortrag von Professor Sigl<sup>1</sup> verwiesen werden, so daß wir uns auf die prinzipiellen Möglichkeiten beschränken können. Die Berechnungen aber, die nötig sind, um einen künstlichen Satelliten auf die gewünschte Bahn zu bringen, sowie die Bahnbestimmung aus den Beobachtungen sind schwierige himmelsmechanische Aufgaben, die teils wegen der gänzlich anders gearteten Massenverhältnisse, teils wegen der großen Erdnähe vielfach neue Entwicklungen zur Störungstheorie erforderlich gemacht haben, die nur am Rande gestreift werden können. Hingegen dürfte es wünschenswert sein, wenigstens unter vereinfachenden Annahmen die Elemente der Bahnbewegung der künstlichen Satelliten darzustellen. In erster Linie handelt es sich um die Bahnkurven, die ein Satellit im Kraftfeld der Erde dank der ihm von der Trägerrakete erteilten Anfangsgeschwindigkeit beschreibt.

### a) Geschwindigkeit und Bahnform im Vakuum

Wir nehmen an, der Flugkörper hätte zu Beginn seiner freien Bewegung, also am Ende seines Antriebs durch eine Rakete, in einer bestimmten Höhe  $h$  über der Erde, die wir uns als homogene oder geschichtete Kugel vorstellen, eine Anfangsgeschwindigkeit  $v_P$  senkrecht zur Verbindungslinie mit dem Erdzentrum. Soll der künstliche Satellit, der die Masse  $m$  habe, eine Kreisbahn um die Erde beschreiben, so muß die hierzu erforderliche Zentripetalkraft gleich der Newtonschen Anziehungs- kraft sein. Ist  $E = 5976,3 \cdot 10^{24}$  g die Masse der Erde,  $R = 6371,2$  km ihr Radius,  $k^2 = 66,7 \cdot 10^{-9}$  die Gravitationskonstante,  $r = R + h$  der gewünschte Bahnradius, so folgt aus

$$\frac{v_0^2}{r} = \frac{k^2 E}{r^2} \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> R. Sigl, «Die Bedeutung künstlicher Erdsatelliten für die Geodäsie». Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1961, Seiten 275–287.

die «Kreisbahngeschwindigkeit»  $v_0$ , auch «erste kosmische Geschwindigkeit» genannt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k^2 E}{r}}, \quad (2)$$

für welche sich beispielsweise für  $h = 200, 500$  und  $1000$  km der Reihe nach  $7,79, 7,62$  und  $7,35$  km ergibt. Die Kreisbahngeschwindigkeit nimmt also mit wachsender Höhe langsam ab. Ist die Anfangsgeschwindigkeit  $v_P > v_0$ , so geht die Kreisbahn in eine Ellipse über, für welche nach den bekannten Keplerschen Gesetzen das Erdzentrum  $C$  den einen Brennpunkt darstellt. Gemäß unserer Voraussetzung, daß im Anfangspunkt  $P$  der freien Bewegung der Geschwindigkeitsvektor senkrecht zur Verbindungsline  $PC$  steht, wird diese zu einem Abschnitt der großen Achse  $a$  der Bahnellipse und  $P$  der erdnächste Punkt der Bahn, das sogenannte Perigäum. Im diametralen Punkt  $A$  der Bahn, dem erdfernensten Punkt oder dem Apogäum, ist der Radiusvektor  $AC = r' = R + h'$ , worin  $h'$  die größte Höhe des Satelliten über der Erdoberfläche bedeutet. Es folgt sofort  $r + r' = 2a$ . Allgemein findet man für die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt der Bahn mit dem Radiusvektor  $r''$ :

$$v = \sqrt{k^2 E \left( \frac{2}{r''} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (3)$$

also speziell im Perigäum:

$$v_P = \sqrt{k^2 E \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{k^2 E \frac{2r'}{r(r+r')}}.$$

Führt man sodann das Verhältnis  $(v_P : v_0) = x$  ein, so folgt:

$$r' = r \frac{x^2}{2 - x^2}. \quad (4)$$

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich leicht nachweisen, daß schon bei einer geringen Zunahme von  $x$  die Apogäumshöhe kräftig ansteigt. Es liege  $P$  in  $200$  km Höhe, und es seien die Anfangsgeschwindigkeiten  $v_P = 8,0$  und  $8,1$  km gegeben. Wegen  $v_0 = 7,7885$  km ist also in den beiden Fällen  $x = 1,0272$  beziehungsweise  $1,0400$ . Man findet  $r' = 7336,8$  und  $7738,8$  km, also die Höhen  $h' = 765,6$  und  $1167,6$  km.

Die Ellipse geht für  $x^2 = 2$  in eine Parabel über. Die zugehörige Anfangsgeschwindigkeit  $v_P = v_0 \sqrt{2} = 1,4142 v_0$  wird als «zweite kosmische Geschwindigkeit» oder als «Fluchtgeschwindigkeit» bezeichnet. Diese Geschwindigkeit, mit welcher der Satellit aus dem «Anziehungsbereich» der Erde entflieht, ist wie die Kreisbahngeschwindigkeit eine Funktion der Perigäumshöhe. Für die drei obigen Werte von  $h$  erhalten wir der Reihe nach die Fluchtgeschwindigkeiten  $v_F = 11,01, 10,77$  und  $10,40$  km.

Je mehr sich die Anfangsgeschwindigkeit  $v_P$  der Fluchtgeschwindigkeit nähert, um so rascher nimmt die Apogäumshöhe und damit die Exzentrizität der Bahnkurve zu. Es ist dann bequemer, anstelle von  $x$  die neue Verhältniszahl  $y = (v_P : v_F)$  einzuführen, wodurch (4) übergeht in:

$$r' = r \frac{y^2}{1 - y^2}. \quad (4a)$$

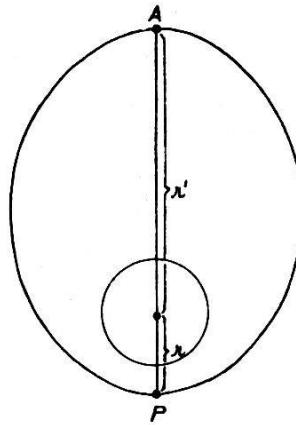


Fig. 1

Für die Kreisbahn ist  $y = 0,7071$ , für die Parabel  $y = 1$ . Dabei liegt bei einer Perigäumshöhe von 200 km das Apogäum für  $y = 0,9$  bereits 21 643 km über der Erdoberfläche, für  $y = 0,99$  sogar schon 317269 km!

Wird  $y > 1$ , so wird  $r'$  negativ und die Bahn hyperbolisch. Man findet leicht

$$r' - r = \frac{r}{y^2 - 1} \quad (5)$$

und in weiterer Folge für die Halbachse  $a$  oder für den Abstand des Hyperbelmittelpunktes vom Erdzentrum  $C$ :

$$a = \frac{r' + r}{2} = \frac{r}{2} \frac{2y^2 - 1}{y^2 - 1}. \quad (6)$$

Ist noch  $e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2}$  die numerische Exzentrizität, so ergibt sich für den Winkel  $\vartheta$ , welchen die Asymptoten mit der Achse einschließen,  $\cos \vartheta = 1/e$ .

Selbstverständlich wird bei der Errichtung eines künstlichen Satelliten die gewünschte Anfangsgeschwindigkeit und damit die gewünschte Exzentrizität der Bahnellipse nur näherungsweise erreicht. Man kann dann die wirklich erzielte Geschwindigkeit bei bekannter Perigäumshöhe leicht auf Grund des dritten Keplergesetzes

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{k^2}{4 \pi^2} (E + m) = \frac{k^2}{4 \pi^2} E \quad (7)$$

aus der beobachteten Umlaufszeit berechnen. Wegen (4) und (7) ist

$$a = \frac{2r}{2-x^2} = \left( \frac{k^2 E}{4\pi^2} \right)^{1/3} U^{2/3} = \kappa U^{2/3}, \quad (8)$$

wobei sich für die Konstante im CGS-System der Wert  $2,16139 \cdot 10^6$  ergibt. Will man die Perigäumsdistanz in km einführen, so hat man  $\kappa = 21,6139$  zu setzen, wenn die Umlaufszeit in Sekunden ausgedrückt wird. Die Kreisbahn in 200 km Höhe wird zum Beispiel in  $5301^s = 88^m 21^s$  durchsetzt.

Formel (3) liefert die Geschwindigkeit in jedem beliebigen Punkt der elliptischen Bahn des künstlichen Satelliten und speziell im Perigäum und Apogäum die Extremwerte, die sich bei Verbindung mit (4) und (2) schreiben lassen:

$$v_P = xv_0; \quad v_A = \frac{r}{r'} xv_0; \quad r' v_A = rv_P. \quad (9)$$

Die letzte Formel folgt übrigens auch unmittelbar aus dem Flächensatz oder dem zweiten Keplergesetz. Im obigen Beispiel:  $v_P = 8,0$  km,  $r = 6571,2$  km,  $r' = 7336,8$  km, ist die Minimalgeschwindigkeit  $v_A = 7,165$  km.

Hat aber der Flugkörper im Startpunkt  $P$  gerade die Fluchtgeschwindigkeit  $v_P = v_F$ , so entweicht er auf einem Parabelast, wobei die Geschwindigkeit in jedem beliebigen Punkt der Bahn wegen  $a = \infty$  durch

$$v = v_F = \sqrt{k^2 E \frac{2}{r''}} = \left( 892,882 \sqrt{\frac{1}{r'' \text{ km}}} \right) \text{ km} \quad (10)$$

gegeben ist. Diese Geschwindigkeit nähert sich mit wachsendem  $r$  dem Grenzwert Null. In einer Entfernung von  $1 \cdot 10^6$  km ist sie zum Beispiel bereits auf 0,89 km gesunken. Ist aber die Anfangsgeschwindigkeit größer als die Fluchtgeschwindigkeit, so wird für das Entweichen aus dem Anziehungsbereich der Erde dieselbe Energie verbraucht, und es bleibt eine gewisse «Restgeschwindigkeit», die man aus der restlichen kinetischen Energie berechnen kann. Diese beträgt  $\frac{m}{2} (v_P^2 - v_F^2)$  und daher die Restgeschwindigkeit:

$$v_R = \sqrt{v_P^2 - v_F^2}. \quad (11)$$

Ist zum Beispiel im Startpunkt  $v_P = 12$  km,  $v_F = 11$  km, so resultiert die Restgeschwindigkeit  $v_R = 4,796$  km. Schon ein kleiner Überschuss ( $v_P - v_F$ ) erzeugt eine merkliche Restgeschwindigkeit. Mit  $v_F = 11$  km,  $v_P = 11,05$  km finden wir bereits  $v_R = 1,05$  km.

Der Begriff des Anziehungsbereiches der Erde hat natürlich nur Sinn im Verhältnis zur Anziehung durch einen anderen Himmelskörper und hängt überdies von der Geschwindigkeit ab. Für einen erdnahen Satelliten etwa kann die Anziehungskraft des Mondes gegenüber der Anziehung durch die Erde vernachlässigt werden. Entfernen wir den Satelliten

in der Verbindungsgeraden Erde-Mond, so wird schließlich ein Punkt erreicht, in welchem beide Anziehungs Kräfte entgegengesetzt gleich sind. Ist die Entfernung Erde-Mond 384 400 km und die Mondmasse  $\frac{1}{81}$  der Erdbahnmasse (genauer  $E = 81 \cdot 28 M$ ), so gilt:

$$\frac{k^2 E}{r_1^2} = \frac{k^2 M}{r_2^2}; r_1 = 9 r_2 = 345 960 \text{ km.} \quad (12)$$

Dieser Punkt ist aber mechanisch nur als Grenzfall interessant, weil die Bewegung vernachlässigt wurde. Hingegen können wir folgenden Spezialfall des Dreikörperproblems konstruieren: Der Mond und der künstliche Satellit sollen sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit in Kreisbahnen um die Erde bewegen, so daß die drei Körper stets im gleichen Abstand in einer Geraden liegen. In einem mitrotierenden Koordinatensystem haben wir dann aber die Fliehkräfte zu berücksichtigen; das heißt, die am Satelliten angreifende Erdanziehung muß der Summe aus Mondanziehung und Fliehkräft das Gleichgewicht halten. Der Satellit bewegt sich in seiner Kreisbahn mit einer Geschwindigkeit  $v$ , die kleiner ist als die Kreisbahngeschwindigkeit  $v_0$  des Zweikörperproblems, und es gilt:

$$\frac{k^2 E}{r_1^2} = \frac{v^2}{r_1} + \frac{k^2 M}{r_2^2} = k^2 (E + M) \frac{r_1}{(r_1 + r_2)^3} + \frac{k^2 M}{r_2^2}. \quad (13)$$

Dabei ist  $v$ , auf die Kreisbahngeschwindigkeit des Mondes  $v_0$  zurückgeführt:

$$v : v_0 = r_1 : (r_1 + r_2); \quad v_0^2 = \frac{k^2 (E + M)}{r_1 + r_2}. \quad (13a)$$

Auf diese Weise findet man für den Radius der Satellitenbahn genähert  $r_1 = 326 000$  km. Der Satellit würde im Abstand von 58 400 km dauernd vor dem Monde stehen und sich auf die Mondscheibe projizieren.

Nimmt man für die elliptische Bahn der Erde um die Sonne genähert eine Kreisbahn mit dem Radius  $a = 149,5 \cdot 10^6$  km an, so ist die zugehörige Kreisbahngeschwindigkeit bekanntlich 29,77 km. Hat ein Flugkörper den Anziehungsbereich der Erde verlassen und ist von der Sonne «eingefangen» worden, so ist er ein künstlicher Planet geworden, dessen Anfangsgeschwindigkeit sich vektoriell aus der mitgenommenen Erdgeschwindigkeit von 29,77 km und der Restgeschwindigkeit zusammensetzt. Im Abstand  $a'$  von der Sonne ist seine Kreisbahngeschwindigkeit:

$$V_0 = \sqrt{\frac{k^2 S}{a'}} = 29,77 \sqrt{\frac{a}{a'}}, \quad (14)$$

und man kann ähnlich weiter schließen wie bei den künstlichen Satelliten. Man kann es erreichen, daß die Richtung der Asymptote des Hyperbelastes, auf dem der Flugkörper aus dem Anziehungsbereich der Erde entweicht, mit der Richtung der augenblicklichen Erdbewegung zusammenfällt oder dieser entgegengesetzt ist. Im ersteren Falle wird die Rest-

geschwindigkeit zur Erdgeschwindigkeit addiert, der Start im Sonnensystem erfolgt mit einem  $x$ -Wert größer als 1, was besagt, daß der «Startpunkt» das Perihel der Bahn des künstlichen Satelliten wird, der, wenn die geeignete Restgeschwindigkeit erzeugt wurde, in seinem Aphel die Marsbahn erreichen kann. Im zweiten Falle wird die Restgeschwindigkeit von der Erdgeschwindigkeit subtrahiert; der Startpunkt wird das Aphel der Planetenbahn, welche dann eventuell die Venus- oder die Merkurbahn schneiden kann.

Die Bahn eines künstlichen Planeten ist nur so lange elliptisch, als die Anfangsgeschwindigkeit unter der Fluchtgeschwindigkeit bezüglich der Sonne liegt, welche in der Erdentfernung  $29,77\sqrt{2} = 42,1$  km beträgt. Um diese «dritte kosmische Geschwindigkeit» zu erreichen, ist bei Abschuß in Richtung Erdbewegung eine Restgeschwindigkeit von 12,33 km erforderlich.

### *b) Der Mond als ballistisches Ziel*

Die Probleme der interplanetaren Ballistik erfordern eine unheimliche Genauigkeit, weil jeder kleine Fehler in der Anfangsgeschwindigkeit am Ende des Raketenantriebes in der meist üblichen Höhe von etwa 230 km stark vergrößert in die Restgeschwindigkeit beim Start im Sonnensystem eingeht. Auch die Eroberung des Mondes ist in erster Linie eine Frage der Genauigkeit. Die ersten russischen und amerikanischen Satelliten wurden durch einen direkten Abschuß mit Mehrstufenraketen, die sich fortschreitend neigten, in ihre Bahn gebracht, wobei die gewünschte Startgeschwindigkeit höchstens mit der Genauigkeit von 1% erreicht wurde. Daher war es auch sehr schwierig, die Kreisbahngeschwindigkeit zu erreichen. Bei Lunik I wurde erstmalig das Zweistufenprinzip angewendet. In der ersten Stufe wurde mit etwa  $v_P = 10$  km ein Satellit mit langgestreckter Bahn ins Leben gerufen, dessen exakte Perigäumsgeschwindigkeit aus Beobachtungen der Umlaufszeit berechnet wurde. So dann wurde die oberste Raketenstufe nochmals in Tätigkeit gesetzt, um die erforderliche Differenzgeschwindigkeit zu erzeugen. Auf diese Weise konnte die gewünschte Geschwindigkeit bis auf 0,1% erreicht werden, so daß Lunik I im Jänner 1959 in nur 6500 km Entfernung am Mond vorbeiflog und zum ersten künstlichen Planeten («Mechta», der «Traumplanet») wurde. Bei Lunik II, der im September 1959 mit einer Geschwindigkeit von 3,3 km auf dem Mond aufschlug, trat noch zusätzlich die automatische Lenkung hinzu, wodurch eine weitere Dezimale gewonnen wurde. Diese räumliche Lenkung beruht auf dem Prinzip des Rückstoßmotors. Der stabilisierte Flugkörper muß mit schwenkbaren Düsen ausgestattet sein und Befehle ausführen können, wobei zu beachten ist, daß natürlich nur geringe Geschwindigkeitskorrekturen erfolgen können. Ein besonders schwieriges Problem besteht darin, mittels einer gelenkten Bremsrakete gewisse Instrumente auf den Mond bringen zu können.

Ganz anders geartet war das Experiment vom Oktober 1959 mit Lunik III. Für diesen Flugkörper lag die Anfangsgeschwindigkeit bei einer Starthöhe von 236 km etwas unter der Fluchtgeschwindigkeit

( $y = 0,993$ ), was ein Apogäum  $r' \sim 470000$  km zur Folge hatte. So konnte Lunik III, dessen Bahnebene mit der Bahnebene des Mondes einen Winkel von  $80^\circ$  einschloß, die Rückseite des Mondes photographieren. Selbstverständlich erfuhr die Bahnellipse durch das Gravitationsfeld des Mondes beträchtliche Änderungen, liegt doch ein Fall des Dreikörperproblems vor. Bemerkenswert ist noch, daß infolge des raschen Anwach-sens von  $r'$  bei Annäherung an die Fluchtgeschwindigkeit ein geringer Fehler in der Perigäumsgeschwindigkeit  $v_P$  gewaltige Änderungen in der Ellipsenachse zur Folge hat. So bewirkt ein Fehler  $\delta v_P = 20$  m/sec bei  $y = 0,95$  eine Änderung der Achse um 15000 km, bei  $y = 0,995$  sogar eine Achsenänderung von  $1,5 \cdot 10^6$  km! Überdies hat ein Fehler  $\delta y = 0,001$  bei  $y = 0,994$  ein Streugebiet zur Folge, dessen Querschnitt mit zunehmender Distanz natürlich wächst und zum Beispiel in der Erdnähe und Erdferne des Mondes einen Durchmesser von 9000 beziehungsweise 13000 km aufweist. Es spielt also auch die Zeit des Abschusses in Anbe-tracht der wechselnden gegenseitigen Entfernung und Geschwindigkeiten von Erde und Mond eine wichtige Rolle.

Kurz sei auch noch die Frage der Errichtung eines Mondsatelliten gestreift, womit abermals ein Spezialfall des Dreikörperproblems vor-liegt. Um die überaus komplizierten Verhältnisse in großen Zügen ver-ständlich zu machen, bezeichnen wir als Anziehungsbereich des Mondes jenes Gebiet, in welchem die Anziehung des Mondes die der Erde über-wiegt. An der Grenze dieses Gebietes, etwa 40000 km vom Mondzentrum ent-fernt, ist die auf den Mond bezogene Fluchtgeschwindigkeit rund 0,5 km, während sie an der Mondoberfläche ( $r = 1738$  km) 2,4 km beträgt. Steht die Bewegungsrichtung des Flugkörpers senkrecht zur Mondbahn

und besitzt er die auf die Erde bezogene Fluchtgeschwindigkeit, welche in der Monddistanz etwa 1,4 km beträgt, so wird seine Bahn gegebenenfalls im Gravitationsfeld des Mondes hyperbolisch ab-bogen, und er wird den Anziehungsbereich des Mondes wieder verlassen. Dabei wird seine Energie bei der Annäherung an den Mond durch den Fall im Mondscherfeld natürlich gesteigert. Ange-nommen, der Flugkörper würde am Monde in einer Distanz von 1000 km vorbeiziehen, also in einer Entfernung  $r = 2738$  km vom Mondzentrum. Dort beträgt die Kreisbahngeschwindigkeit 1,34 km und die Fluchtgeschwindigkeit 1,89 km. Gelingt es dann, an dieser Stelle die Geschwindigkeit des Flugkörpers unter die Kreisbahngeschwindigkeit abzubremsen, so wird dieser Punkt zum mondfernsten Punkt einer elliptischen Bahn, welchen wir als «Apolunum» be-zeichnen dürfen, und das «Perilunum», der mond-nächste Punkt, wird sich entsprechend näher der Mondoberfläche befinden, was für die gewünschten Aufschlüsse sehr vorteilhaft sein kann (Figur 2).

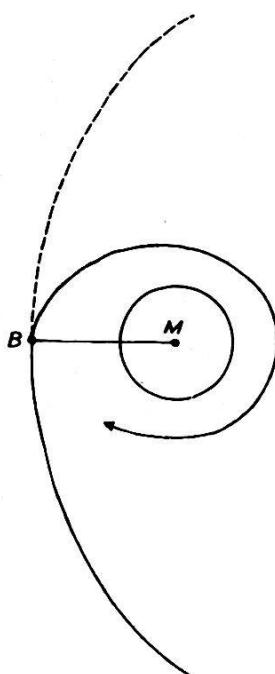


Fig. 2

### c) Atmosphärische und geodätische Satelliten

Nach dieser Abschweifung von unserem eigentlichen Thema, welches in ganz großen Zügen bloß ein etwas klareres Bild von der Ballistik der Flugkörper vermitteln soll, kehren wir zu den künstlichen Satelliten zurück. Grundsätzlich unterscheidet man atmosphärische und geodätische Satelliten. Erstere dienen vorzüglich der Erforschung der Atmosphäre und werden meist in einer Höhe von etwa 220 bis 240 km gestartet. Haben sie eine genügende Bahnexzentrizität ( $x > 1,03$ ), so werden sie vorwiegend in der Nähe ihres Perigäums von der Atmosphäre abgebremst. Diese Atmosphärenbremsung vermindert von Umlauf zu Umlauf allmählich die Geschwindigkeit im Perigäum und in weiterer Folge die Apogäumshöhe. Die so bedingte Verkürzung der Bahnachse vermindert nach dem dritten Keplergesetz dauernd die Umlaufszeit, aus deren Beobachtung man somit wichtige Schlüsse auf die Dichte der Atmosphäre ziehen kann. So erwies sich die Dichte der Atmosphäre in der genannten Perigäumshöhe rund 7- bis 8mal größer, als man bisher angenommen hatte. Die Verkürzung der Umlaufszeit erklärt auch das scheinbare Paradoxon, daß die stärker abgebremste Trägerrakete des Sputnik I diesem vorausseilte und ihre Lebensdauer beträchtlich kürzer war. Ist  $v_P$  unter die Kreisbahngeschwindigkeit gesunken, so steht das Ende des Satelliten knapp bevor. Ein Start unter 200 km Höhe wäre unökonomisch, weil die Lebensdauer des Satelliten zu kurz wäre; er würde in den tieferen Schichten der Atmosphäre verglühen, noch bevor er die gewünschten Aufklärungen gegeben hätte. Wenn auch die atmosphärischen Satelliten vorwiegend geophysikalischen Aufgaben zu dienen haben, so sind sie dennoch auch für die Geodäsie von unschätzbarem Wert. Denn ihre beobachteten Bahnen unterscheiden sich sehr wesentlich von den einfachen Keplerellipsen, was auf die Abplattung des Erdkörpers und seine verschiedenen Massefunktionen zurückzuführen ist, die nun mit wesentlich höherer Genauigkeit als aus den Unregelmäßigkeiten der Bewegung des natürlichen Mondes berechnet werden können. Die geodätische Ausbeute der atmosphärischen Satelliten ist also rein physikalischer Natur. Das weitaus wichtigste Ergebnis ist die Massefunktion 2.0., die sogenannte statische Abplattung.

Demgegenüber haben die künftigen geodätischen Satelliten dem exakten Studium des Schwerefeldes der Erde wie auch der Lösung der geometrischen Aufgaben der Geodäsie zu dienen, in erster Linie der schon eingangs erwähnten Schaffung eines einheitlichen Systems polarer Koordinaten der Punkte der Erdoberfläche, aus dem sich die Gestalt und Größe des Geoids ableiten läßt. Soweit aus der Literatur bekannt ist, plant die «National Aeronautical and Space Administration» (NASA) in naher Zukunft den Start des ersten geodätischen Satelliten. Um den störenden Einfluß der Atmosphäre möglichst herabzudrücken, ist eine Mindesthöhe von etwa 500 km erforderlich. Erwünscht wäre aber eine Höhe von einigen 1000 km, da ja mit der Höhe die mögliche Beobachtungszeit an einem bestimmten Orte und der Abstand von zwei Stationen für Simultanbeobachtungen ansteigt. Doch erfordert es eine wesentlich größere

Energie, einen Satelliten in solcher Höhe auf seine Bahn zu setzen. Auch nehmen mit wachsender Höhe die Massefunktionen in der Potentialentwicklung ab, was das Studium der Feinstruktur des Schwerefeldes beeinträchtigt.

Die Bahn des Satelliten soll nahezu kreisförmig sein. Denn die Kreisform der Bahn verhindert den Durchzug durch atmosphärische Schichten verschiedener Dichte, reduziert gewisse von der Exzentrizität abhängige Störungen und erleichtert die Bahnberechnung. Die Bahnneigung kann demgegenüber beliebig sein, je nach dem verfolgten Zweck und der geographischen Zone, in welcher eine günstige Beobachtungsmöglichkeit erwünscht ist. Während die atmosphärischen Satelliten vorwiegend feine Meßinstrumente in die höheren Schichten der Atmosphäre zu bringen haben und ihre Bahnbestimmung hauptsächlich einer genähernten Verfolgung des Flugweges dient, erfordert die physikalische und geometrische Ausbeute der geodätischen Satelliten eine größtmögliche Genauigkeit in der Bahnbestimmung, also ein hohes Maß von Präzision in der Positions- und Zeitbeobachtung. Man beachte, daß bei einer Geschwindigkeit von 7,6 km/sec, der Kreisbahngeschwindigkeit in  $h = 500$  km, einem Fehler von 0,001 sec ein linearer Fehler von 7,6 m oder ein Winkelfehler von 3" entspricht.

Damit der atmosphärische Widerstand stets derselbe ist, muß der Satellit möglichst kugelsymmetrisch sein. Zur Verminderung des Widerstandes soll ferner das Verhältnis Masse zu Querschnitt möglichst groß sein. Auch sollen die Instrumente im Innern symmetrisch verteilt sein, um einen Librationseffekt möglichst auszuschalten. Der Satellit soll möglichst hell sein, entsprechend einem Stern 5. Größe, und zwar selbstleuchtend, um die ganze Nacht hindurch photographische Registrierung zu gestatten. Die Lichtblitze werden bei kurzer Dauer die Simultanbeobachtung auf weit voneinander entfernten Stationen erleichtern. Ein eigener Satellitensender ermöglicht Radioortungen und Distanzmessungen nach dem Hiran-Prinzip. Schließlich dienen eigene Zeitsignale zur Erhöhung der Genauigkeit der gleichzeitigen Beobachtung auf den beweglichen Feldstationen, die dann selbst keine besonders genauen Uhren benötigen.

#### *d) Grundsätzliches zur Satellitenbeobachtung*

Für geodätische Zwecke ist das Stationsnetz sorgfältig auszuwählen. Das Stationsnetz richtet sich nach den vorhandenen Triangulierungen, da ja eine der Hauptaufgaben der künstlichen Satelliten die geodätische Verbindung großer Triangulationssysteme mit eigenen Ausgangsdaten ist. Selbstverständlich ist höchste Genauigkeit anzustreben, wie sie nur optische Methoden liefern. Die elektronischen Methoden treten demnach bei den geodätischen Satelliten in den Hintergrund, eignen sich aber anfangs zur genähernten Bestimmung der Bahnelemente recht gut.

Für die optische Beobachtung auf festen Stationen eignet sich am besten die Baker-Nunn-Kamera mit einem 80-cm-Kugelspiegel in Verbindung mit einer Quarzuhr. Mit ihr kann ein Satellit, der wie ein Stern

6. Größe erscheint und sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $1^\circ$  pro Sekunde bewegt, in der Dämmerung bequem gegen den Sternenhimmel photographiert werden. Für bewegliche Stationen werden Kinotheodolite und ballistische Kameras verschiedener Bauart verwendet. Der Kinotheodolit wird von zwei Beobachtern bedient, von denen der eine den Satelliten in Azimut, der andere in Höhe verfolgt. Die Kreislesungen werden periodisch photographiert und zur Kontrolle gleichzeitig auch der Satellit. Die ballistischen Kameras werden paarweise benutzt. Beide liefern zeitlich koordinierte Bilder des Satelliten gegen den Sternenhintergrund, deren Ausmessung es gestattet, aus den bekannten Sternpositionen gleichzeitige Wertepaare für Azimut und Höhe abzuleiten und die Position des Satelliten aus der Basis trigonometrisch zu bestimmen. Die optischen Methoden erfordern natürlich einen klaren Himmel.

Von den elektronischen Verfahren sei zuerst die Messung der Radialgeschwindigkeit des Satelliten relativ zur Beobachtungsstation auf Grund des bekannten Dopplereffekts genannt. Sendet der Satellit eine unmodulierte Welle bestimmter Frequenz aus, so kann aus der empfangenen Frequenz die Annäherung und Entfernung des Satelliten beobachtet werden, namentlich der Zeitpunkt der größten Nähe, woraus die zugehörige Distanz und relative Geschwindigkeit des Satelliten abgeleitet werden können. Schließlich kann noch die Umlaufszeit des Satelliten bestimmt werden, wenn die Zwischenzeit zwischen aufeinanderfolgenden Minimaldistanzen wegen der durch die Erdrotation bedingten relativen Lageänderung der Beobachtungsstation korrigiert wird.

Richtungsmessungen zum Satelliten ermöglicht das Interferometerprinzip, so daß sich beide Methoden ergänzen. Zwei etwa 50 bis 100 m voneinander entfernte Antennen empfangen die vom Satelliten kommenden Signale. Wegen des geringen Antennenabstandes können die beiden ankommenden Wellenzüge als parallel angesehen und zur Interferenz gebracht werden; sie werden ausgelöscht, wenn der Wegunterschied ein ungerades Vielfaches der ausgestrahlten Wellenlänge ist, woraus der Neigungswinkel zwischen der Richtung nach dem Satelliten und der Verbindungsline der beiden Antennen resultiert. Die Vieldeutigkeit der Lösung muß durch ein zweites Antennenpaar mit wesentlich geringerem Abstand aufgehoben werden. Beim «Minitrack»-System, das im Rahmen des Projektes Vanguard für das Internationale Geophysikalische Jahr eingerichtet wurde, besaß jede Station 8 Antennen. Alle Stationen waren mit dem zentralen Empfänger Vanguard in Washington verbunden, und eine elektronische Rechenanlage (IBM) stellte die Position des Satelliten von Minute zu Minute fest. Zwar ist die Genauigkeit dieses Verfahrens nur 3 bis 4 Bogenminuten, jedoch konnten die Bahnelemente bei jedem Umlauf korrigiert werden. In einem solchen System ist natürlich die Kombination der Interferometermessungen mit Dopplermessungen zur Bahnbestimmung nicht erforderlich.

Wird schließlich der Satellit als Reflektor für ein großes Radioteleskop verwendet, so ist man von der instrumentellen Ausrüstung des Satelliten unabhängig. Dagegen müssen die Satellitenbahnen schon ziem-

lich gut bekannt sein, um das Teleskop richtig einstellen zu können. Da überdies die reflektierende Fläche des Satelliten sehr klein ist, sind starke Überlagerungen durch anderwärtige Echos unvermeidlich. Grundsätzlich würde die Radarmethode jedoch die Richtung, also Azimut und Höhe, sowie die Distanz liefern. Für diese Methode eignen sich am besten die amerikanischen Ballonsatelliten (Echo).

*e) Die Grundlagen der Bahnbestimmung und die Bahnstörungen*

Die geodätische Verwertung der künstlichen Satelliten beruht in geometrischer Hinsicht auf dem parallaktischen Effekt, wie dies ähnlich bei den geodätischen Methoden der Mondparallaxe der Fall ist, in physikalischer Hinsicht jedoch auf der Bestimmung der Massefunktionen, welche in der Kugelfunktionsentwicklung des Attraktionspotentials auftreten. Da nun die Massefunktionen ebenso wie der parallaktische Effekt mit zunehmender Höhe rasch abnehmen, wären an sich für eine geodätische Ausbeute erdnahen Satelliten vorzuziehen. Dem steht jedoch in erster Linie der Luftwiderstand entgegen, der nicht nur theoretisch schwer erfaßbar ist, sondern auch wesentlich die Lebensdauer der künstlichen Satelliten beeinflußt. Während der erste Sputnik mit einer Perigäumshöhe von 230 km bereits nach drei Monaten verglühte, erwartet man bei Vanguard I bei einer Perigäumshöhe von 650 km eine Lebensdauer von etwa 100 Jahren.

Beschränken wir das Attraktionspotential der Erde auf die zonalen Kugelfunktionen:

$$U = \frac{k^2 E}{r} \left[ 1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i \left( \frac{R}{r} \right)^i P_i (\cos \vartheta) \right], \quad (15)$$

setzen also Rotationssymmetrie voraus, so resultiert die in den beiden ersten Abschnitten betrachtete Keplerbewegung, wenn alle höheren Massefunktionen  $J_i$  verschwinden. Somit bewirken diese Massefunktionen, in erster Linie die Abplattung des Erdkörpers, aber auch die Massenunregelmäßigkeiten der Erdkruste, die Störungen der rein elliptischen Bewegung. Hinzu tritt, daß das Gravitationsfeld der Erde unter dem Einfluß von Sonne und Mond zeitlich variabel ist. Hingegen kann bei den erdnahen Satelliten die Störung durch die Planeten vernachlässigt werden. Auch von den Gezeiten der Meere und festen Erde, vom Strahlungsdruck, vom Einfluß auftreffender Staub- und Meteorpartikel und von gewissen elektrodynamischen Wechselwirkungen darf abstrahiert werden.

(Fortsetzung folgt.)