Eine neue Darstellung des schweizerischen Projektionssystems

Autor(en): **Odermatt, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **59 (1961)**

Heft 10

PDF erstellt am: **01.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-216917

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Eine neue Darstellung des schweizerischen Projektionssystems

Von Dr. math. H. Odermatt, Zürich

Als Heft Nr. 8 der von Prof. Dr. Kobold herausgegebenen Mitteilungen aus dem Geodätischen Institut der Eidgenössischen Technischen Hochschule erschienen im Jahre 1960 die Tafeln zum Projektionssystem der schweizerischen Landesvermessung[1].

Die den neuen Tabellen zugrunde liegenden Formeln sollen in einer späteren Publikation eingehend dargestellt werden. Doch scheint es uns nützlich, schon jetzt, an dieser Stelle, den von uns beschrittenen Weg zu zeigen.

Auf Vorschlag von Prof. M. Rosenmund wurde 1905 für die schweizerische Landesvermessung die winkeltreue, schiefe Zylinderprojektion eingeführt, eine sogenannte Doppelprojektion. Das Gebiet der Karte wird in einem ersten Schritt konform vom Ellipsoid auf die Gaußsche Kugel und sodann in einem zweiten Schritt von der Kugel konform auf den geraden Kreiszylinder abgebildet, dessen Berührungskreis durch den Kartenmittelpunkt Bern geht und auf dessen Meridian senkrecht steht.

In der neuen Darstellung wird, nach dem Vorschlag von Dr. math. Helfenstein, das Projektionssystem in einen nichtanalytischen (1) und einen analytischen (2) Teil wie folgt zerlegt:

1. Projektion I, Umkehrung Projektion II

Konforme Abbildung der Ellipsoidfläche auf den geraden Kreiszylinder, der das Ellipsoid im Äquator berührt. Es ist dies nichts anderes als die bekannte Mercatorprojektion des Ellipsoides auf die Ebene. Diese Ebene wird als W-Ebene oder auch als Mercatorebene bezeichnet.

2. Projektion III, Umkehrung Projektion IV

Konforme Abbildung der W-Ebene auf die Ebene der Landeskoordinaten, Z-Ebene.

1. Der nichtanalytische Teil

Projektion I

Die konforme Abbildung des Ellipsoides auf die W-Ebene erfolgt im Prinzip nach den Formeln von *Rosenmund*[2].

---

[1] *H. Odermatt*, «Tafeln zum Projektionssystem der schweizerischen Landesvermessung». Mitteilung Nr. 8 aus dem Geodätischen Institut der ETH (1960). Verlag Leemann AG, Zürich.

[2] *M. Rosenmund*, Adjunkt des Direktors der Landestopographie: «Die Änderung des Projektionssystems der schweizerischen Landesvermessung», S. 66, Gleichungen (4) und (5). Verlag der Eidgenössischen Landestopographie, Bern 1903.

Es werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

L geodätische Länge } eines beliebigen Punktes
B geodätische Breite } auf der Ellipsoidfläche
P und Q, die rechtwinkligen Koordinaten des entsprechenden Punktes in der W-Ebene

L_0 geodätische Länge } des Kartennullpunktes M_0
B_0 geodätische Breite } auf dem Ellipsoid
P_0 und Q_0, Koordinaten des Kartennullpunktes M_0' in der W-Ebene

Die Längen L werden von M_0 aus gezählt, und zwar positiv nach Osten. Es ist also

$$L_0 = 0. \tag{1}$$

Da hier die metrischen Beziehungen nicht berücksichtigt werden, sind die Größen L und B in absolutem Winkelmaß (arcus) einzuführen.

Die Formeln zur Berechnung von P und Q lauten:

$$P = L \qquad -\pi < L \leq +\pi \tag{2}$$

$$\begin{aligned} Q &= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \\ &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \sin B - e\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, e \sin B, \qquad -\frac{\pi}{2} < B < +\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) vermitteln innerhalb der gegebenen Grenzen eine eindeutige, umkehrbare und konforme Abbildung des Ellipsoides auf die W-Ebene. Die Pole gehen in die unendlich ferne Gerade der Ebene über. Das System der Koordinatenachsen P und Q ist gleich orientiert wie das System der Breitenkreise und Meridiane.

2. Der analytische Teil

Projektion III, Umkehrung Projektion IV

Die Größen P und Q kann man sowohl als isometrische Parameter auf dem Ellipsoid als auch als rechtwinklige Koordinaten in der W-Ebene interpretieren. Faßt man sie zur komplexen Zahl

$$W = Q + iP$$

zusammen, so läßt sich die konforme Abbildung der W-Ebene auf die Z-Ebene ($Z = X + iY$) durch die analytische Funktion $Z = Z(W)$ darstellen.

Um zur Funktion $Z(W)$ zu gelangen, zerlegt man die Abbildung «W-Ebene $\rightarrow$ Z-Ebene» in eine Folge von konformen Abbildungen, die sich durch elementare analytische Funktionen darstellen lassen und schließlich in eine einzige Formel zusammengefaßt werden können.

2.1. *Konforme Abbildung der Mercatorebene des Ellipsoides auf die Mercatorebene der Gaußschen Kugel*

Die konforme Projektion des Ellipsoides auf die Gaußsche Kugel wird in der neuen Darstellung nicht mehr berechnet, doch braucht man sie zur Ableitung der Projektionen III und IV, sowie zur Bestimmung der metrischen Beziehungen der Doppelprojektion.

Die Gaußsche Kugel denkt man sich in analoger Weise wie das Ellipsoid auf ihre Mercatorebene (w-Ebene) abgebildet. Ein beliebiger Punkt auf der Kugel sei durch seine sphärischen Koordinaten, Länge l und Breite b, gegeben. Die Formeln zur Berechnung der entsprechenden Mercatorkoordinaten p und q ergeben sich ohne weiteres, indem man in den Gleichungen (2) und (3) $e = 0$ setzt. Sie lauten:

$$p = l \qquad -\pi < l \leq \pi \tag{4}$$

$$q = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right) \qquad -\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

p und q faßt man zur komplexen Koordinate

$$w = q + ip$$

zusammen. Die rechtwinkligen Koordinatennetze $W\,(P, Q)$ und $w\,(p, q)$ der beiden Mercatorebenen sind gleich orientiert und unterscheiden sich nur durch ihren Maßstab. Sie können also durch eine einfache Streckung ineinander übergeführt werden. Diese wird durch die analytische Funktion:

$$w = q + ip = \alpha\,(Q + iP) = \alpha W \tag{6}$$

dargestellt.

α ist eine reelle Zahl und mit dem Faktor α der Rosenmundschen Formel (5) identisch.

Durch Trennung von (6) in Real- und Imaginärteil ergeben sich die Transformationsgleichungen der Koordinaten:

$$q = \alpha Q \quad (7) \qquad \text{und} \qquad p = \alpha P \quad (8)$$

2.2. *Konforme Abbildung der w-Ebene auf den geraden Kreiszylinder, dessen Berührungskreis mit der Gaußschen Kugel durch das Kartenzentrum M_K geht und auf dessen Meridian senkrecht steht*

In der Figur (Seite 354) ist die Gaußsche Kugel dargestellt, und da wir einstweilen von den metrischen Verhältnissen absehen, geben wir ihr den Radius 1. Die Äquatorebene wählen wir als komplexe Zahlenebene ζ. Das Zentrum der Kugel lassen wir mit dem Nullpunkt der komplexen Koordinaten $\zeta = \xi + i\eta$ zusammenfallen. Die Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit der Kugel haben die komplexen Koordinaten:

$$C_1 = +1{,}0; \quad C_2 = 0, +i; \quad C_3 = -1{,}0; \quad C_4 = 0, -i$$

Die sphärischen Koordinaten des Kartennullpunktes M_K seien:

$$\text{Länge } l_K = 0 \text{ und Breite } b_K = b_0$$

Wir denken uns die Kugel um den Durchmesser $C_2\ C_4$ gedreht, bis M_K mit C_1 zusammenfällt, und sodann konform auf die Mercatorebene abgebildet; diese ist identisch mit der Ebene der Landeskoordinaten (Z-Ebene).

Nach einem Satz von Cayley lassen sich die Drehungen einer Kugel in sich durch eine lineare gebrochene Funktion einer komplexen Variablen darstellen. Zur Herleitung dieser Transformation bedienen wir uns am besten der stereographischen Projektion der Kugel. Diese ist konform und hat außerdem die bemerkenswerte Eigenschaft, daß einem Kreis auf der Kugel ein Kreis in der Projektionsebene entspricht.

2.2.1. Die stereographische Projektion der Kugel auf die ζ-Ebene

Als Zentrum der Projektion wählt man den Nordpol N und als Projektionsebene die Äquatorebene ζ. Mittels der Projektionsstrahlen durch N wird jedem Punkt der Kugel eindeutig ein Punkt der ζ-Ebene zugeordnet, wobei dem Projektionszentrum N die unendlich fernen Punkte der ζ-Ebene und dem Südpol das Koordinatenzentrum 0 entsprechen.

Der Punkt A_K auf der Kugel habe die sphärischen Koordinaten, Länge l und Breite b. Die stereographische Projektion von A_K ist A_K' mit der komplexen Koordinate:

$$\zeta = \rho\, e^{i\varphi}, \tag{9}$$

wo $\rho = |\zeta|$ den absoluten Betrag der komplexen Zahl und φ das Argument der komplexen Zahl bedeuten.

Aus der Figur lesen wir ohne weiteres ab:

$$\varphi = l \quad (10) \qquad \text{und} \qquad \rho = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right) \quad (11)$$

2.2.2. Konforme Abbildung der w-Ebene auf die ζ-Ebene

Stellt man die Gleichungen (10) und (11) sowie (4) und (5) einander gegenüber, so findet man:

$$\rho = e^q \quad (12) \qquad \text{und} \qquad e^{i\varphi} = e^{ip} \quad (13)$$

Durch komplexe Zusammenfassung von (12) und (13) erhält man die Abbildungsfunktion:

$$\zeta = e^q\, e^{ip} = e^{q+ip} = e^w \tag{14}$$

und deren Umkehrung

$$w = \ln \zeta = q + ip \tag{15}$$

Die Funktion ln ist im komplexen Gebiet vieldeutig. Wir beschränken uns auf die Werte $-\pi < p \leq +\pi$.

Das kartesische Netz der w-Ebene (Mercatorprojektion der Kugel) wird durch die Funktion (14) in das Polarnetz der ζ-Ebene (stereographische Projektion der Kugel) abgebildet, während umgekehrt die Funktion (15) das Polarnetz der ζ-Ebene in das kartesische Netz der w-Ebene, das heißt die stereographische in die Mercatorprojektion der Kugel, überführt. In der Darstellung der beiden Projektionen durch analytische Funktionen erkennt man ohne weiteres die enge Verwandtschaft, welche zwischen den beiden ältesten uns bekannten konformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene besteht.

2.2.3. Drehung der Kugel um den Durchmesser $C_2\,C_4$ (siehe Figur)

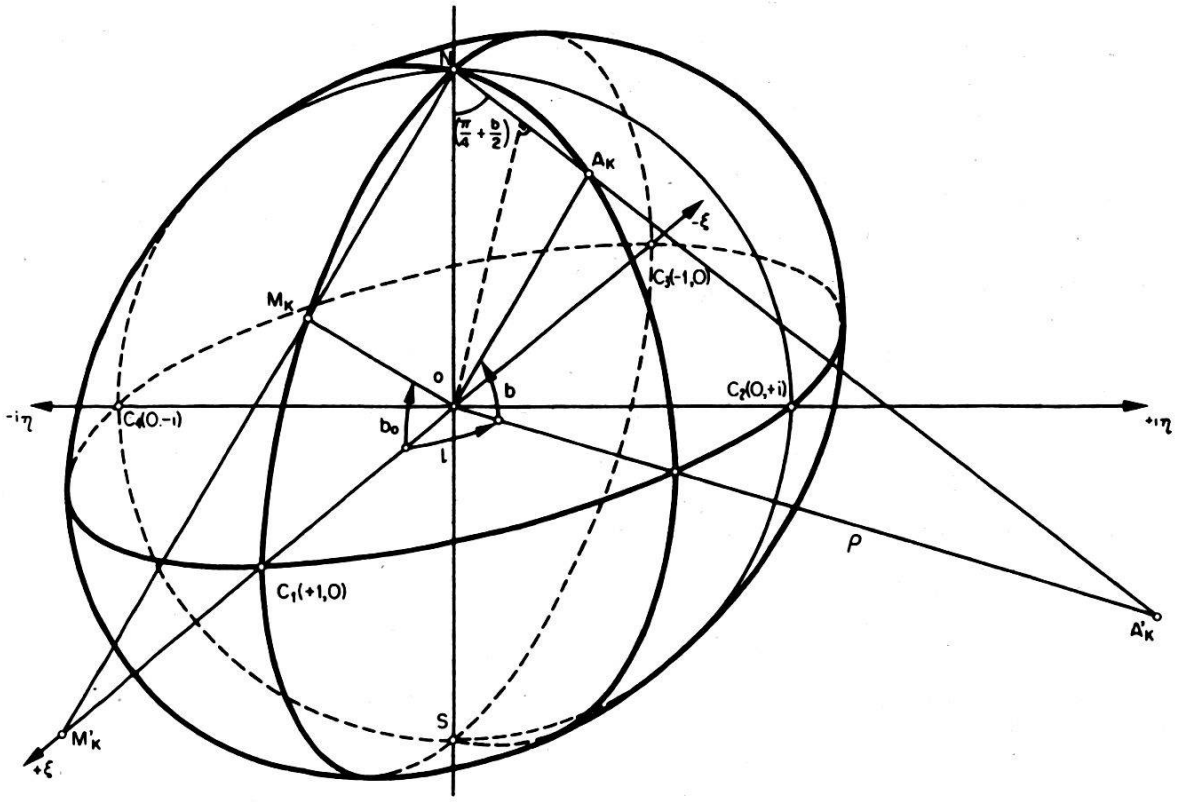
Durch die Drehung der Kugel um die Gerade $C_2\,C_4$ werden den Punkten der ζ-Ebene eindeutig die Punkte der ζ'-Ebene zugeordnet. Diese Transformation wird durch die lineare gebrochene Funktion:

$$\zeta' = \frac{\zeta\alpha + \beta}{\zeta\gamma + \delta} \tag{16}$$

dargestellt. α, β, γ und δ sind noch zu bestimmende reelle oder komplexe Zahlen, welche die Bedingung erfüllen:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \tag{17}$$

Wir denken uns die Kugel um die Gerade $C_2\,C_4$ gedreht, bis das Kartenzentrum M_K mit dem Punkte C $(+1{,}0)$ zusammenfällt. Der



Drehwinkel beträgt b_0. Die Punkte C_2 $(0, +i)$ und C_4 $(0, -i)$, die Fixpunkte der Transformation, bleiben unverändert. Die Koordinaten dieser Punkte erfüllen die Gleichung:

$$\zeta' = \zeta \quad \text{oder ausgeschrieben:}$$

$$\zeta = \frac{\zeta\alpha + \beta}{\zeta\gamma + \delta}$$

Nach Ausmultiplizieren erhält man:

$$\zeta^2 + \zeta \frac{\delta - \alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = 0 \tag{18}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Koordinaten der Fixpunkte der Transformation. Das Produkt der Wurzelfaktoren ergibt die Gleichung:

$$(\zeta - i)(\zeta + i) = \zeta^2 + 1 = 0 \tag{19}$$

Die Koeffizienten der Gleichungen (18) und (19) sind gliedweise miteinander identisch, und ihre Vergleichung liefert die folgenden Beziehungen:

$$\delta - \alpha = 0, \qquad \text{woraus folgt:} \qquad \delta = \alpha$$

$$-\frac{\beta}{\gamma} = 1, \qquad \text{woraus folgt:} \qquad \gamma = -\beta$$

Nach Einsetzen dieser Werte in (16) erhält man:

$$\zeta' = \frac{\zeta\alpha + \beta}{-\zeta\beta + \alpha} = \frac{\zeta\varepsilon + 1}{-\zeta + \varepsilon}, \text{ wo } \varepsilon = \frac{\alpha}{\beta} \tag{20}$$

Bei der Kugeldrehung geht Punkt M'_K in den Punkt C_1 über. Die komplexen Koordinaten der beiden Punkte sind:

$$M'_K: \zeta = e^{q_0} + i \cdot 0 \quad \text{und} \quad C_1: \zeta' = +1 + i \cdot 0$$

Gleichung (22) lautet also für diesen Punkt:

$$1 = \frac{e^{q_0}\varepsilon + 1}{-e^{q_0} + \varepsilon}, \text{ und hieraus folgt:}$$

$$\varepsilon = \frac{e^{q_0} + 1}{-e^{q_0} + 1} \tag{21}$$

Nach Einsetzen der berechneten Koeffizienten in die Gleichung (16) erhält man als Transformationsformel:

$$\zeta' = \frac{\zeta(1 + e^{q_0}) + (1 - e^{q_0})}{-\zeta(1 - e^{q_0}) + (1 + e^{q_0})} \tag{22}$$

Die Ebene ζ' der stereographischen Projektion wird noch auf die Mercatorebene Z der Landeskoordinaten abgebildet [siehe Gleichung (15)].

$$Z = \ln \zeta' \quad (23), \qquad \text{und ihre Umkehrung} \quad \zeta' = e^Z \quad (24)$$

Ebenso wird auf der rechten Seite der Gleichung ζ durch die Funktion der Abbildung der W-Ebene auf die ζ-Ebene ersetzt: $\zeta = e^{\alpha W}$. Nach diesen Substitutionen erhält man für die Funktion $Z = Z(W)$ den Ausdruck:

$$e^Z = -\frac{e^{\alpha W}(1 + e^{\alpha Q_0}) + (1 - e^{\alpha Q_0})}{e^{\alpha W}(1 - e^{\alpha Q_0}) - (1 + e^{\alpha Q_0})} \tag{25}$$

Die Auflösung der Gleichung (25) nach $e^{\alpha W}$ liefert ohne weiteres die Funktion für die Abbildung der Z-Ebene auf die W-Ebene.

$$e^{\alpha W} = \frac{e^Z(1 + e^{\alpha Q_0}) - (1 - e^{\alpha Q_0})}{e^Z(1 - e^{\alpha Q_0}) + (1 + e^{\alpha Q_0})} \tag{26}$$

$q_0 = \alpha Q_0$ ist die isometrische Kugelbreite des Kartenzentrums M_K. Deren Wert findet man nach Gleichung (5):

$$q_0 = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{b_0}{2}\right)$$

Unter Verwendung hyperbolischer Funktionen lassen sich die Gleichungen (25) und (26) in die Form bringen:

$$e^Z = \frac{e^{\alpha W} - \mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha Q_0}{2}}{+ e^{\alpha W}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha Q_0}{2} + 1} \quad \text{und} \quad e^{\alpha W} = \frac{e^Z + \mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha Q_0}{2}}{- e^Z\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha Q_0}{2} + 1}$$

Beachtet man noch, daß aus Gleichung (5) folgt:

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha Q}{2} = \operatorname{tg}\frac{b}{2}, \text{ so ergibt sich:}$$

$$(27) \quad e^Z = \frac{e^{\alpha W} - \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}}{+ e^{\alpha W} \cdot \operatorname{tg}\frac{b_0}{2} + 1} \quad \text{und} \quad (28) \quad e^{\alpha W} = \frac{e^Z + \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}}{- e^Z \operatorname{tg}\frac{b_0}{2} + 1}$$

oder

$$e^Z = \frac{e^{\alpha W}\cos\frac{b_0}{2} - \sin\frac{b_0}{2}}{+ e^{\alpha W}\sin\frac{b_0}{2} + \cos\frac{b_0}{2}} \qquad e^{\alpha W} = \frac{e^Z\cos\frac{b_0}{2} + \sin\frac{b_0}{2}}{- e^Z\sin\frac{b_0}{2} + \cos\frac{b_0}{2}}$$

Die Determinante der Koeffizienten ergibt für beide Abbildungen:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \cos^2 \frac{b_0}{2} + \sin^2 \frac{b_0}{2} = 1 \quad \text{[siehe Gleichung (17)].}$$

Betrachtet man die Projektion der ganzen Ellipsoidfläche auf die Z-Ebene, so ist $\alpha = 1$ zu setzen, da diesem Faktor nur bei der Abbildung beschränkter Gebiete Bedeutung zukommt.

Die Funktion e^Z ist in der ganzen w-Ebene regulär, mit Ausnahme der Pole des Berührungskreises der Z-Ebene mit der Gaußschen Kugel, welche in die unendlich ferne Gerade der Z-Ebene übergehen.

Die Funktion e^w ist in der ganzen Z-Ebene regulär, mit Ausnahme der Konvergenzpunkte der Meridiane, welche in die unendlich ferne Gerade der w-Ebene projiziert werden.

2.3. Trennung der Variablen

Um sich der Formeln (27) und (28) zur Berechnung der Koordinaten zugeordneter Punkte bedienen zu können, muß noch die Trennung der Variablen ausgeführt werden. Auf der rechten Seite der Gleichung (27) ersetzt man:

$$e^{\alpha W} = e^w = e^q (\cos p + i \sin p)$$

und erhält ohne Schwierigkeiten durch Zusammenfassen von reellen und imaginären Gliedern:

$$\text{Realteil } (e^Z) = \beta = \frac{e^q (\cos p \cos b_0 + \mathfrak{Sin}\, q \sin b_0)}{1 + e^q \left(\cos p \sin b_0 + 2\, \mathfrak{Sin}\, q \sin^2 \frac{b_0}{2}\right)} \tag{29}$$

$$\text{Imaginärteil } (e^Z) = \lambda = \frac{e^q \sin p}{1 + e^q \left(\cos p \sin b_0 + 2\, \mathfrak{Sin}\, q \sin^2 \frac{b_0}{2}\right)} \tag{30}$$

Mit (29) und (30) bildet man die komplexe Funktion $\gamma = \beta + i\lambda$, welche in der Form $\gamma = \rho \cdot e^{i\varphi}$ dargestellt werden kann.

ρ und φ findet man mittels der Gleichungen

$$\rho = +\sqrt{\beta^2 + \lambda^2} \quad (31) \qquad \text{und} \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{\beta} \quad (32)$$

Gleichung (27) lautet jetzt: $e^Z = \rho \cdot e^{i\varphi}$, woraus folgt:

$$Z = X + i\, Y = \ln \rho + i\varphi, \qquad -\pi < \varphi \leq \pi \tag{33}$$

Die Trennung von (33) in Real- und Imaginärteil ergibt die gesuchten Transformationsgleichungen:

$$X = \ln \rho \quad (34) \qquad \text{und} \qquad Y = \varphi \quad (35)$$

Auf analoge Weise verfährt man mit Gleichung (28). Man ersetzt auf der rechten Seite $e^Z = e^X (\cos Y + i \sin Y)$ und erhält:

$$\text{Realteil } (e^w) = \beta' = \frac{e^X (\cos Y \cos b_0 - \mathfrak{Sin}\, X \sin b_0)}{1 - e^X \left(\cos Y \sin b_0 - 2\, \mathfrak{Sin}\, X \sin^2 \frac{b_0}{2}\right)} \tag{36}$$

$$\text{Imaginärteil } (e^w) = \lambda' = \frac{e^X \sin Y}{1 - e^X \left(\cos Y \sin b_0 - 2\, \mathfrak{Sin}\, X \sin^2 \frac{b_0}{2}\right)} \tag{37}$$

Die Zusammenfassung von (36) und (37) ergibt:

$$e^w = \gamma' = \beta' + i\gamma' = \rho' e^{i\varphi'}, \tag{38}$$

wobei:

$$\rho' = +\sqrt{\beta'^2 + \lambda'^2} \quad \text{und} \quad \varphi' = \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda'}{\beta'}$$

Durch Logarithmieren von (38) erhält man:

$$w = q + ip = \ln \rho' + i\varphi', \qquad -\pi < \varphi' \leq \pi \tag{39}$$

und nach der Trennung in Real- und Imaginärteil

$$q = \ln \rho' \quad (40) \qquad \text{und} \qquad p = \varphi' \quad (41)$$

3. Die Abbildung des Kartenfeldes

Die Projektionen I und III enthalten die konforme Abbildung der ganzen Ellipsoidfläche auf die Ebene der Landeskoordinaten. Die Formeln (2) und (3) für die Projektion I sowie die Formeln (34) und (35) für die Projektion III sind streng richtig; doch eignen sie sich nicht für die numerische Auswertung, und ihr Gültigkeitsbereich geht über unsere Bedürfnisse weit hinaus. Unsere Aufgabe beschränkt sich auf die Abbildung der Umgebung des Kartenzentrums M_0 (L_0, B_0). Betrachtet man die Projektion des Punktes A (L, B), so sind die Koordinatendifferenzen

$$\Delta L = L - L_0 = L, \text{ da } L_0 = 0, \text{ und } \Delta B = B - B_0$$

kleine Größen, und man kann die entsprechenden Koordinatendifferenzen

$$\Delta P = P - P_0 = P, \text{ da } P_0 = 0 \quad (42), \qquad \text{und} \qquad \Delta Q = Q - Q_0 \quad (43)$$

mit Hilfe der Taylorschen Entwicklung der Funktionen (2) und (3) in der Umgebung von M_0 gewinnen. Man darf diesen Weg um so eher wählen, als die Kenntnis von Q_0 für die Konstruktion der Karte nicht notwendig ist. Auf die Herleitung dieser Transformationsformeln müssen wir hier verzichten.

Da in der W-Ebene nur die Größen ΔP und ΔQ vorkommen, wurden sie durch P und Q ersetzt. Die Werte der Funktionen $Q = Q\,(B)$ und

$P = P(L)$ sind in der Tafel I zusammengefaßt, während Tafel II die Werte der Funktionen $B = B(Q)$ und $L = L(P)$ enthält.

Zur Ableitung der Transformationsformeln der Projektion III geht man von Gleichung (27) aus:

$$Z = f(\alpha W) = \ln \frac{e^{\alpha W} - \operatorname{tg} \frac{b_0}{2}}{e^{\alpha W} \operatorname{tg} \frac{b_0}{2} + 1}$$

Der Kartenmittelpunkt M_0' hat die komplexe Koordinate $W_0 = Q_0$. Für die komplexe Koordinate eines beliebigen Punktes in der Umgebung von M_0' gilt die Gleichung:

$$W = Q_0 + (Q + iP) = Q_0 + \omega$$

Hieraus folgt:

$$W - W_0 = Q_0 + \omega - Q_0 = \omega \tag{44}$$

Die Funktion Z ist in der Umgebung von M_0' durch die Taylorsche Reihe:

$$Z = f(W_0) + f^{\mathrm{I}}(W_0)\,\omega + \frac{1}{2!} f^{\mathrm{II}}(W_0)\,\omega^2 + \\ + \frac{1}{3!} f^{\mathrm{III}}(W_0)\,\omega^3 + \frac{1}{4!} f^{\mathrm{IV}}(W_0)\,\omega^4 + \ldots \tag{45}$$

dargestellt.

Indem man beachtet, daß

$$e^{\alpha W_0} = e^{\alpha Q_0} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}\right),$$

$$\mathfrak{Sin}\,\alpha W_0 = \mathfrak{Sin}\,\alpha Q_0 = \operatorname{tg} b_0 \text{ und } \mathfrak{Cos}\,\alpha W_0 = \mathfrak{Cos}\,\alpha Q_0 = \frac{1}{\cos b_0},$$

erhält man folgende Werte für die Reihenkoeffizienten:

$$f(W_0) = \ln\left(\frac{e^{\alpha W} - \operatorname{tg}\frac{b_0}{2}}{e^{\alpha W}\operatorname{tg}\frac{b_0}{2} + 1}\right)_{W_0} = 0$$

$$f^{\mathrm{I}}(W_0) = \left[\frac{\alpha}{\cos b_0\,(1 + \operatorname{tg} b_0\,\mathfrak{Sin}\,\alpha W)}\right]_{W_0} = +\alpha \cos b_0$$

$$f^{\mathrm{II}}(W_0) = -\left[\frac{\alpha^2 \operatorname{tg} b_0\,\mathfrak{Cos}\,\alpha W}{\cos b_0\,(1 + \operatorname{tg} b_0\,\mathfrak{Sin}\,\alpha W)^2}\right]_{W_0} = -\alpha^2 \sin b_0 \cos b_0$$

$$f^{\mathrm{III}}(W_0) = -\left[\frac{\alpha^3 \operatorname{tg} b_0 \left(\mathfrak{Sin}\,\alpha W - \operatorname{tg} b_0 \left(1 + \mathfrak{Cos}^2 \alpha W\right)\right)}{\cos b_0 \left(1 + \operatorname{tg} b_0\, \mathfrak{Sin}\,\alpha W\right)^3}\right]_{W_0} = \alpha^3 \sin^2 b_0 \cos b_0$$

$$f^{\mathrm{IV}}(W_0) = -\left[\frac{\alpha^4 \operatorname{tg} b_0\, \mathfrak{Cos}\,\alpha W \left(1 - 4 \operatorname{tg} b_0\, \mathfrak{Sin}\,\alpha W + \operatorname{tg}^2 b_0 \left(5 + \mathfrak{Cos}^2 \alpha W\right)\right)}{\cos b_0 \left(1 + \operatorname{tg} b_0\, \mathfrak{Sin}\,\alpha W\right)^4}\right]_{W_0} =$$

$$= -\alpha^4 \sin b_0 \cos b_0$$

Nach Einsetzen der obigen Werte in (45) ergibt sich

$$Z = \alpha \cos b_0\, \omega - \frac{\alpha^2}{2} \cos b_0 \sin b_0\, \omega^2 + \frac{\alpha^3}{6} \cos b_0 \sin^2 b_0\, \omega^3 -$$

$$- \frac{\alpha^4}{24} \cos b_0 \sin b_0\, \omega^4 + \ldots$$

Die Potenzen von ω werden nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, und durch Zusammenfassen der reellen und imaginären Glieder findet man die Transformationsformeln der Projektion III:

$$(46) \quad X = \cos b_0 \left\{ \alpha Q - \frac{\alpha^2}{2} \sin b_0 \left(Q^2 - P^2\right) + \frac{\alpha^3}{6} \sin^2 b_0 \left(Q^3 - 3\, Q\, P^2\right) - \frac{\alpha^4}{24} \sin b_0 \left(Q^4 - 6\, Q^2 P^2 + P^4\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$

$$(47) \quad Y = \cos b_0 \left\{ \alpha P - \frac{\alpha^2}{2} \sin b_0\, 2 Q P + \frac{\alpha^3}{6} \sin^2 b_0 \left(3\, Q^2 P - P^3\right) - \frac{\alpha^4}{24} \sin b_0 \left(4\, Q^3 P - 4\, Q P^3\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$

Ausgehend von Gleichung (28), erhält man auf analoge Art die Transformationsgleichungen der Projektion IV:

$$(48) \quad Q = \frac{1}{\alpha \cos b_0} \left\{ X + \frac{\operatorname{tg} b_0}{2} \left(X^2 - Y^2\right) + \frac{\operatorname{tg}^2 b_0}{3} \left(X^3 - 3\, X\, Y^2\right) + \frac{\operatorname{tg} b_0}{24} \left(1 + 6 \operatorname{tg}^2 b_0\right) \left(X^4 - 6\, X^2 Y^2 + 6\, Y^4\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$

$$(49) \quad P = \frac{1}{\alpha \cos b_0} \Big\{ Y$$

$$+ \frac{\operatorname{tg} b_0}{2} 2\, X\, Y$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}^2 b_0}{3} (3 X^2 Y - Y^3)$$

$$+ \frac{\operatorname{tg} b_0}{24} (1 + 6 \operatorname{tg}^2 b_0)(4 X^3 Y - 4 X Y^3)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zur Berechnung der Werte von Tafel III und Tafel IV wurden je acht Glieder mitgenommen.

4. Die Tabellen

Zum vornherein stand fest, daß bei der Neubearbeitung von Rechenhilfsmitteln zum Projektionssystem Tabellen geschaffen werden sollten, aus denen die gesuchten Größen – Koordinaten und Meridiankonvergenz – mittels Interpolation gewonnen werden können.

Um die Anwendung der üblichen, dem Praktiker aber wenig vertrauten Interpolationsformeln zu vermeiden, wurde an deren Stelle die jedem Ingenieur geläufige und wesentlich einfachere Taylorsche Entwicklung gewählt. Diese Rücksicht zwang uns für die Doppelprojektion sowohl die direkten als auch die inversen Transformationen und alle notwendigen Ableitungen zu tabellieren.

Bei den Projektionen I und II handelt es sich um Transformationen mit nur einer Variablen, und es konnte für beide Richtungen ein so kleines Tafelintervall gewählt werden, daß man bei der Interpolation mit der ersten und zweiten Ableitung auskommt.

Wesentlich schwieriger gestaltet sich das Problem der Aufstellung von Tafeln für die Projektionen III und IV, da in diesem Falle die Transformationsformeln zwei Variablen enthalten.

Rosenmund hat seinerzeit darauf verzichtet, für die Abbildung der Kugel auf die Z-Ebene eine Tafel zu rechnen, und auch noch heute ließe sich der für die Herstellung einer solchen Tafel nötige Aufwand an Arbeit und Material kaum rechtfertigen. Erst die heute vorliegende Lösung der Aufgabe ergab, dank der Darstellung der Projektionen III und IV durch analytische Funktionen, einfache und übersichtliche Interpolationsformeln, welche ohne Schwierigkeiten die Mitnahme auch der dritten Ableitungen gestatten. Damit wurde es möglich, für alle Koordinaten (P, Q) und (Y, X) das im Hinblick auf die geforderte Genauigkeit recht große Argumentintervall von 20 km zu wählen und so den Umfang der Tafeln auf ein zweckentsprechendes und tragbares Maß zu reduzieren.

Die aus praktischen Gründen geforderte Tabellierung aller Transformationsformeln war einer der entscheidenden Gründe, welcher einer einfachen Weiterentwicklung der Rosenmundschen Formeln entgegenstand und den Anstoß gab, eine neue Darstellung des schweizerischen Projektionssystems zu suchen.

Die Tabellen sind vor allem für die Umrechnung der Koordinaten einzelner Punkte gedacht. Ist eine größere Anzahl von Punkten (30 und mehr) zu transformieren, so wird man gut tun, die Arbeit dem Institut für angewandte Mathematik der Eidgenössischen Technischen Hochschule zu übertragen. Das Institut besitzt die numerischen Daten und die ausgearbeiteten Programme zur Ausführung dieser Transformationen auf seiner programmgesteuerten Rechenmaschine «Ermeth».

Das Vermessungswesen der Schweiz, sein Werden und Sein

Kurzvortrag von alt Vermessungsdirektor *H. Härry*
an der Eröffnungssitzung des «Comité Permanent» der
«Fédération Internationale des Géomètres» (FIG)
am 9. Juni 1961 im Rathaus Bern.

Die heutige Organisation des schweizerischen Vermessungswesens trägt die Kennzeichen des geschichtlichen Werdens des schweizerischen Bundesstaates. Einige Eigenarten, die von zentralistischen Zusammenfassungen in anderen Staaten abweichen, sind der Ausdruck einer geschichtlich gereiften Erkenntnis, daß die Einigkeit in der Verschiedenartigkeit die Menschen am glücklichsten macht, daß die Bevorzugung der Verantwortung des Einzelnen vor dem Zusammengeballten und Mächtigen – Jakob Burckhardt sagte, Macht sei an sich böse – auf die Dauer die solideste Grundlage für das gute Zusammenleben und Zusammenwirken der Menschen bietet. Die stark föderalistische Prägung des heutigen schweizerischen Bundesstaates geht auf die eidgenössischen Bauern- und Stadtrepubliken zurück, die sich hinsichtlich ihres Alters mit den hanseatischen Stadtrepubliken messen können. Sie waren bis zum Jahre 1848 nur durch einen Staatenbund, eine Genossenschaft zur Abwehr der Unbill der Zeit, verbunden. Die Gründung des schweizerischen Bundesstaates vor gut hundert Jahren war ein eindrucksvoller, leidenschaftlich umstrittener Schritt vom «Partikularen» ins «Ganze». In den 25 Kantonen und Halbkantonen der heutigen Eidgenossenschaft leben die alten eidgenössischen Republiken, die sogenannten alten Orte, weiter: Sie sind sich ihrer eigenen Kulturgeschichte, ihrer eigenen Art und Kultur bewußt und gaben dem Bundesstaat Schweiz nur ab, was der gemeinsame Wille zur Freiheit, der Zuwachs an Sicherheit und an Wohlstand nahelegte. Anders wäre das friedliche und produktive Zusammenleben der verschiedenartigen Schweizer Gruppen alemannischer, französischer und italienischer Kultur gar nicht möglich. Diese staats-