

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 59 (1961)

**Heft:** 6

**Artikel:** Sur la compensation de quantités mesurées interdépendantes

**Autor:** Anseremt, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-216896>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

## Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungs-  
wesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein;  
Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Amélio-  
rations foncières; Société suisse des Ingénieurs du  
Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 6 · LIX. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Juni 1961

### Sur la compensation de quantités mesurées interdépendantes

Par A. Ansermet

Dans la pratique courante, la compensation de quantités mutuellement dépendantes se présente assez rarement; le cas doit toutefois être envisagé où la compensation porte sur des grandeurs mesurées indirectement. On parle aussi d'observations corrélées et la question se pose de généraliser les modes de calcul usuels. Il est aisément de pressentir que ce problème est complexe, et le but de ces lignes est de développer encore quelques considérations en traitant quelques cas concrets caractéristiques. Grâce à ces exemples numériques il sera possible de faire des comparaisons judicieuses entre la méthode des moindres carrés et sa généralisation. Disons de suite que lors de cette confrontation la méthode des moindres carrés ne fera pas mauvaise figure.

Considérons tout d'abord le cas simple où les observations sont au nombre de trois seulement, deux de celles-ci étant surabondantes, ce qui donne lieu aux discordances  $w_1$  et  $w_2$  et aux équations de condition aux corrections:

$$\begin{cases} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + w_1 = [av] + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + w_2 = [bv] + w_2 = 0 \end{cases}$$

A la base du calcul on a ici la matrice dite des poids où les éléments non diagonaux  $p_{gh} = p_{hg}$  ( $g \neq h$ ) sont nuls quand il n'y a pas de corrélation:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et sa réciproque} \quad \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

dite des comultiplicateurs ou cofacteurs où  $q_{gh} = q_{hg}$  ( $g \neq h$ ). La fonction  $F$  à rendre minima est, en faisant abstraction des  $w$ :

$$F = [vvv] + p_{12}v_1v_2 + p_{13}v_1v_3 + \dots + p_{32}v_3v_2 - 2k_1[av] - 2k_2[bv]$$

les  $k_1$  et  $k_2$  étant les multiplicateurs de Lagrange ou corrélatifs. Dans le terme  $[p_{vv}]$  les  $p$  sont les éléments diagonaux.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} dF: dv_1 = p_{11}v_1 + p_{12}v_2 + p_{13}v_3 - a_1k_1 - b_1k_2 = 0 \\ \frac{1}{2} dF: dv_2 = p_{21}v_1 + p_{22}v_2 + p_{23}v_3 - a_2k_1 - b_2k_2 = 0 \\ \frac{1}{2} dF: dv_3 = p_{31}v_1 + p_{32}v_2 + p_{33}v_3 - a_3k_1 - b_3k_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Le terme  $[p_{vv}]$  est formé en fonction des  $p_{11}$ ,  $p_{22}$ ,  $p_{33}$  seulement.

La transformation linéaire connue, basée sur la réciprocité des matrices, permet d'exprimer les  $v$  en partant du système (1):

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = k_1(a_1q_{11} + a_2q_{12} + a_3q_{13}) + k_2(b_1q_{11} + b_2q_{12} + b_3q_{13}) \\ v_2 = k_1(a_1q_{21} + a_2q_{22} + a_3q_{23}) + k_2(b_1q_{21} + b_2q_{22} + b_3q_{23}) \\ v_3 = k_1(a_1q_{31} + a_2q_{32} + a_3q_{33}) + k_2(b_1q_{31} + b_2q_{32} + b_3q_{33}) \end{array} \right\} \quad (2)$$

Ce sont les équations aux corrélatifs généralisées tandis que les équations normales aux corrélatifs sont:

$$\left. \begin{array}{l} [av] + w_1 = Ak_1 + Bk_2 + w_1 = 0 \\ [bv] + w_2 = Bk_1 + A'k_2 + w_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$A = \begin{cases} q_{11}a_1a_1 + q_{12}a_1a_2 + q_{13}a_1a_3 \\ + q_{21}a_2a_1 + q_{22}a_2a_2 + q_{23}a_2a_3 \\ + q_{31}a_3a_1 + q_{32}a_3a_2 + q_{33}a_3a_3 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} q_{11}b_1a_1 + q_{12}b_1a_2 + q_{13}b_1a_3 \\ + q_{21}b_2a_1 + q_{22}b_2a_2 + q_{23}b_2a_3 \\ + q_{31}b_3a_1 + q_{32}b_3a_2 + q_{33}b_3a_3 \end{cases}$$

le coefficient  $A'$  se déduisant de  $A$  en substituant les  $b$  aux  $a$ . Ces résultats s'obtiennent par les doubles produits matriciels; les  $a_1$ ,  $b_1$  peuvent être aussi dessous les  $q_{11}$ ,  $q_{21}$  et de même pour la suite

$$\left[ \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & \\ q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ a_2 & b_2 & \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ a_3 & b_3 & \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} a_1q_{11} + a_2q_{12} + a_3q_{13} & b_1q_{11} + b_2q_{12} + b_3q_{13} \\ a_1 & b_1 \\ a_1q_{21} + a_2q_{22} + a_3q_{23} & b_1q_{21} + b_2q_{22} + b_3q_{23} \\ a_2 & b_2 \\ a_1q_{31} + a_2q_{32} + a_3q_{33} & b_1q_{31} + b_2q_{32} + b_3q_{33} \\ a_3 & b_3 \end{array} \right]$$

Si les éléments non diagonaux  $p_{gh}$  et  $q_{gh}$  des matrices initiales sont nuls, les éléments diagonaux  $p_{11}$ ,  $p_{22}$ ,  $p_{33}$  sont respectivement les inverses de  $q_{11}$ ,  $q_{22}$ ,  $q_{33}$ , ce qui ramène à la solution par les moindres carrés.

Les corrections  $v_i$  étant connues, le calculateur forme l'expression:

$$[p_{vv}] + [p_{gh}v_gv_h] \quad g \neq h$$

déterminée aussi à l'aide de matrices. On en déduit l'erreur quadratique moyenne de poids unité puis, pour apprécier dans quelle mesure les poids initiaux sont amplifiés grâce à la compensation, on formera la somme:

$$S = [m'^2_i : m_i^2]$$

où les  $m_i'$  et  $m_i$  sont respectivement les erreurs moyennes, *après* et *avant* compensation, des éléments soumis à compensation. C'est à ce moment que la comparaison a lieu avec la méthode des moindres carrés. Des cas concrets seront traités ci-après; dans l'un de ceux-ci le calcul est scindé en deux phases et l'on forme la matrice des comultiplicateurs des binômes  $(-f_i + v_i)$  après la première phase. Ces  $f_i$  expriment les différences entre les valeurs provisoires et mesurées. Le rôle joué par ces comultiplicateurs *a posteriori* sera rendu plus explicite lors des applications.

*Observations médiates.* Ce cas fut traité très récemment ([3], p. 308). Si le nombre des inconnues est égal à deux, les coefficients des équations normales sont respectivement pour:  $-f_i + v_i = a_i x + b_i y$

$$[paa] + [p_{gh} a_g a_h], \quad [pab] + [p_{gh} a_g b_h], \quad [pbb] + [p_{gh} b_g b_h],$$

les termes  $[paa]$ ,  $[pab]$ ,  $[pbb]$  étant obtenus en faisant abstraction des éléments  $p_{gh}$  non diagonaux. La suite du calcul est aisée; il faut former l'inverse de la matrice du système d'équations normales, soit la matrice des comultiplicateurs des inconnues compensées; il n'y a rien là de bien nouveau.

Le premier problème choisi se rencontre fréquemment; il porte sur le calcul d'une paire de points et les éléments initiaux sont inspirés d'une récente publication ([2], p. 55), mais la solution adoptée ici est différente en ce sens qu'une des quatre inconnues est éliminée au préalable. A certains égards c'est un avantage.

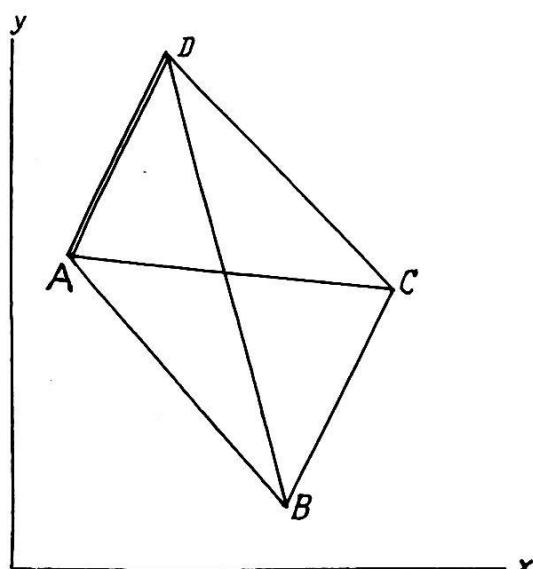
Avant de poursuivre, rappelons qu'aucun mode de compensation n'est absolument exempt d'arbitraire; cela tient à la nature du problème.

*Détermination d'une paire de points.* La méthode appliquée est celle courante dite aux variations des inconnues. Les points  $A$  et  $D$  sont donnés et on mesure les directions tracées sur la figure. Ainsi que l'indique clairement le tableau des équations ci-après, on soumet à compensation huit

éléments: quatre directions et quatre angles; ces derniers ont deux à deux un côté commun, ce qui donne lieu à la corrélation. Pratiquement une telle solution est discutable.

De plus la distance  $BC$  est supposée connue et exempte d'erreur, ce qui s'exprime par la condition:  $3,405(dx_1 - dx_2) + 4,318(dy_1 - dy_2) = 0$ , les corrections à apporter aux coordonnées étant  $(dx_1, dy_1)$  pour  $C$  et  $(dx_2, dy_2)$  pour  $B$ . Une des variables peut être éliminée:

$$dy_2 = +0,789 dx_1 + dy_1 - 0,789 dx_2$$



En admettant comme unités le décimètre et la seconde sexagésimale, on obtient le groupe d'équations ci-dessous; la forme générale est:

$$-f_i + v_i = a_i dx_1 + b_i dy_1 + c_i dx_2 + d_i dy_2$$

Eléments mesurés	- $f_i + v_i$	Matrice des coefficients				Ecarts quadratiques	$q_{gh}$
		$dx_1$	$dy_1$	$dx_2$	$dy_2$		
Direction $AC$	$i = 1$	-1,221	-0,181			$\pm m$	
Direction $AB$	$i = 2$	-0,843	-1,068	-0,046	-1,068	$\pm m$	
Angle $ABD$	3	+0,072	+0,091	+0,674	+0,091	$\pm m\sqrt{2}$	
Angle $DBC$	4	+1,125	-1,427	-0,910	+2,404	$\pm m\sqrt{2}$	-1
Angle $BCA$	5	+3,022	+0,977	-2,807		$\pm m\sqrt{2}$	-1
Angle $ACD$	6	-2,346	+1,246	+1,125	-1,427	$\pm m\sqrt{2}$	
Direction $DC$	7	-3,472	-0,181	+2,251		$\pm m\sqrt{2}$	
Direction $DB$	8	+0,303	-0,713			$\pm m$	
		-0,918	-0,895			$\pm m$	
		-0,771	-0,977	-0,215	-0,977	$\pm m$	
				+0,556			

Les coefficients avant l'élimination de  $dy_2$  sont indiqués pour mémoire.

Pour grouper les éléments sur un même tableau, une seconde ligne fut ajoutée pour les valeurs  $i = 2, 3, 4, 5, 8$ ; cette seconde ligne résulte de l'élimination de  $dy_2$ . C'est elle qui est valable ici.

Pour les matrices des  $q$  et des  $p$  on a donc:

$$\begin{array}{|cccccccc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|cccccccc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Dans les matrices symétriques et réciproques ci-dessus la moitié des éléments non diagonaux fut remplacée par des traits.

Il y a d'autre part des contrôles dans le tableau des  $(-f_i + v_i)$ , par exemple:

$$\begin{aligned} -(-f_1 + v_1) + (-f_2 + v_2) + (-f_3 + v_3) + (-f_4 + v_4) + (-f_5 + v_5) &= 0 \\ (-f_4 + v_4) + (-f_5 + v_5) + (-f_6 + v_6) - (-f_7 + v_7) + (-f_8 + v_8) &= 0 \end{aligned}$$

La formation des équations normales s'obtient en effectuant un double produit matriciel et en laissant ici de côté les termes absous; les matrices jouent le rôle d'opérateurs. Le but poursuivi est de former la somme  $S$  donnant l'amplification des poids après compensation. Le rapport d'amplification est en réalité l'inverse du quotient ( $m_i'^2 : m_i^2$ ).

	$dx_1$	$dy_1$	$dx_2$					
1	1 —1,221	—0,181						
2		1 —0,843	—1,068	—0,046				
3		+0,072	+0,091	0,667 +0,602	0,333			
4		+3,022	+0,977	0,333 —2,807	0,667			
5		—3,472	—0,182	+2,251		0,667	0,333	
6		+0,303	—0,713			0,333	0,667	
7		—0,918	—0,895					1
8		—0,771	—0,977	+0,556				1

1	—1,221 —1,221	—0,181 —0,181	
2	—0,843 —0,843	—1,068 —1,068	—0,046 —0,046
3	+1,055 +0,072	+0,386 +0,091	—0,535 +0,602
4	+2,039 +3,022	+0,682 +0,977	—1,670 —2,807
5	—2,214 —3,472	—0,359 —0,182	+1,501 +2,251
6	—0,955 +0,303	—0,537 —0,713	+0,750
7	—0,918 —0,918	—0,895 —0,895	
8	—0,771 —0,771	—0,977 —0,977	+0,556 +0,556

Le double produit fournit la matrice des équations normales:

17,27	+5,86	—10,46
+ 5,86	4,07	— 2,99
—10,46	—2,99	8,04

d'où la matrice réciproque après des calculs faits à la règle:

0,425	—0,285	+0,446
—0,285	0,527	—0,175
+0,446	—0,175	0,639

Cette dernière fournit les comultiplicateurs des inconnues compensées; en fonction de ces valeurs on peut calculer, après compensation, les huit erreurs moyennes quadratiques  $m'_i$  des binômes ( $-f_i + v_i$ ), par exemple:

$$\begin{aligned}
m'^2_s = m^2 & (0,072^2 \cdot 0,425 + 0,091^2 \cdot 0,527 + 0,602^2 \cdot 0,639 - \\
& - 2 \cdot 0,072 \cdot 0,091 \cdot 0,285 + 2 \cdot 0,072 \cdot 0,602 \cdot 0,446 - \\
& - 2 \cdot 0,091 \cdot 0,602 \cdot 0,175) = m^2 \cdot 0,254.
\end{aligned}$$

Initialement on avait  $\pm m$  pour les erreurs quadratiques moyennes des quatre directions et  $\pm m\sqrt{2}$  pour les quatre angles, valeurs qui viennent améliorées grâce à la compensation. A cet effet formons les quotients des carrés des écarts quadratiques puis calculons la somme  $S$  des huit quotients en posant  $m^2 = 1$  pour simplifier:

$$\begin{aligned}
S = & \frac{0,524}{1} + \frac{0,407}{1} + \frac{0,254}{2} + \frac{1,122}{2} + \frac{1,186}{2} + \frac{0,431}{2} + \frac{0,312}{1} + \\
i = & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\
& + \frac{0,331}{1} = 3,07. \quad ([2], p. 75) \\
i = & 8
\end{aligned}$$

au lieu de:

$$S = 3,00 \text{ (3 inconnues)}$$

par la méthode des moindres carrés. Cette confrontation n'est pas au désavantage de la méthode des moindres carrés dans le cas particulier.

Le gain réalisé grâce à la compensation est mis en évidence par ces huit quotients qui varient entre 0,127 ( $i = 3$ ) et 0,593 ( $i = 5$ ), en moyenne 0,384 (moindres carrés 0,375). Certains auteurs expriment ce gain en pour-cent, ce qui paraît moins explicite.

La corrélation, telle qu'elle se présente dans ce problème, pouvait être évitée pratiquement; toutes les directions tracées sur la figure firent l'objet de mesures indépendantes, par exemple par la méthode dite des couples sur référence en faveur dans certains pays. Un exemple avec fractionnement du calcul sera traité plus loin.

*Compensation de mesures linéaires.* Dans l'exemple précédent la corrélation entre éléments mesurés résultait de la combinaison de mesures angulaires et de directions.

Le calcul ci-après est basé sur l'hypothèse suivante: Pour les éléments diagonaux de la matrice des poids on peut admettre une valeur commune, unique,  $p$ , et pour les non diagonaux  $p_{gh}$  ( $g \neq h$ ) aussi une valeur  $p_{gh} = \underline{\underline{p}}$  commune.

Une station spatiale est déterminée par quatre mesures linéaires; la forme générale de l'équation initiale est:

$$-f_i + v_i = a_i dx + b_i dy + c_i dz \quad (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1)$$

où  $f_i$  est le terme absolu,  $dx, dy, dz$  des corrections à apporter aux coordonnées provisoires; on forme un double produit matriciel en fonction des  $a_i, b_i, c_i$  choisis arbitrairement:

	$dx$	$dy$	$dz$	
1	+0,577 $p$	+0,577 $p'$	+0,577 $p'$	$p'$
2	+0,577 $p'$	-0,577 $p$	+0,577 $p'$	$p'$
3	-0,577 $p'$	+0,577 $p'$	+0,577 $p$	$p'$
4	-0,577 $p'$	-0,577 $p'$	+0,577 $p'$	$p$

1	+0,577 ( $p - p'$ ) +0,577	+0,577 ( $p - p'$ ) +0,577	+0,577 $p + 1,732 p'$ +0,577
2	+0,577 ( $p - p'$ ) +0,577	-0,577 ( $p - p'$ ) -0,577	+0,577 $p + 1,732 p'$ +0,577
3	-0,577 ( $p - p'$ ) -0,577	+0,577 ( $p - p'$ ) +0,577	+0,577 $p + 1,732 p'$ +0,577
4	-0,577 ( $p - p'$ ) -0,577	-0,577 ( $p - p'$ ) -0,577	+0,577 $p + 1,732 p'$ +0,577

et finalement, pour la matrice des équations normales:

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$$

1,333 ( $p - p'$ )	0	0
0	1,333 ( $p - p'$ )	0
0	0	1,333 $p + 4 p'$

La matrice étant diagonale, il suffit d'inverser les éléments diagonaux pour obtenir les comultiplicateurs des inconnues compensées.

Si  $p' = 0$ , l'ellipsoïde d'erreur est sphérique, ce que l'on présumait. Quand  $p' \neq 0$ , deux des axes sont égaux; le signe de  $p'$  est déterminant. Le 3<sup>e</sup> axe s'allonge et les deux axes égaux se raccourcissent ou l'inverse.

*Formation de la somme S.* Considérons deux cas particuliers:

$$1^{\circ} \quad q' = q_{gh} = -0,1 (g \neq h) \quad q_{11} = q_{22} = q_{33} = q_{44} = 1 = q.$$

L'erreur moyenne quadratique d'une longueur mesurée est  $\pm m$ . En inversant la matrice des  $q$ , on obtient celle des poids

$$p = 1,039, \quad p' = +0,13 \quad p - p' = 0,909$$

$$q - q' = 1,1 \quad (q - q') (p - p') = 1 \quad ([3], p. 310)$$

$$1,333 (p - p') = 1,21; \quad 1,333 \cdot p + 4p' = 1,90.$$

Les quatre binômes  $(-f_i + v_i)$  ont même comultiplicateur:

$$\overline{0,577^2} \left( \frac{1}{1,21} + \frac{1}{1,21} + \frac{1}{1,90} \right) = \frac{1}{3} (0,825 + 0,825 + 0,51) = 0,72$$

$$S = 4 \cdot 0,72 = 2,88$$

$$2^o \quad q' = +0,1 \quad q = 1, \quad p = 1,0256, \quad p' = -0,0855$$

$$(q - q')(p - p') = 0,9 \cdot 1,111 = 1$$

$$1,333(p - p') = 1,48 \quad 1,333p + 4p' = 1,36 - 0,34 = 1,02$$

$$\overline{0,577^2} \left( \frac{1}{1,48} + \frac{1}{1,48} + \frac{1}{1,02} \right) = \frac{1}{3} \cdot 2,33$$

$$S = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,33 = 3,11$$

La solution par les moindres carrés donnerait  $S = 3$  ( $pq = 1$ ).

L'ellipsoïde d'erreur peut demeurer sphérique même pour  $p' \neq 0$ . Ce sera le cas, par exemple, pour la matrice ci-après des coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ :

$i =$	$a_i$	$b_i$	$c_i$
1	0	0	-1
2	0	+0,943	+0,333
3	-0,816	-0,4714	+0,333
4	+0,816	-0,4714	+0,333

Un calcul, analogue au précédent, toujours avec les éléments  $p$  et  $p'$ , donne pour la matrice finale:

1,333(p - p')	0	0
0	1,333(p - p')	0
0	0	1,333(p - p')

Le rayon de la sphère d'erreur s'allonge ou se raccourcit en fonction du signe de  $p'$ .

On sait que c'est moins l'ellipsoïde d'erreur qui joue un rôle que sa surface podaire par rapport au centre; ces deux surfaces sont unicursales. Il suffit d'exprimer les coordonnées des points de la surface podaire («Fußpunktfläche») pour le constater.

#### *Corrélation et fractionnement des calculs*

Le cas peut se présenter où une compensation est déjà terminée lorsque de nouvelles conditions interviennent dont il faut tenir compte.

Le calculateur doit alors envisager une seconde phase de la compensation; ce problème n'est pas nouveau. Après la première phase on possède tous les éléments qui expriment la corrélation existant entre les inconnues ou, ce qui revient au même, entre les  $(-f_i + v_i)$ . Certains géodésiens ont jugé opportun d'établir à nouveau qu'il fallait tenir compte de cette corrélation résultant de la première phase ([2], p. 97). (C'était méritoire mais aboutissait à une confirmation de ce que l'on savait depuis longtemps.)

A cet effet reprenons, en lui donnant de l'extension, le problème de compensation traité dans le numéro 7, 1960, de la présente Revue:

$$I \left\{ \begin{array}{l} -f_1 + v_1 = x \\ -f_2 + v_2 = +y \\ -f_3 + v_3 = +z \\ -f_4 + v_4 = y + z \\ -f_5 + v_5 = x + z \\ -f_6 + v_6 = x + y \\ -f_7 + v_7 = x + y + z \end{array} \right.$$

ou, si l'on préfère:

$$II \left\{ \begin{array}{l} -f_4 + v_4 = (-f_2 + v_2) + (-f_3 + v_3) \\ -f_5 + v_5 = (-f_1 + v_1) + (-f_3 + v_3) \\ -f_6 + v_6 = (-f_1 + v_1) + (-f_2 + v_2) \\ -f_7 + v_7 = (-f_1 + v_1) + (-f_2 + v_2) + (-f_3 + v_3) \end{array} \right.$$

Les  $w$  sont calculables en fonction des  $f$ .

Pratiquement on peut concevoir que l'on pèse trois lingots de métal isolément puis en les groupant par deux ou par trois. La balance utilisée ne permet pas d'admettre qu'il y a indépendance entre les pesées.

$$q = 1, \quad q' = +0,25 \quad p = 1,2, \quad p' = -0,133$$

$$q - q' (p - p') = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = 0,328 \quad Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = -0,047$$

On en déduit pour les  $(-f_i + v_i)$ :

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = -0,047, \text{ etc.}$$

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 0,328, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = 0,562, \quad Q_{77} = 0,702$$

$$S = 3 \cdot 0,328 + 3 \cdot 0,562 + 0,702 = 3,37 \text{ (3 inconnues)}$$

en moyenne 0,48 au lieu de 0,43 par les moindres carrés.

*Seconde phase.* Admettons pour simplifier une seule équation de condition liant les inconnues; à celles-ci, calculées en première phase, il faut ajouter des surcorrections  $\xi, \eta, \zeta$  telles que:

$$\xi + \eta + \zeta = w, \quad p_1 \xi + p_2 \eta + p_3 \zeta = w' \quad ([1], \text{ p. 295-302})$$

Aux  $v_1, v_2 \dots v_7$  il faut ajouter des  $v_1', v_2' \dots v_7'$ . Or, d'après I, on a

$$\begin{array}{lll} v_1' = \xi & v_4' = & \eta + \zeta \\ v_2' = & + \eta & v_5' = \xi + \zeta \\ v_3' = & + \zeta & v_6' = \xi + \eta \end{array}$$

On peut aussi considérer une équation liant les  $v_1', v_2' \dots v_7'$ , cas plus général.

Une relation entre les inconnues nouvelles  $\xi, \eta, \zeta$  se traduit en effet par une équation liant trois seulement des  $v_1', v_2' \dots v_7'$ . Considérons donc la forme  $a_1'v_1' + a_2'v_2' + \dots + a_7'v_7' = [a_i'v_i']_1^7 = w'$ , où  $w'$  est une discordance. Cette condition peut être convertie en une autre en fonction des  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$[a_i'v_i'] = p_1\xi + p_2\eta + p_3\zeta = w'$$

où

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1' + a_5' + a_6' + a_7'; \\ p_2 &= a_2' + a_4' + a_6' + a_7'; \\ p_3 &= a_3' + a_4' + a_5' + a_7'. \end{aligned}$$

Il faut, de plus, former les

$$P_1 = 0,328 p_1 - 0,047 p_2 - 0,047 p_3, \quad P_2 = -0,047 p_1 + 0,328 p_2 - 0,047 p_3 \\ \text{et } P_3 = -0,047 p_1 - 0,047 p_2 + 0,328 p_3$$

les facteurs 0,328 et 0,047 étant, comme on l'a vu, les coefficients de poids respectivement quadratiques et rectangulaires, relatifs aux  $x, y, z$ . Or on a:

$$\xi = P_1 k_1, \quad \eta = P_2 k_1, \quad \zeta = P_3 k_1 \quad ([1], \text{p. 295-302})$$

$$P_1 = 0,328 a_1' - 0,047 a_2' - 0,047 a_3' - 0,094 a_4' + 0,281 a_5' + \\ + 0,281 a_6' + 0,234 a_7'$$

$$P_2 = -0,047 a_1' + 0,328 a_2' - 0,047 a_3' + 0,281 a_4' - 0,094 a_5' + \\ + 0,281 a_6' + 0,234 a_7'$$

$$P_3 = -0,047 a_1' - 0,047 a_2' + 0,328 a_3' + 0,281 a_4' + 0,281 a_5' - \\ - 0,094 a_6' + 0,234 a_7'$$

puis:

$$P_1 + P_2 = \dots (i = 6); \quad P_1 + P_3 = \dots (i = 5); \quad P_2 + P_3 = \dots \text{(pour } v_4' \text{)}$$

Enfin:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0,234 a_1' + 0,234 a_2' + 0,234 a_3' + 0,468 a_4' + \\ + 0,468 a_5' + 0,468 a_6' + 0,702 a_7'$$

ce qui fournit les éléments pour le calcul des  $v_i'$ .

Un autre mode de détermination est basé sur les équations (2), développées au début, avec l'emploi de la matrice des comultiplicateurs des  $(-f_i + v_i)$ , donc après la première phase. C'est le même calcul mais sous une autre forme; les  $v_i$  et  $a_i$  des équations (2) sont devenus les  $v_i'$  et  $a_i'$ .

Il n'est même pas nécessaire d'effectuer le produit matriciel, car la concordance des résultats est manifeste.

$i = 1$	2	3	4	5	6	7
$+0,328$ $+a_1'$	$-0,047$	$-0,047$	$-0,094$	$+0,281$	$+0,281$	$+0,234$
$-0,047$ $+a_2'$	$0,328$	$-0,047$	$+0,281$	$-0,094$	$+0,281$	$+0,234$
$-0,047$ $+a_3'$	$-0,047$	$0,328$	$+0,281$	$+0,281$	$-0,094$	$+0,234$
$-0,094$ $+a_4'$	$+0,281$	$+0,281$	$+0,562$	$+0,1875$	$+0,1875$	$+0,468$
$+0,281$ $+a_5'$	$-0,094$	$+0,281$	$+0,1875$	$+0,562$	$+0,1875$	$+0,468$
$+0,281$ $+a_6'$	$+0,281$	$-0,094$	$+0,1875$	$+0,1875$	$+0,562$	$+0,468$
$+0,234$ $+a_7'$	$+0,234$	$+0,234$	$+0,468$	$+0,468$	$+0,468$	$+0,702$

Cet exemple semi-numérique est simple, car il n'y a qu'une équation de condition en seconde phase. La corrélation, telle qu'elle résulte de la première phase de la compensation, présente un intérêt transitoire; la matrice ci-dessus s'obtient directement grâce au système d'équations I. Dans la pratique le calculateur pourra choisir.

Après la première phase la valeur moyenne du quotient  $(m_i'^2 : m_i^2)$  était  $3,37 : 7 = 0,48$  au lieu de  $0,43 = 3,00 : 7$  par les moindres carrés; après la seconde phase ce quotient devient  $2 : 7 = 0,29$  si l'on compense par les moindres carrés puisque le nombre des inconnues fut ramené de trois à deux. Ce cas fut traité récemment dans la présente Revue (1959, N° 11, p. 397). C'est un contrôle bienvenu pour les calculs. En inversant ces quotients on obtient le module d'amplification des poids. Si entre les éléments soumis à compensation il y a de la corrélation, c'est-à-dire une dépendance stochastique, le problème est en général moins simple. Dans l'exemple numérique traité plus haut, relatif à des mesures linéaires, on a trouvé pour  $(m_i'^2 : m_i^2)$  les valeurs:

$$0,72 (q' = -0,1), 0,75 (q' = 0), 0,78 (q' = +0,1)$$

En outre il est intéressant de mettre en évidence, pour ces quotients, leur répartition selon le mode de calcul. Ainsi pour l'exemple traité en dernier lieu, première phase ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ), on a:

$$0,375 \leq (m_i'^2 : m_i^2) \leq 0,5 \quad (\text{moindres carrés})$$

$$0,328 \leq (m_i'^2 : m_i^2) \leq 0,702 \quad (\text{avec covariance})$$

on pourrait multiplier les exemples.

En résumé on peut dire que les praticiens éviteront autant que possible de compenser des mesures interdépendantes; le but de ces lignes était de développer encore quelques considérations au sujet de ce problème. Il a paru opportun aussi de formuler quelques remarques quant au fractionnement des calculs en deux phases et au degré de nouveauté de certaine solution.

#### *Littérature*

- [1] *C. F. Baeschlin*, Ausgleichungsrechnung und Landesvermessung (Zurich, auto-graphie).
- [2] *R. Marchant*, Compensation de mesures surabondantes (Bruxelles).
- [3] *A. Ansermet*, Extension du problème de l'ellipse d'erreur (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, N° 9, 1960).

## **Die Luftphotogrammetrie in der Grundbuchvermessung – praktische Erfahrungen in einer Voralpengemeinde**

*Von J. Iklé, Kulturingenieur ETH, Rapperswil*

Anlässlich der Grundbuchvermessung Wildhaus bot sich dem Verfasser als Inhaber eines Ingenieur- und Vermessungsbüros die willkommene Gelegenheit, sich mit der photogrammetrischen Grundbuchvermessung vertraut zu machen.

Obwohl in der ganzen Schweiz schon vielfach angewendet und erprobt, bringt diese moderne Vermessungsmethode doch in jedem Fall wieder genau zu studierende Probleme mit sich. Die diesbezüglichen guten oder weniger guten Erfahrungen der Übernehmer werden, meines Erachtens, zu wenig bekanntgemacht, so daß über Verfahren und Kosten noch beträchtliche Unsicherheiten bestehen.

Die photogrammetrische Grundbuchvermessung in der Gemeinde Wildhaus umfaßt drei Zonen des Maßstabgebietes 1 : 2000, wovon deren zwei durch den Verfasser, in Zusammenarbeit mit dem Photogrammeterbüro Locher und Berchtold, Glarus, gegenwärtig bearbeitet werden.

Der heutigen Beschreibung der Feldarbeiten des Jahres 1960 soll bei späterer Gelegenheit eine kritische Würdigung der Auswerte- und Verifikationsresultate folgen.

#### *Topographie, Klima, landwirtschaftliche Strukturverhältnisse*

Es handelt sich um einen Nord- und einen Südhang mittlerer Neigung von 20 respektive 28 %, mit zusammen etwas mehr als 500 ha Fläche. Die Höhenlage des Gebietes von 1000 bis 1400 m ü. M. und das ausgesprochen rauhe Klima bestimmen die Vegetation und den Wechsel der Jahreszeiten. Der Gesamt-Waldanteil dürfte ungefähr 30 % der Fläche betragen und besteht zur Hauptsache aus Fichten mit nur unbedeutenden Buchenbeständen.