

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 59 (1961)

**Heft:** 3

**Artikel:** Versuch zur Bestimmung von Lotabweichungsdifferenzen aus gegenseitigen Höhenwinkeln im schweizerischen Mittelland

**Autor:** Fischer, W.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-216892>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Versuch zur Bestimmung von Lotabweichungsdifferenzen aus gegenseitigen Höhenwinkeln im schweizerischen Mittelland

Von W. Fischer, Dipl.-Ing., Zürich

## 1. Einleitung

Der hier beschriebene Versuch, Lotabweichungsdifferenzen im schweizerischen Mittelland durch Messung gegenseitiger Höhenwinkel zu bestimmen, wurde bereits im Jahre 1954 durchgeführt. Infolge anderweitiger Tätigkeit des Bearbeiters konnte bisher nichts darüber berichtet werden. Die durchgeführten Arbeiten und besonders deren Resultate dürften aber auch heute noch von Interesse sein, weshalb sie nachträglich in dieser Zeitschrift kurz zusammengefaßt dargestellt werden sollen.

## 2. Problemstellung

Vorerst sollen in einfacher Weise die Überlegungen gezeigt werden, die zu dieser Untersuchung führten, ohne im einzelnen auf die Theorie einzutreten, die an andern Orten eingehend behandelt ist, zum Beispiel in [3]. Dazu betrachten wir die beiden Höhenwinkel  $\beta_{12}$  und  $\beta_{21}$ , die auf den zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  nach ihren Gegenpunkten gemessen werden. Bei beiden Messungen werde ein Punkt auf Instrumentenhöhe angezielt, so daß die Zielstrahlen identisch sind. Die Absolutbeträge der beiden Höhenwinkel sind bekanntlich nicht gleich; sie unterscheiden sich – abgesehen von den Beobachtungsfehlern – durch die Refraktionswinkel  $\delta_{12}$  und  $\delta_{21}$  sowie den Konvergenzwinkel  $\gamma'_{12}$  der Lotlinien in den beiden Punkten  $P_1$  und  $P_2$ . Dieser Konvergenzwinkel  $\gamma'_{12}$  tritt immer auf, nicht nur beim Vorhandensein von Lotabweichungen. Machen sich nämlich keine solchen bemerkbar, ist er gleich dem Konvergenzwinkel  $\gamma_{12}$  der beiden Ellipsoidnormalen. Es sei nur nebenbei erwähnt, daß dieser Winkel  $\gamma_{12}$  bei einer Entfernung der beiden Beobachtungspunkte von 2 km bereits die Größenordnung von 1 Bogenminute (sexagesimal) erreicht.

Auf Grund des gegebenen Erdellipsoids und der Lage der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  kann der Konvergenzwinkel  $\gamma_{12}$  mit der wünschbaren Genauigkeit berechnet werden. Ebenso lassen sich bei bekannten Refraktionsverhältnissen die Refraktionswinkel  $\delta_{12}$  und  $\delta_{21}$  ermitteln, die im allgemeinen einander gleichgesetzt werden. Mit diesen Elementen sowie den gemessenen Höhenwinkeln auf  $P_1$  und  $P_2$  ist es möglich, eine Abweichung der Konvergenz der effektiven Lotlinien von derjenigen der Ellipsoidnormalen zu bestimmen. Aus der Abb. 1 läßt sich die einfache geometrische Beziehung ableiten:

$$(\beta_{12} - \delta_{12}) + [(\beta_{21} - \delta_{21}) + \gamma'_{12}] = 0$$

Die Beträge der gemessenen Höhenwinkel  $\beta_{12}$  und  $\beta_{21}$  sind darin algebraisch zu addieren. Ferner findet man folgende Abhängigkeit zwischen  $\gamma'_{12}$  und dem Konvergenzwinkel  $\gamma_{12}$  der Ellipsoidnormalen:

$$\gamma'_{12} = \gamma_{12} + \Theta_{z1} - \Theta_{z2}$$

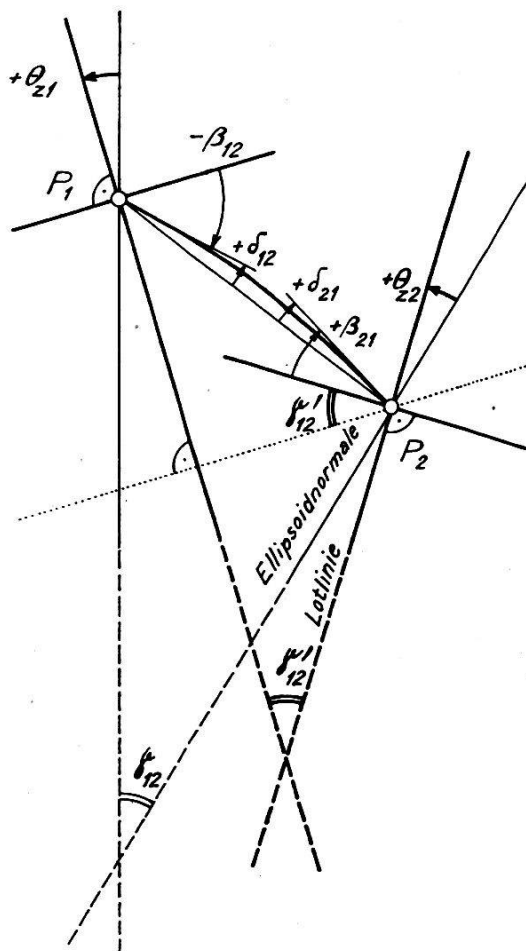


Abb. 1. Zur Ableitung der Lotabweichungsdifferenz  
( $\Theta_{z1} - \Theta_{z2}$ )

Die beiden Lotabweichungskomponenten  $\Theta_{z1}$  und  $\Theta_{z2}$  im Azimut  $z$  sind mit ihren entsprechenden Vorzeichen einzuführen. Durch Kombination der beiden Gleichungen erhält man die gesuchte Beziehung:

$$(\beta_{12} + \beta_{21}) - (\delta_{12} + \delta_{21}) + \gamma_{12} + (\Theta_{z1} - \Theta_{z2}) = 0$$

Die Differenz ( $\Theta_{z1} - \Theta_{z2}$ ) bezeichnet man als Lotabweichungsdifferenz der beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  im Azimut  $z$  ihrer Verbindungslinie.

Die aufgezeigte Beziehung liefert also eine Methode zur Bestimmung von Lotabweichungsdifferenzen, die vor allem im Hochgebirge schon verschiedentlich angewendet wurde. Als Beispiel sei das Profilstück im Meridian des St. Gotthard angeführt, wo die Schweizerische Geodätische Kommission im Jahre 1950 gegenseitige Höhenwinkel beobachten ließ [4]. Aus diesen konnten die Lotabweichungsdifferenzen benach-

barter Profilkpunkte mit einem mittleren Fehler von rund  $\pm 1''$  bestimmt werden.

Das günstige Resultat im Meridianprofil des St. Gotthard gab den Anstoß zu einem weiteren Versuch, bei dem die Methode der gegenseitigen Höhenwinkel erstmals im schweizerischen Mittelland angewendet werden sollte. Diese Untersuchung stand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. F. Kobold, der mir als Assistenten am Geodätischen Institut der ETH die Ausführung der Arbeiten übertrug. Als weitere Mitarbeiter standen die Herren Dipl.-Ing. J. Fischer, J. Holsen und H. Bänninger abwechselungsweise zur Verfügung. Der Versuch sollte zeigen, ob die genannte Methode auch im Flach- und Hügelland brauchbare Resultate liefere. In diesem Falle würde es möglich sein, die Punkte mit bekannter Lotabweichung auch in diesen Gebieten auf einfache Weise zu verdichten und damit lokale Abweichungen der Lotrichtung zu erfassen.

### 3. Vorbereitung

#### 3.1 Fehlerrechnung *a priori*

Die veränderten Verhältnisse gegenüber denjenigen im Hochgebirge erforderten vorerst eine gründliche Abklärung der günstigsten Meßanordnung. Während im Hochgebirge meist Visuren möglich sind, die das Gelände in großer Höhe überbrücken, treten im Mittelland viel häufiger solche auf, die im Bereich bodennaher Luftschichten verlaufen. Dementsprechend weist die Refraktion im Gebirge die bei früheren Untersuchungen als erstaunlich stabil gefundenen Werte auf, wogegen sie im zweiten Fall schwerer zu erfassen ist. Außerdem ist der Umstand zu beachten, daß infolge der geringeren Höhe der Massenerhebungen die Beträge der Lotabweichungen im Mittelland kleiner sind als im Gebirge.

Auf Grund dieser Tatsachen muß einerseits darnach getrachtet werden, den Einfluß der Refraktionsunsicherheit nach Möglichkeit zu reduzieren. Andererseits muß der Betrag der Beobachtungsfehler möglichst klein gehalten werden. Für die folgende Fehlerüberlegung gehen wir von der Annahme aus, ein geradliniges Profilstück zwischen zwei Punkten *A* und *B* mit bekannter Lotabweichung werde in *n* Teilstrecken unterteilt. Für eine beliebige Teilstrecke gilt folgende Beziehung:

$$(\beta_{ik} + \beta_{ki}) - (\delta_{ik} + \delta_{ki}) + \gamma_{ik} + (\Theta_{zi} - \Theta_{zk}) = 0$$

Gesucht ist der mittlere Fehler an der Lotabweichungsdifferenz  $(\Theta_{zi} - \Theta_{zk})$ , wenn ein gemessener Höhenwinkel mit dem mittleren Fehler  $m_\beta$  und der eingeführte Refraktionskoeffizient mit dem mittleren Fehler  $m_\kappa$  behaftet ist. Der Konvergenzwinkel  $\gamma_{ik}$  kann als fehlerfrei vorausgesetzt werden. Vorerst müssen die Refraktionswinkel als Funktion von  $\kappa$  ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}(\delta_{ik} + \delta_{ki}) &= 2\delta_{ik} = \gamma_{ik} \cdot \kappa \\(\Theta_{zi} - \Theta_{zk}) &= -(\beta_{ik} + \beta_{ki}) - \gamma_{ik}(1 - \kappa) \\m^2(\Theta_{zi} - \Theta_{zk}) &= 2m^2\beta + \gamma^2_{ik} \cdot m^2\kappa\end{aligned}$$

Bei dieser Herleitung ist berücksichtigt, daß sich ein Fehler an  $\kappa$  auf die beiden Refraktionswinkel  $\delta_{ik}$  und  $\delta_{ki}$  einer Teilstrecke gleich auswirkt. Betrachtet man hingegen alle  $n$  Teilstrecken eines Profilstückes, deren örtliche Verhältnisse sehr unterschiedlich sind, kann man mit einer gewissen Berechtigung annehmen, daß sich die Abweichungen der einzelnen Refraktionskoeffizienten vom eingeführten Mittelwert  $\kappa$  wie zufällige Fehler verhalten. Somit ist für die gesamte Lotabweichungsdifferenz ( $\Theta_{zA} - \Theta_{zB}$ ) folgender mittlerer Fehler zu erwarten:

$$m^2(\Theta_{zA} - \Theta_{zB}) = 2n \cdot m^2\beta + n \cdot \gamma^2 \cdot m^2\kappa.$$

Der Konvergenzwinkel  $\gamma$  ist noch auf den Konvergenzwinkel  $\Gamma_{AB}$  der ganzen Strecke zwischen A und B zu beziehen mit

$$\gamma = \frac{\Gamma_{AB}}{n},$$

so daß der Fehlerausdruck schließlich lautet:

$$m^2(\Theta_{zA} - \Theta_{zB}) = 2n \cdot m^2\beta + \frac{\Gamma_{AB}^2}{n} \cdot m^2\kappa.$$

Der Ausdruck zeigt, daß im Hinblick auf  $m\beta$  die Anzahl der Teilstrecken möglichst klein, im Hinblick auf  $m\kappa$  hingegen möglichst groß gewählt werden sollte. Das Problem besteht also darin, einen Kompromiß zu finden, der beiden Fehlereinflüssen Rechnung trägt. Die Lösung kann mathematisch gefunden werden, indem durch Variation von  $n$  der Ausdruck für  $m^2(\Theta_{zA} - \Theta_{zB})$  zu einem Minimum gemacht wird:

$$\frac{\partial}{\partial n} m^2(\Theta_{zA} - \Theta_{zB}) = 0 = 2m^2\beta - \frac{\Gamma_{AB}^2}{n^2} \cdot m^2\kappa$$

$$n = \frac{\Gamma_{AB} \cdot m\kappa}{\sqrt{2} \cdot m\beta}.$$

Der Berechnung von  $n$  sollen folgende Annahmen zugrunde gelegt werden:

1. Bei einer angenommenen Distanz  $\overline{AB}$  von 3 km wird  $\Gamma_{AB}$  rund 100".

2. Aus den Höhenwinkelmessungen 1950 im Meridian des St. Gotthard resultierte ein mittlerer Fehler an  $\kappa$  von  $\pm 0,0028$  [4]. Für den vorliegenden Fall soll mit dem zehnfachen Betrag, also  $m\kappa = \pm 0,028$ , gerechnet werden.

3. Auch für den mittleren Fehler am Höhenwinkel soll auf die Erfahrungen bei den Höhenwinkelmessungen 1950 abgestellt werden, wo für eine Messung der Durchschnittswert  $m = \pm 1",4$  und für die fünfzehnfache Wiederholung  $m_M = \pm 0",35$  erreicht wurde. Ein mittlerer Fehler  $m\beta = \pm 0",3$  dürfte also unter günstigen Umständen erreicht werden können.

Unter diesen Voraussetzungen wird  $n = 7$  und die durchschnittliche Länge einer Teilstrecke rund 430 m. Der mittlere Fehler a priori

der gesamten Lotabweichungsdifferenz ( $\Theta_{zA} - \Theta_{zB}$ ) erreicht damit den Betrag  $\pm 1'',6$ .

### 3.2 Festlegung der Beobachtungspunkte

Für die Durchführung des Versuchs war es angezeigt, Punkte mit bereits bekannter Lotabweichung als Ausgangspunkte zu verwenden. Solche standen im Geoidprofil im Meridian des St. Gotthard zur Verfügung, das sich zum Teil auch über das schweizerische Mittelland erstreckt. Unter Berücksichtigung der Topographie, der Bodenbedeckung sowie auch der Zugänglichkeit wurde ein Abschnitt in der Gegend des Zürichsees ausgewählt, der in Toggwil (Punkt 17 des astronomischen Nivellements) beginnt und auf dem Gottschalkenberg (Punkt 22) endet [2]. Dieses Profilstück enthält im gegenseitigen Abstand von rund 3 km sechs Punkte mit astronomisch bestimmter  $\xi$ -Komponente und aus Massen gerechneter  $\eta$ -Komponente der Lotabweichung sowie zwei auf Grund der Massenverteilung interpolierte Punkte (Tabelle 1).

Tabelle 1: Ausgangspunkte

Nr.	Punkt	Höhe m	$\xi$
17	Toggwil . . . . .	701	— 6'',44
18	Meilen . . . . .	536	— 6 ,99
18 a	(interpoliert) . . . . .		— 5 ,5
19	Au . . . . .	468	+ 0 ,65
20	Hochwacht . . . . .	654	+ 3 ,10
21	Hütten . . . . .	768	+ 6 ,24
21 a	(interpoliert) . . . . .		+10 ,4
22	Gottschalkenberg . . . . .	1164	+ 9 ,23

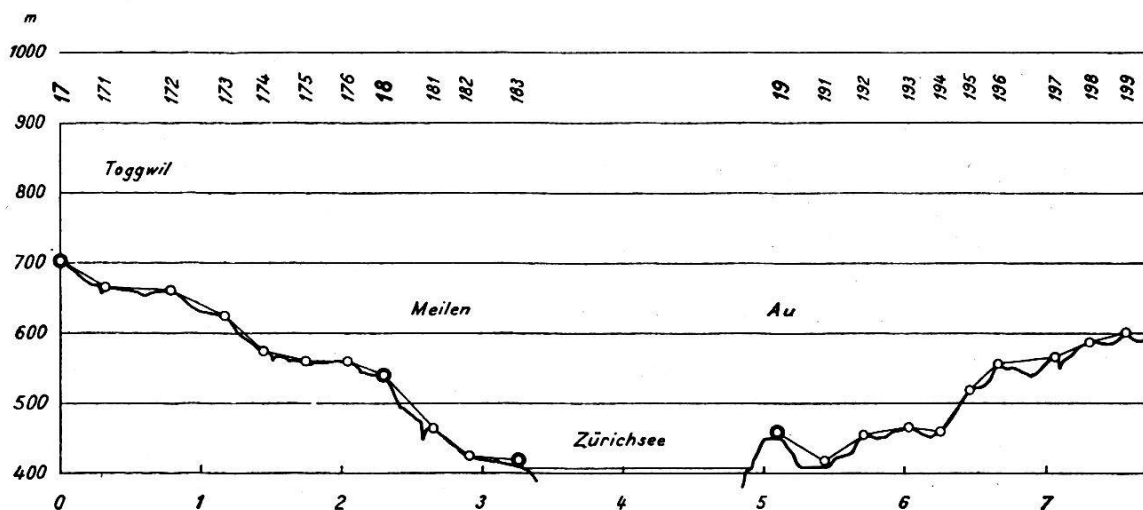


Abb. 2. Höhenpolygon im Meridianprofil

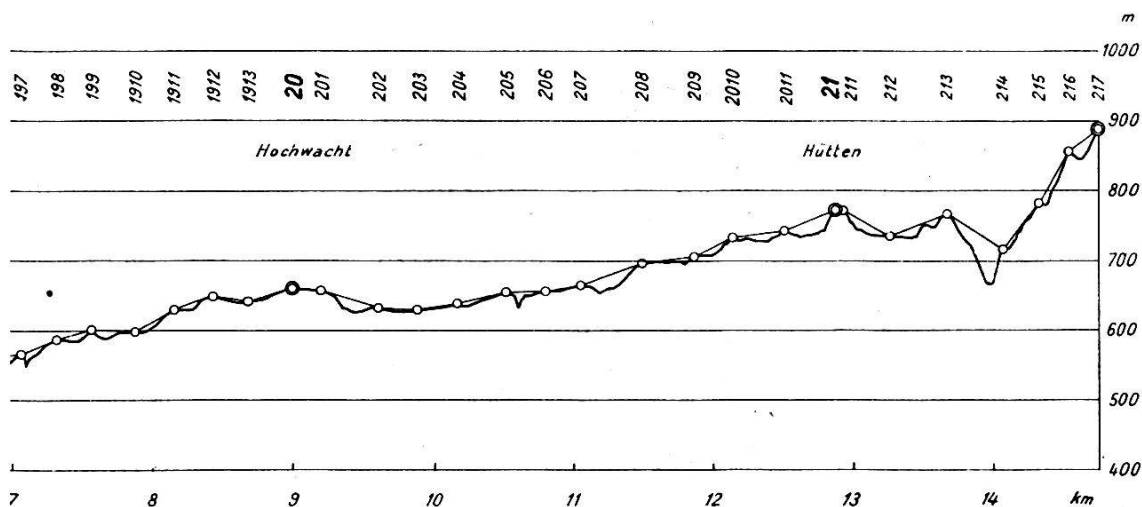
Die Aufgabe bestand vorerst darin, die gegebenen Punkte durch möglichst geradlinige Profilstücke miteinander zu verbinden, wobei die einzelnen Zwischenpunkte einen gegenseitigen Abstand von 300 bis 500 m einhalten sollten. Bei der Rekognoszierung im Feld sollte besonders darauf geachtet werden, daß bodennahe Visuren nach Möglichkeit vermieden wurden. Dieser Forderung konnte weitgehend entsprochen werden, indem die Beobachtungspunkte auf Geländekanten und Moränenhügel gelegt wurden. Das Resultat der Rekognoszierung ist im Längenprofil (Abb. 2) festgehalten. Die Beobachtungspunkte wurden im Feld durch starke Holzpfähle oder allenfalls vorhandene Marksteine bezeichnet und deren Lage von Polygonpunkten der Grundbuchvermessung aus eingemessen. Damit war es auf einfache Art möglich, die Distanzen und Azimute der Teilstrecken mit der notwendigen Genauigkeit zu bestimmen.

### 3.3 Instrumentarium

Die Höhenwinkelmessungen stellten an das Instrumentarium sehr hohe Anforderungen, sollte doch jeder Winkel mit einem mittleren Fehler von  $\pm 0",3$  bestimmt werden.

#### 3.3.1 Theodolit

Von den zur Verfügung stehenden Instrumenten kam für diese Aufgabe in erster Linie der astronomische Theodolit DKM3-A der Firma Kern, Aarau, in Betracht, weil er neben andern günstigen Eigenschaften die Möglichkeit aufweist, den Höhenkreis ähnlich wie den Horizontalkreis zu verdrehen. Durch Wiederholung der Höhenwinkelmessungen bei verschiedenen Kreisstellungen können somit Kreisteilungsfehler weitgehend eliminiert werden, was bei einem üblichen Theodolit mit festem Höhenkreis nicht möglich ist. Der Höhenkreis weist wie der Horizontalkreis einen Durchmesser von 100 mm auf. Er ist doppelt geteilt, wobei das Intervall beider Teilungen  $10'$  beträgt. Bei der Ablesung werden mittels



des St. Gotthard über die Zwischenpunkte

eines optischen Mikrometers die Teilstriche der einen Teilung genau zwischen die Doppelstriche der andern Teilung gebracht, worauf die Zehntelsekunde am Mikrometerkreis mit dem Teilungsintervall  $0'',5$  geschätzt werden kann. Die Kollimationslibelle ist als Koinzidenzlibelle ausgebildet; ihre Angabe beträgt  $10''$  auf 2 mm. Schließlich sei erwähnt, daß das benützte Instrument ein Prototyp des heute gebauten DKM3-A war. Die technischen Daten stimmen weitgehend mit denjenigen des

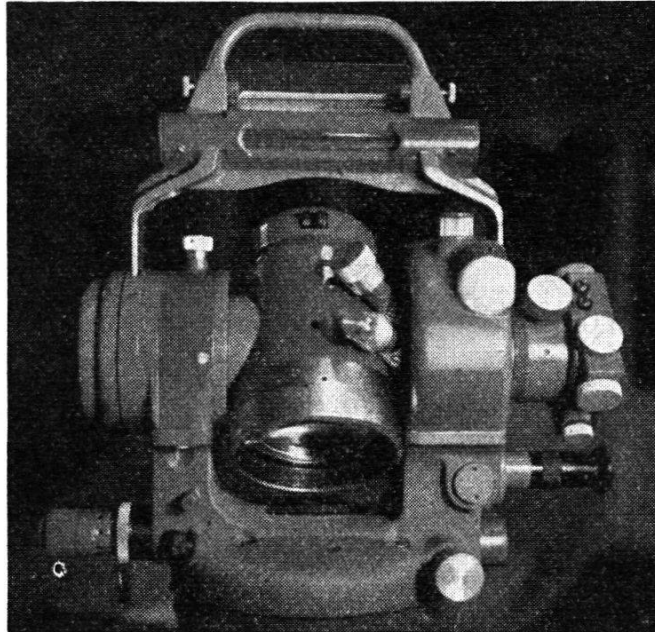


Abb. 3. DKM3-A mit verstellbarem Höhenkreis

jetzigen Serienmodells überein (Abb. 3). Hingegen wies die Strichplatte des Spiegellinsenfernrohrs eine erwähnenswerte Abweichung von der Normalausführung auf, indem sie mit zwei parallelen Horizontalstrichen im Abstand von etwa  $36''$  versehen war. Dadurch war es möglich, in jeder Fernrohrlage zwei unabhängige Zielungen vorzunehmen.

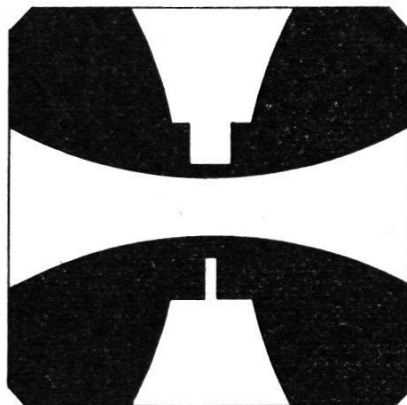


Abb. 4. Zielmarke,  $\frac{1}{2}$  der natürlichen Größe

### 3.3.2 Zielmarken

Die Genauigkeit der Höhenwinkelmessung hängt neben dem Instrument wesentlich von der Beschaffenheit des Zielobjekts ab. Aus diesem Grund wurden zwei spezielle Zieltafeln geschaffen, die einen weißen Horizontalbalken auf schwarzem Grund tragen (Abb. 4). Die Breite dieses Balkens wurde so gewählt, daß bei den vorgesehenen Zieldistanzen der Horizontalstrich ohne große Mühe auf die Mitte eingestellt werden kann. Für die Halterung der Zieltafeln dienten zwei Rahmen der normalen Polygonausrüstung von Kern.

### 3.3.3 Stative

Die stabile Aufstellung von Theodolit und Zielmarken erforderte drei starke Stative, die zudem möglichst hoch sein sollten. Jedes der verwendeten Stative ist mit einem Lotstab sowie mit einer Zwangszentrierungsvorrichtung versehen. Die Lotstäbe tragen eine 2-mm-Teilung, auf der die Höhe des Instruments über dem Bodenpunkt unmittelbar abgelesen werden kann.

## 3.4 Instrumentenprüfung

Zur Beurteilung der erreichbaren Meßgenauigkeit und der Anordnung der Messungen wurde im Geodätischen Institut eine eingehende Instrumentenuntersuchung durchgeführt.

### 3.4.1 Theodolit

Auf Grund einiger Beobachtungsreihen im Institut konnte die innere Meßgenauigkeit des DKM3-A bestimmt werden. Es wurden folgende mittlere Fehler gefunden:

1. für eine Ablesung am Höhenkreis  $\pm 0'',25$ ;
2. für eine Zielung nach einem Kollimator  $\pm 0'',25$ ;
3. für eine Koinzidenzeinstellung der Kollimationslibelle  $\pm 0'',6$ ;
4. für eine Höhenwinkelmessung in einer Fernrohrlage  $\pm 0'',7$ ;
5. für eine Höhenwinkelmessung in beiden Fernrohrlagen  $\pm 0'',5$ .

Diese erstaunlich guten Resultate konnten wohl wertvolle Anhaltspunkte geben, durften jedoch nicht unmittelbar auf Feldmessungen übertragen werden. So ist zu beachten, daß die Kreisablesungen dank der elektrischen Kreisbeleuchtung unter stets günstigen Bedingungen erfolgten. Vor allem aber muß festgehalten werden, daß eine Zielung nach einem Kollimator sicherer und konstanter ist als eine solche im Feld, deren Genauigkeit stark von der Beschaffenheit des anvisierten Signals und den atmosphärischen Verhältnissen abhängt. Auch für die Einstellung der Kollimationslibelle dürften im Feld weniger günstige Bedingungen herrschen als im Institut, wo das Instrument auf einem stabilen Pfeiler und in einem Raum mit annähernd konstanter Temperatur steht.

Um die Verhältnisse im Feld besser beurteilen zu können, wurde bei verschiedenen Beobachtungsverhältnissen der Höhenwinkel nach drei in Entfernungen zwischen 300 und 500 m stehenden Zielmarken gemessen.

Die Serien von 6 bis 12 Beobachtungen pro Höhenwinkel, die sich jeweils über eine knappe Stunde erstreckten, ergaben folgende Werte für den mittleren Fehler einer vollständigen Höhenwinkelmessung:  $\pm 0'',80$ ,  $\pm 0'',65$ ,  $\pm 0'',57$ . Die Beobachtungsfehler im Freien liegen also alle über dem im Institut gefundenen Wert  $\pm 0'',5$  jedoch unter einer Sexagesimalsekunde. Mit einer achtfachen Wiederholung der Messungen würde es somit möglich sein, den gewünschten mittleren Fehler von  $\pm 0'',3$  am Mittel eines Höhenwinkels zu erreichen.

Durch die Verstellung des Höhenkreises während einer Beobachtungsserie können Teilungsfehler größtenteils eliminiert werden. Gleichwohl sollte vor Inangriffnahme der Arbeiten das Ausmaß dieser Fehler bekannt sein. Dank der Verstellvorrichtung war es möglich, eine Teilkreisprüfung nach *Heuvelink* durchzuführen, wie sie üblicherweise bei Horizontalkreisen Anwendung findet. An Stelle eines Horizontalwinkels wurde ein vertikaler Winkel von  $36^\circ$  bei verschiedenen Kreisständen gemessen, der durch die Zielachsen zweier auf unendlich fokussierter Theodolitfernrohre gebildet wurde. Die Messungen waren in 12 Serien von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  angeordnet, die je 6 Kreisstände von  $60^\circ$  zu  $60^\circ$  umfaßten. Infolge der Doppelteilung des Kreises mußte die Untersuchung über den ganzen Kreisumfang durchgeführt werden; außerdem durfte die Winkelmessung nur in einer Fernrohrlage erfolgen. Der mit Teilungsfehlern behaftete mittlere Fehler an einem einmal gemessenen vertikalen Winkel von  $36^\circ$  beträgt  $\pm 0'',80$ , der aus den Wiederholungen beim gleichen Kreisstand hergeleitete und somit von Teilungsfehlern freie Beobachtungsfehler  $\pm 0'',65$ . Aus diesen beiden Werten kann ein mittlerer Teilungsfehler von  $\pm 0'',45$  abgeleitet werden. Ein periodischer Verlauf dieser Fehler ist nicht ersichtlich, vielmehr scheinen sie sich zufällig über den Kreisumfang zu verteilen. Nachdem auch ihre Größenordnung unter derjenigen der Beobachtungsfehler bleibt, fallen sie für die Messungen nicht in Betracht.

#### 3.4.2 Zielmarken

Zur Vermeidung zusätzlicher Korrekturen sollte die Mitte des Horizontalbalkens der Zieltafeln gleich hoch über der Stativplatte stehen wie die Horizontalachse des Theodolits. Durch entsprechende Prüfungen mußte festgestellt werden, ob diese Bedingung während der ganzen Meßperiode erfüllt war. Bei allen Messungen mußte darauf geachtet werden, daß eine bezeichnete Fußschraube von Theodolit und Zielmarken immer dieselbe Stellung innehatte. Es zeigte sich, daß die Zielmarke 1 um den konstanten Betrag 0,9 mm zu klein und die Zielmarke 2 um 0,4 mm zu klein war. Auf eine durchschnittliche Distanz von 300 m hat dies eine systematische Verfälschung des gemessenen Höhenwinkels von  $-0'',6$  und  $-0'',3$  zur Folge, die zu berücksichtigen ist.

#### 3.4.3 Stative

Bei den Stativen mußte neben ihrer Stabilität hauptsächlich die Angabe der Lotstäbe geprüft werden. Zwei Lotstäbe stimmten innerhalb

des festgestellten Ablese- beziehungsweise Schätzfehlers von  $\pm 0,2$  mm miteinander überein. Der Lotstab von Stativ II zeigte gegenüber diesen beiden 0,6 mm zu wenig an.

#### 4. Durchführung

Ursprünglich war vorgesehen, das ganze Höhenprofil vom Punkt 17 (Toggwil) bis zum Punkt 22 (Gottschalkenberg) des astronomischen Nivellements zu messen. Aus praktischen Erwägungen mußten jedoch zwei Teilstrecken fallengelassen werden. Die rund 2 km lange Teilstrecke 183–19 über den Zürichsee bot insofern Schwierigkeiten, als die Sichtverhältnisse während der Beobachtungsperiode meist durch Nebel oder Dunst beeinträchtigt waren. Zudem hätte diese lange Visur die Beschaffung spezieller Zieltafeln erfordert. Die Messung der letzten Teilstrecke 217–22 bis auf die Höhe des Gottschalkenbergs (1164 m) hätte einen zu großen Zeitaufwand mit sich gebracht, so daß ebenfalls darauf verzichtet wurde. Die beiden Endpunkte 183 und 217 fallen ziemlich genau mit den beiden interpolierten Punkten 18a und 21a des astronomischen Nivellements zusammen, so daß auch dort Vergleichswerte für die Lotabweichung vorhanden sind.

Jeder Höhenwinkel wurde im allgemeinen nur an einem Tag gemessen. Interessehalber wurden die Messungen auf den Teilstrecken 214–215 und 215–216 an einem zweiten Tag bei veränderten Wetterverhältnissen wiederholt. Die dabei gefundenen Abweichungen gegenüber den ersten Messungen gaben Anlaß zur Wiederholung der Messungen auf dem ganzen Profilstück zwischen den Punkten 19 und 20. Einzelne Teilstrecken wurden dabei durch einen Zwischenpunkt unterteilt.

Die Messung der insgesamt 134 Höhenwinkel benötigte 21 Beobachtungstage, so daß auf einen Beobachtungstag im Durchschnitt etwas mehr als 6 Höhenwinkel entfielen. Auf die Anordnung im Gotthard, wo während eines ganzen Tages immer ein und derselbe Höhenwinkel gemessen wurde, verzichteten wir diesmal im Hinblick auf den dadurch entstehenden großen Zeitaufwand. Aus praktischen Gründen versuchten wir hingegen, die Hin- und Rückmessung auf jeder Teilstrecke wenn möglich am selben Tag vorzunehmen. Damit konnten die Stative jeweils stehen gelassen werden, so daß nur Instrument und Zielmarken ausgetauscht werden mußten. Während einer Zeitdauer von 30 bis 50 Minuten wurde im allgemeinen eine Serie von 8 Wiederholungen gemessen. Der Sekretär berechnete stets unmittelbar nach Beendigung einer solchen Serie den mittleren Fehler am Mittel. Bei Höhenwinkeln, deren mittlerer Fehler den Wert  $\pm 0",3$  überschritt, ergänzten wir die Serie durch einige weitere Wiederholungen. Bei Beginn jeder Beobachtungsserie wurde der Höhenkreis so orientiert, daß er bei Zielung in der ersten Fernrohrlage rund  $0^\circ$  zeigte. Die zwei Messungen bei dieser Kreisstellung erfolgten unter Benützung der zwei verschiedenen Horizontalstriche und waren somit in bezug auf die Zielung praktisch unabhängig. Nach je zwei Wiederholungen wurde der Höhenkreis jeweils um  $30^\circ$  verdreht. Für jeden Höhen-

winkel wurde die Instrumenten- und Signalhöhe auf 0,1 mm genau erhoben, um die Messungen bei veränderter Aufstellung aufeinander beziehen zu können.

Versuchsweise bestimmten wir auf einem Teil des Profils die Lufttemperatur auf Instrumentenhöhe mittels eines Schleuderthermometers. Auf allen Punkten wurden zudem möglichst ausführliche Angaben über die Wetter- und Beobachtungsverhältnisse ins Feldbuch eingetragen.

## 5. Auswertung

### 5.1 Hilfsrechnungen

Nach Abschluß der Feldarbeiten stellte sich vorerst die Aufgabe, die Koordinaten der Stationspunkte zu berechnen. Aus diesen konnten hierauf die Distanzen der Teilstrecken ermittelt werden, welche die Grundlagen für die weitere Auswertung bildeten.

### 5.2 Fehleruntersuchung

Die Meßwerte der einzelnen Beobachtungsserien wurden für die weitere Verwendung tabellarisch zusammengestellt, wobei gleichzeitig die Mittelbildung und die Fehlerrechnung kontrolliert wurden. Die Fehlerrechnung erfuhr zudem eine wertvolle Ergänzung, indem der Winkel zwischen den beiden Horizontalstrichen beigezogen wurde. Die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Beobachtungen in ein und derselben Fernrohrlage liefert einen Wert  $\Delta$  dieses Winkels. Dieser ist mit dem doppelten mittleren Fehler behaftet als ein Höhenwinkel, der als halbe Differenz zweier Beobachtungen gebildet wird. Durch Vergleich der beiden Fehlerberechnungen sollten Schlüsse über die Beobachtungsverhältnisse möglich sein.

Die Auswertung umfaßte sodann eine Untersuchung der Beobachtungsfehler mit dem Zweck, das Auftreten systematischer Einflüsse auf die Meßreihen feststellen zu können. Diese Untersuchung soll an anderer Stelle eingehender beschrieben werden, als es im Rahmen des vorliegenden Berichtes möglich ist.

### 5.3 Berechnung der Lotabweichungsdifferenzen

Nach der fehlertheoretischen Bearbeitung des Beobachtungsmaterials konnten die Lotabweichungsdifferenzen berechnet werden, was schrittweise in einer Tabelle geschah.

Vorerst wurden unter Berücksichtigung der festgestellten Abweichungen der Stativ- und Zielmarkenhöhen aus den abgelesenen Instrumenten- und Signalhöhen  $I$  und  $S$  die effektiven Höhen  $I'$  und  $S'$  abgeleitet:

$$I' = I + \Delta_{\text{Stativ}}$$

$$S' = S + \Delta_{\text{Stativ}} + \Delta_{\text{Zielmarke}}$$

Aus diesen korrigierten Höhen über dem Bodenpunkt bildete man dann die Differenz ( $I' - S'$ ), mit der jeder Höhenwinkel auf Grund der Beziehung

$$\Delta\beta'' = (I' - S') \frac{\rho''}{D} \cdot \cos^2 \beta$$

auf die Höhe der Bodenpunkte reduziert werden konnte. Für die Distanz  $D$  zweier Punkte wurde der aus den Projektionskoordinaten abgeleitete Wert eingesetzt. Der Fehler infolge Projektions- und Höhenverzerrung blieb unter  $0,1\text{‰}$  und damit unter den Bestimmungsfehlern.

Im nächsten Schritt wurden sämtliche Höhenwinkel um den Refraktionswinkel  $\delta$  reduziert. Zu dessen Berechnung nach der Formel

$$\delta'' = \frac{\kappa \cdot \rho''}{2R} \cdot \frac{D}{\cos \beta}$$

wurde der mittlere Refraktionskoeffizient  $\kappa = 0,13$  verwendet.

Die Summe  $\Sigma$  der so reduzierten Höhenwinkel jeder Hin- und Rückmessung gab den negativen Betrag der Lotlinienkonvergenz zweier aufeinanderfolgender Punkte. Dazu kam schließlich der Konvergenzwinkel  $\gamma$  der Ellipsoidnormalen, der sich nach der einfachen Beziehung

$$\gamma'' = \frac{\rho''}{R} \cdot D$$

aus der bekannten Distanz  $D$  und dem entsprechenden Ellipsoidkrümmungsradius  $R$  ableiten ließ. Damit ergab sich für jede Teilstrecke ein Wert

$$\Delta\Theta_z = \Sigma + \gamma$$

für die Lotabweichungsdifferenz im Azimut der betreffenden Strecke. Bei der Wahl der Zwischenpunkte wurde darauf geachtet, daß diese möglichst nahe der Verbindungsgeraden zweier Profilpunkte zu liegen kamen. Infolgedessen konnte die Reduktion der Lotabweichungsdifferenzen  $\Delta\Theta_z$  der einzelnen Teilstrecken auf das jeweilige Profilstück unterbleiben, nachdem ihr Betrag höchstens 2% erreichte.

Abschließend stellte sich noch die Aufgabe, die  $\Delta\Theta_z$  der Teilstrecken für jedes Profilstück zusammenzustellen und deren Summe mit der Lotabweichungsdifferenz der gegebenen Punkte in der Richtung ihrer Verbindungslinie zu vergleichen. Die Profilpunkte wurden seinerzeit ebenfalls sehr gut in einen Meridian gelegt, so daß für die Komponente der Lotabweichungsdifferenz ( $\Theta_{zA} - \Theta_{zB}$ ) mit guter Näherung die Differenz der Meridiankomponenten ( $\xi_A - \xi_B$ ) gesetzt werden konnte.

## 6. Resultate

### 6.1 Beobachtungsgenauigkeit

Jede der 134 Beobachtungsserien liefert einen Wert  $m$  für den mittleren Fehler eines einmal in beiden Fernrohrlagen beobachteten Höhen-

winkels. Zu dessen Berechnung stehen aber durchschnittlich nur 7,5 überschüssige Beobachtungen zur Verfügung, so daß einem einzelnen Wert keine allzugroße Zuverlässigkeit beigemessen werden kann. Der mittlere Fehler variiert denn auch zwischen den weiten Grenzen  $m = \pm 0'',23$  und  $m = \pm 2'',13$ .

Betrachtet man alle Serien gemeinsam, so stehen den 134 notwendigen 1002 überschüssige Beobachtungen gegenüber. Mit diesen erhält man für den mittleren Fehler am einmal in beiden Fernrohrlagen gemessenen Höhenwinkel den zuverlässigeren Durchschnittswert  $m = \pm 0'',76$ . Dieser liegt etwas über dem Wert von  $\pm 0'',5$ , der aus der Instrumentenuntersuchung im Institut hervorging. Der Unterschied dürfte auf die äußeren Umstände zurückzuführen sein. Bei durchschnittlich 8,5 Beobachtungen eines Höhenwinkels resultiert damit für das Mittel eines Winkels der mittlere Fehler  $m_M = \pm 0'',27$ .

Die analoge Fehlerrechnung auf Grund der aus den beiden Beobachtungen in ein und derselben Fernrohrlage gebildeten Differenzwinkel  $\Delta$  liefert für jeden der 134 Höhenwinkel einen Wert  $m'$  für den mittleren Fehler am einmal in beiden Fernrohrlagen beobachteten Höhenwinkel. Dieser Wert schwankt zwischen den Grenzen  $m' = \pm 0'',17$  und  $m' = \pm 1'',68$ . Für die gesamthaft betrachteten 1136 Höhenwinkelbeobachtungen, denen ebenso viele Differenzwinkel  $\Delta$  entsprechen, wird der mittlere Fehler einer vollständigen Messung durchschnittlich  $m' = \pm 0'',60$ . Die Übereinstimmung der Meßwerte einer Beobachtungsreihe ist bei dieser Fehlerherleitung etwas besser, was wohl hauptsächlich auf die kürzere zeitliche Aufeinanderfolge zweier Beobachtungen in der gleichen Fernrohrlage zurückzuführen ist.

Auf die eingehende Fehleruntersuchung kann in diesem Rahmen, wie bereits im Abschnitt 5.2 erwähnt wurde, nicht eingetreten werden. Sie soll in einem besonderen Bericht im einzelnen beschrieben werden; ihr Resultat läßt sich jedoch wie folgt zusammenfassen:

Die Streuung der mittleren Fehler  $m$  und  $m'$  um ihre Durchschnittswerte ist, wie sofort auffallen muß, außerordentlich groß. Eine gewisse Streuung der Einzelwerte ist natürlich infolge der Beobachtungsfehler zu erwarten. Sie ist aber hier so groß, daß sie nur zum Teil durch die kleine Zahl überschüssiger Beobachtungen erklärt werden kann. Zum andern Teil ist sie auf tatsächliche Unterschiede in der Beobachtungsgenauigkeit der verschiedenen Meßreihen zurückzuführen.

Die 134 Beobachtungsreihen können praktisch in zwei Gruppen unterteilt werden, eine große von 114 Serien mit einem durchschnittlichen mittleren Fehler  $m = \pm 0'',62$  und eine kleine von 20 Serien mit einem mittleren Fehler  $m = \pm 1'',27$  an einer Höhenwinkelbeobachtung in beiden Fernrohrlagen. Die erste Gruppe umfaßt 922 Beobachtungen oder 8,1 Beobachtungen pro Höhenwinkel, die zweite 214 Beobachtungen oder 10,7 Beobachtungen pro Höhenwinkel.

Diese Zusammenfassung in zwei Gruppen zeigt, daß bei einer Beobachtungsreihe von 8 Messungen, die selten mehr als 40 Minuten benötigte, die Übereinstimmung der einzelnen Meßwerte sehr gut ist, das

heißt praktisch so gut wie bei den Versuchen im Institut. Demgegenüber weisen die längeren Meßreihen rund den doppelten mittleren Fehler auf. Bekanntlich passen Höhenwinkelmessungen über einen kurzen Zeitabschnitt im allgemeinen gut zusammen, während sie bei längerer Dauer infolge der täglichen Variation der Refraktion größere Abweichungen aufweisen. Auf Grund der festgestellten Unterschiede der Beobachtungsfehler kann jedoch noch nicht auf eine Refraktionsänderung geschlossen werden. Es ist nämlich zu beachten, daß nur dann längere Reihen gemessen wurden, wenn die ersten 8 Beobachtungen zu einem größeren mittleren Fehler führten als normal. Tatsächlich ergaben auch die ersten 8 Meßwerte der 20 ausgeschiedenen Beobachtungsreihen einen ebenso großen mittleren Fehler wie die ganze Reihe, nämlich  $m = \pm 1'',29$ . Die Verdoppelung des Beobachtungsfehlers muß somit ganz den äußeren Gegebenheiten der entsprechenden Visuren zur Last gelegt werden. Diese sind gemäß den Feldbucheintragungen meist durch folgende Tatsachen gekennzeichnet: bodennahe Visur, sonnig, Luftzittern usw.

Schließlich seien noch die durch die Aufteilung in zwei Gruppen entstehenden mittleren Fehler  $m'$  aus den Differenzen zweier aufeinanderfolgender Beobachtungen in einer Fernrohrlage erwähnt. Für die Gruppe der 114 Serien erhält man im Durchschnitt  $m' = \pm 0'',53$ , für diejenige der 20 übrigen Serien  $m' = \pm 0'',86$ . Auch bei dieser Berechnungsart des mittleren Fehlers macht sich eine Vergrößerung desselben bemerkbar. Wegen der raschen Folge der Messungen in einer Fernrohrlage ist sie jedoch weniger stark als bei den  $m$ .

## 6.2 Lotabweichungsdifferenzen

Die nach den im Abschnitt 5.3 angegebenen Formeln berechneten Lotabweichungsdifferenzen  $\Delta\theta_z$  jeder Teilstrecke sind in der Tabelle 2 zusammengestellt. Zur Vermeidung von Rundungsfehlern sind alle Werte auf  $1/100''$  gerechnet und angegeben. Die Tabelle 2 enthält außerdem die astronomisch bestimmte oder interpolierte Meridiankomponente  $\xi$  der Lotabweichung in den Ausgangspunkten, deren Differenz für jedes Profilstück und die Länge der Teilstrecken. Den einzelnen Lotabweichungsdifferenzen  $\Delta\theta_z$  ist ein Gewicht  $p$  zugeordnet, das lediglich auf dem Beobachtungsfehler der Höhenwinkel basiert. Den Höhenwinkeln mit dem durchschnittlichen mittleren Fehler  $m = \pm 0'',62$  entspricht das Gewicht 1, denjenigen mit  $m = \pm 1'',27$  das Gewicht  $1/4$ . Die Wiederholungszahl ist absichtlich nicht berücksichtigt, ebenso nicht der Einfluß des Refraktionsfehlers.

In jedem Profilstück sind die Lotabweichungsdifferenzen  $\Delta\theta_z$  unter Vernachlässigung der Reduktion auf das Profil zur Summe  $[\Delta\theta_z]$  zusammengefaßt, deren mittlerer Fehler auf Grund des Gewichts  $1/\left[\frac{1}{p}\right]$  und der eigentlichen Meßfehler angegeben ist. Der Anteil des Winkelfehlers  $m = \pm 0'',62$  beträgt bei achtfacher Wiederholung  $\pm 0'',22$ . Der mittlere Fehler einer Höhenablesung am Lotstab von 0,2 mm verursacht bei einer durchschnittlichen Distanz von 300 m einen zusätzlichen Winkel-

Tabelle 2: Lotabweichungsdifferenzen

Punkt	$\xi$	$D_m$	$\Delta\Theta_z$	$\frac{1}{p}$	$\Delta\Theta_z$	$\frac{1}{p}$	$d\Delta$	$\frac{1}{p}$
17 exz.	— 6",44	356	— 1",01	2				
171		444	— 2 ,52	2				
172		299	+ 0 ,99	2				
173		356	— 0 ,25	2				
174		271	— 1 ,12	2				
175		317	— 1 ,01	2				
176		214	— 0 ,14	5				
18	— 6",99							
	— 0",55	2257	— 2",83 + 2",28	17 $\pm 1",24$				
18	— 6",99	346	+ 1 ,14	8				
181		230	+ 1 ,38	2				
182		367	+ 2 ,37	5				
183	— 5",5							
	+ 1",49	943	+ 4",89 — 3",40	15 $\pm 1",16$				
19	+ 0",65	303	+ 0",89	5	+ 1",29	2	+ 0",40	7
191		292	+ 0 ,56	2	+ 1 ,93	2	+ 1 ,37	4
192		366	+ 0 ,55	2	+ 2 ,65	2	+ 2 ,10	4
193		198	+ 2 ,12	2	+ 0 ,48	2	— 1 ,64	4
194		213	+ 1 ,43	8	+ 3 ,79 <sup>1</sup>	2	+ 2 ,36	10
195		182	+ 0 ,96	2	— 1 ,37	2	— 2 ,33	4
196		379	+ 1 ,54	2	+ 1 ,03	2	— 0 ,51	4
197		234	+ 0 ,26	2	+ 0 ,84	2	+ 0 ,58	4
198		297	— 2 ,18	2	— 0 ,32	2	+ 1 ,86	4
199		275	— 3 ,10	2	+ 2 ,42	2	+ 5 ,52	4
1910		272	— 3 ,69	2	+ 3 ,91	2	+ 7 ,60	4
1911		298	— 3 ,22	2	— 2 ,83 <sup>2</sup>	4	+ 0 ,39	6
1912		276	— 1 ,56	2	— 2 ,39	2	— 0 ,83	4
1913		257	— 1 ,03	8	— 0 ,66 <sup>2</sup>	4	+ 0 ,37	12
20 exz.	+ 3",10							
	+ 2",45	3842	— 6",47 + 8",92	43 $\pm 2",08$	+ 10",77 — 8",32	32 $\pm 1",70$	+ 17",24	75 $\pm 2",60$

<sup>1</sup> 194–195 exz.

<sup>2</sup> Unterteilte Strecke.

Tabelle 2: Lotabweichungsdifferenzen

Punkt	$\xi$	$D_m$	$\Delta\Theta_z$	$\frac{1}{p}$	$\Delta\Theta_z$	$\frac{1}{p}$	$d\Delta$	$\frac{1}{p}$
20 exz.	+ 3",10	220	— 13",76	8	— 24",75	8	— 10",99	16
201		434	— 2 ,71	2				
202		244	— 1 ,12	2				
203		306	— 0 ,80	2				
204		358	— 3 ,38	2				
205		286	— 4 ,23	5				
206		114	— 9 ,85	5				
206 A		135	— 9 ,76	8				
207		395	+ 1 ,40	2				
208		395	— 6 ,35	2				
209		273	— 0 ,24	2				
2010		356	— 0 ,81	5				
2011		375	+ 0 ,73	2				
21	+ 6",24							
	+ 3",14	3891	— 50",88 + 54",02	47 $\pm 2",06$				
21	+ 6",24	64	— 0 ,67	2				
211		352	+ 0 ,09	2				
212		393	— 0 ,65	2				
213		408	+ 2 ,18	2				
214		217	+ 2 ,74	2	— 0",39	2	— 3",13	4
215		241	+ 2 ,09	2	+ 1 ,39	2	— 0 ,70	4
216		179	+ 0 ,55	2				
217	+ 10",4							
	+ 4",16	1854	+ 6",33 — 2",17	14 $\pm 1",12$				

fehler  $m_H = \pm 0",20$ . Gesamthaft ist damit ein mittlerer Meßfehler  $m_\beta = \pm 0",30$  zu erwarten, womit die eingangs geforderte Bedingung hinsichtlich der Meßgenauigkeit erfüllt ist.

Vergleicht man die Summe  $[\Delta\Theta_z]$  mit der Differenz der Meridiankomponenten  $\xi$  der Lotabweichung in den Ausgangspunkten, so fällt auf, daß der Widerspruch  $w$  den angegebenen mittleren Fehler wesentlich übersteigt. Wie man der Tabelle 2 entnehmen kann, bewegen sich die Widersprüche zwischen den Grenzen 2",17 und 54",02, während die mittleren Fehler höchstens rund  $\pm 2''$  betragen.

Nun ist allerdings zu berücksichtigen, daß die Widersprüche außer den Meßfehlern die Unsicherheit der Refraktion sowie den Fehler der

Lotabweichung in den Anschlußpunkten enthalten. Als mittleren Fehler am Refraktionskoeffizienten  $\kappa$  haben wir den Wert  $m_\kappa = \pm 0,028$  angenommen. Daraus folgt für einen durchschnittlichen Konvergenzwinkel  $\gamma = 10''$  ein zusätzlicher Fehler an  $\Delta\Theta_z$  von  $\pm 0'',20$ . Der mittlere Fehler einer astronomisch bestimmten Lotabweichungskomponente  $\xi$  kann entsprechend den Angaben in [1], Seite 150, im Mittel zu  $m_\xi = \pm 0'',10$ , derjenige einer interpolierten Komponente etwas größer eingesetzt werden. Dieser Fehler wirkt sich mit dem  $\sqrt{2}$ -fachen Betrag auf die Lotabweichungsdifferenz zweier Ausgangspunkte aus und kann gegenüber den Höhenwinkelfehlern vernachlässigt werden.

Die großen Widersprüche  $w$  der  $[\Delta\Theta_z]$  können durch diese abgeschätzten Fehlereinflüsse bei weitem nicht erklärt werden und sind deshalb näher zu untersuchen. Zu diesem Zweck sollen die Beobachtungsfehler umgekehrt aus den  $w$  abgeleitet werden. Da es für das Schlußresultat keine Rolle spielt, ob ein Fehler  $m_\kappa$  am Refraktionskoeffizienten explizit eingeführt wird oder ob dieser Fehler als im Meßfehler enthalten gedacht wird, wählen wir den zweiten Weg. Wir erhalten so einen mittleren Fehler am Höhenwinkel, der im Gegensatz zum früher gefundenen Beobachtungsfehler alle äußeren Einflüsse enthält. Für alle untersuchten Profilstücke wird

$$[pvv] = \left[ \frac{w_i^2}{\left[ \frac{1}{p_i} \right]} \right] = 60,33,$$

worin  $w_i$  der Widerspruch des  $i$ . Profilstücks und  $\left[ \frac{1}{p_i} \right]$  das reziproke Gewicht der entsprechenden Summe  $[\Delta\Theta_z]_i$  der Teilstrecken ist (vgl. Tabelle 2). Bei der Festlegung der Gewichte für die einzelnen Lotabweichungsdifferenzen wurde der Einfluß der Refraktion nicht berücksichtigt. Behält man diese Gewichtsannahme bei, so heißt das praktisch, daß bei einer Visur mit dem doppelten mittleren Beobachtungsfehler die Unsicherheit der Refraktion ebenfalls doppelt so groß ist. Nachdem bereits festgestellt worden ist, daß die Vergrößerung des Beobachtungsfehlers bei sonst gleichbleibenden Bedingungen auf die besonderen Refraktionsverhältnisse der betreffenden Visur zurückgeführt werden muß, ist diese Annahme sicher berechtigt. Damit findet man für den Höhenwinkel vom Gewicht 1:

$$m_e = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \sqrt{\frac{60,33}{6}} = \pm 3'',17.$$

Dieser Wert für den mittleren Fehler ist nur aus sechs Widersprüchen hergeleitet und daher nicht sehr zuverlässig. Das Profilstück 20–21 liefert mit  $w = 54,02$  weitaus den größten Beitrag; offenbar liegen dort besonders kritische Visuren, so vor allem 20 exz.–201, 206–206A und 206A–207. Für die übrigen Profilstücke geht der Höhenwinkelfehler bereits auf  $m_e = \pm 1'',04$  zurück.

In Anbetracht der Unsicherheit bei der Fehlerberechnung aus den Widersprüchen erlangt das Profilstück 19–20 eine besondere Bedeutung, weil dort alle Höhenwinkelbeobachtungen unter verschiedenen Bedingungen wiederholt wurden. Aus den Differenzen  $d\Delta$  der 17 doppelt bestimmten Lotabweichungsdifferenzen kann der mittlere Fehler eines Höhenwinkels wie folgt berechnet werden:

$$m_e = \sqrt{\frac{[pdd]}{n-u}} = \sqrt{\frac{37,57}{17}} = \pm 1'',50,$$

wobei  $p$  das Gewicht jeder Differenz  $d\Delta$ ,  $n$  die Anzahl der gemessenen und  $u$  die Anzahl der notwendigen Differenzen  $\Delta\theta_z$  darstellt (vgl. Tabelle 2).

Die Genauigkeit der Höhenwinkelmessung kann aber auch unmittelbar untersucht werden, indem man bei Wiederholung einer Messung die zwei auf die Bodenpunkte reduzierten Höhenwinkel miteinander vergleicht. Aus den Differenzen  $d\beta$  der 28 Doppelmessungen geht unter der gleichen Gewichtsannahme folgender mittlerer Fehler am Mittel einer Beobachtungsserie hervor:

$$m_e = \sqrt{\frac{[pdd]}{n-u}} = \sqrt{\frac{77,30}{28}} = \pm 1'',67.$$

Darin bedeutet  $p$  das aus den Winkelgewichten abgeleitete Gewicht der Differenz  $d\beta$ ,  $n$  die Anzahl der gemessenen und  $u$  die Anzahl der notwendigen Höhenwinkel  $\beta$ .

Die letzten Werte decken sich gut, da sie mit wenigen Ausnahmen auf denselben Beobachtungen basieren. Sie dürften einen zuverlässigen Anhaltspunkt über die tatsächliche Meßgenauigkeit der Höhenwinkel liefern. *Der mittlere Fehler am Mittel eines Höhenwinkels wird damit nicht  $\pm 0'',3$ , wie aus der inneren Übereinstimmung der Beobachtungen hervorgeht, sondern  $\pm 1'',6$  oder rund fünfmal so groß.*

Bei der Fehlerberechnung über die Höhenwinkeldifferenzen  $d\beta$  dürften streng genommen nicht dieselben Gewichte für einen Höhenwinkel eingeführt werden wie bei der Betrachtung der Lotabweichungsdifferenzen. Entsprechend der Ableitung unter 3.1 geht nämlich der Höhenwinkelfehler mit dem Faktor  $\sqrt{2}$ , der Fehler des Refraktionswinkels hingegen mit dem Faktor 2 in die Lotabweichungsdifferenz ein. Geben trotzdem die beiden Berechnungen praktisch denselben Wert für  $m_e$ , so darf wohl mit Recht daraus geschlossen werden, daß sich auch der Refraktionsfehler mit dem  $\sqrt{2}$ -fachen Betrag auf die Lotabweichungsdifferenz auswirkt. Das heißt mit anderen Worten, daß sich entgegen der Annahme unter 3.1 die Refraktion nicht nur von Teilstrecke zu Teilstrecke wie ein zufälliger Fehler verhält, sondern auch innerhalb derselben von Station zu Station.

Nachträglich soll noch versucht werden, den Gesamtfehler in den Anteil der Höhenwinkelmessung und den Anteil der Refraktionsunsicher-

heit aufzuteilen, wobei man berücksichtigt, daß der mittlere Meßfehler am Mittel eines Höhenwinkels auf Grund der vorangegangenen Fehleruntersuchung genügend zuverlässig mit  $m\beta = \pm 0'',3$  angegeben werden kann. Dabei zeigt sich, daß der Anteil der Meßfehler gegenüber dem Einfluß der Refraktionsunsicherheit praktisch verschwindet. Es hat somit keinen Sinn, den Meßfehler durch größere Wiederholungszahlen zu reduzieren, da die dadurch gewonnene große Genauigkeit, die nur eine innere Genauigkeit darstellt, infolge der Unsicherheit der Refraktion verlorenggeht.

Wie unter 4 erwähnt wurde, verzichteten wir aus praktischen Gründen darauf, die Beobachtungswiederholungen jedes Höhenwinkels über einen ganzen Tag zu verteilen, wie dies bei den Messungen im Gotthard geschah. Wohl können bei einer solchen Anordnung die täglichen Schwankungen der Refraktion festgestellt werden; die tatsächlichen Abweichungen der Refraktion von der normalen Strahlenbrechung lassen sich aber trotzdem nicht erfassen. Über die tägliche Refraktionsänderung wurden schon verschiedentlich Untersuchungen angestellt, allerdings hauptsächlich auf große Distanzen. Die dabei gefundenen Schwankungen liegen praktisch innerhalb des eingeführten Wertes  $m_k = \pm 0,028$ . Somit ist kaum zu erwarten, daß der durch die Verteilung der Beobachtungen über einen ganzen Tag entstehende Mehraufwand durch eine wesentliche Reduktion der großen Widersprüche gerechtfertigt würde. Der Grund für das Auftreten der extremen Werte ist vielmehr in den abnormalen Refraktionsverhältnissen der bodennahen Luftschichten zu suchen.

Theoretisch besteht die Möglichkeit, die Refraktion durch ständige meteorologische Messungen direkt zu bestimmen. Die ungleichmäßige Zusammensetzung der bodennahen Luftschichten auf der ganzen Länge der Visierlinie würde aber eine derart umfangreiche Apparatur bedingen, daß ein solches Vorgehen praktisch nicht in Frage kommt.

Die Tabelle 2 zeigt, daß die mittleren Fehler der Lotabweichungsdifferenzen  $[\Delta\theta_z]$  der Profilstücke, die nur die eigentlichen Meßfehler enthalten, gerade die Größenordnung der Lotabweichungsdifferenzen erreichen. Eine Ausgleichung der Widersprüche zur Bestimmung der Lotabweichung auf den Zwischenpunkten kommt damit nicht in Frage, um so weniger als diese noch den wesentlich größeren Anteil der Refraktionsunsicherheit enthalten. *Es muß deshalb festgestellt werden, daß das Verfahren der gegenseitigen Höhenwinkelmessungen zur Bestimmung von Lotabweichungen bei den Verhältnissen im Mittelland versagt.* Der durchgeführte Versuch ist damit äußerst wertvoll, da das Beobachtungsmaterial die schon früher gehegte Vermutung einwandfrei bestätigt.

## 7. Zusammenfassung

Das Geodätische Institut der ETH führte einen Versuch zur Bestimmung von Lotabweichungsdifferenzen aus gegenseitigen Höhenwinkelmessungen im schweizerischen Mittelland durch. Die Messungen

wurden an 8 Punkte des astronomischen Nivellements im Meridian des St. Gotthard angeschlossen, die auf einer mittleren Meereshöhe von rund 650 m liegen. Im Gegensatz zu analogen Beobachtungen im Hochgebirge wurden die Entfernungen der Profilpunkte relativ klein gewählt, im Durchschnitt 300 m. Damit sollte der Einfluß der Refraktionsabweichungen auf ein Minimum reduziert werden.

Zur Messung der Höhenwinkel diente ein astronomischer Theodolit DKM3-A mit verstellbarem Höhenkreis sowie besonders ausgebildete Zielmarken und Stative.

Abgesehen von einigen Visuren mit extrem ungünstigen Beobachtungsverhältnissen, konnte ein Höhenwinkel bei Beobachtung in beiden Fernrohrlagen mit einem inneren mittleren Fehler von rund  $\pm 0'',6$  gemessen werden. Bei achtfacher Wiederholung der Beobachtungen konnte damit für den um die Höhendifferenz (I-S) reduzierten Mittelwert des Höhenwinkels mit einem mittleren Meßfehler  $m\beta = \pm 0'',3$  gerechnet werden.

Andererseits wurde der mittlere Fehler am Mittel eines Höhenwinkels indirekt aus den Widersprüchen der Lotabweichungsdifferenzen gegenüber den astronomisch bestimmten Werten berechnet. Zudem bot eine teilweise Wiederholung der Messungen unter veränderten Verhältnissen die Möglichkeit, diesen Fehler aus den Unterschieden der entsprechenden Lotabweichungsdifferenzen und Höhenwinkel abzuleiten. Aus diesen Berechnungen wurde ein mittlerer Fehler am Mittel eines Höhenwinkels von rund  $\pm 1'',6$  gefunden.

Dieser Gesamtfehler besteht nur zu einem kleinen Teil aus dem eigentlichen Meßfehler, während offensichtlich die Refraktionsunsicherheit den Hauptbeitrag liefert. Diesem Umstand ist es vor allem zuzuschreiben, daß die Methode der Lotabweichungsbestimmung aus gegenseitigen Höhenwinkelmessungen, die im Hochgebirge brauchbare Resultate liefert, im Flach- und Hügelland versagt.

### *Literaturangaben*

- [1] Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz: Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard, Bd. 19, 1932.
- [2] do., Bd. 20, 1939.
- [3] P. Gleinsvik, Studien über die Ermittlung der Geoidform und die Bestimmung von Meereshöhen aus Höhenwinkeln, Diss., Zürich 1960.
- [4] F. Kobold, Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen, Neuenburg 1951.