

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 59 (1961)

Heft: 2

Artikel: Untersuchung über die Konvergenz eines Näherungsverfahrens zum Ausgleichen von eingeschnittenen Punkten [Schluss]

Autor: Köchle, Richard

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-216889>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Fortbildungskurs,

der Montag, 24., und Dienstag, 25. April 1961, stattfinden wird.

Das provisorische Programm sieht vor:

Montag, 24. April 1961

in Lausanne: Praktische Probleme der Photogrammetrie und Einführung der elektronischen Rechnungsmethoden in die verschiedenen Zweige unserer Berufstätigkeit (Grundbuchvermessung, Bauwesen, insbesondere Bau der Autostraßen, Bodenverbesserungen).

Dienstag, 25. April 1961

in Lausanne:

Probleme der Bodenverbesserungen:

Aufnahme des alten Besitzstandes mit Hilfe der Photogrammetrie. Die im Kanton Waadt angewandten Methoden für die Durchführung von Bodenverbesserungen im Rahmen des Baus der Autobahn Genf–Lausanne mit Besichtigung jener Güterzusammenlegung, die längs dieser Autobahn durchgeführt wird.

In der Märznummer wird das endgültige Programm mit Einschreibeboegen und weiteren Angaben folgen.

Untersuchung über die Konvergenz eines Näherungsverfahrens zum Ausgleichen von eingeschnittenen Punkten

Von Richard Köchle, Dipl.-Ing., Zürich

(Schluß)

Zusammengefaßt:

Das Verfahren konvergiert beim Rückwärtseinschneiden aus n Festpunkten dann und nur dann nicht, wenn der Neupunkt und alle Festpunkte auf dem gefährlichen Kreis liegen.

Da das Verfahren bei der gefährlichen Konfiguration versagt, ist zu erwarten, daß für angenähert gefährliche Konfigurationen die Konvergenz schlecht ist. Eine genauere Untersuchung zeigt nun, daß für das reine Rückwärtseinschneiden das Verfahren leider in ziemlich weiten Bereichen schlecht konvergiert, selbst wenn die Punktbestimmung an und für sich noch verhältnismäßig gut ist.

Zwischen dem Konvergenzfaktor C und den Fehlerellipsen besteht ein enger Zusammenhang. Ausgehend von den Gleichungen (3.2") und (3.4) bildet man den Ausdruck

$$\frac{D'}{D} = 1 - \frac{[aa][b]^2 - 2[ab][a][b] + [bb][a]^2}{n([aa][bb] - [ab]^2)}$$

Der Subtrahend auf der rechten Seite ist gleich dem Konvergenzfaktor C , also darf man schreiben:

$$\frac{D'}{D} = 1 - C \quad \text{oder} \quad C = 1 - \frac{D'}{D}.$$

Die Größen D und D' kann man einfach durch die Halbachsen der entsprechenden Fehlereinheitsellipsen ausdrücken. Nach Gleichung (3.1) gilt

$$(AB)^2 = A^2 B^2 = \frac{([aa] + [bb])^2 - W^2}{4 D^2} = \frac{4 ([aa][bb] - [ab]^2)}{4 D^2} = \frac{1}{D}$$

und analog nach Gleichung (3.3)

$$(A'B')^2 = \frac{1}{D'}.$$

Unter Verwendung dieser Beziehungen wird

$$C = 1 - \left(\frac{AB}{A'B'} \right)^2.$$

Da die Fläche F der Fehlerellipse $F = \pi AB$ ist, kann man auch schreiben

$$C = 1 - \left(\frac{F}{F'} \right)^2. \quad (6.6)$$

Der Konvergenzfaktor C ist also gleich der Einheit minus dem Quadrat des Quotienten aus den Flächen der Fehlereinheitsellipsen für reines Vorwärts- und reines Rückwärtseinschneiden bei gleicher Punktconfiguration.

Mit dieser Beziehung hat man ein einfaches Mittel in der Hand, um rasch die Konvergenz abzuschätzen. Man zeichnet nach einem grafischen Verfahren die Fehlerellipse für das reine Vorwärtseinschneiden und das reine Rückwärtseinschneiden. Dann berechnet man nach der angegebenen Formel den Konvergenzfaktor C und kann sofort entscheiden, ob sich das Verfahren der sukzessiven Näherung lohnt oder nicht. Wenn $C > \frac{1}{2}$ ist, wird man besser zur strengen analytischen Ausgleichung greifen. An Stelle der Ellipsenflächen darf man einfacher die Flächen irgendeines Tangentenparallelogramms mit Seiten parallel zu konjugierten Durchmessern nehmen, wie durch eine affine Abbildung der Ellipse in einen Kreis eingesehen werden kann.

7. Beziehungen zwischen den Fehlerellipsen für das Vorwärts- und das Rückwärtseinschneiden

Aus Gleichung (6.6) folgt das interessante Resultat: Bei gleicher Punktconfiguration und bei gleicher Meßgenauigkeit ist die Fläche der

Fehlerellipse für das Rückwärtseinschneiden immer größer oder höchstens gleich derjenigen für das Vorwärtseinschneiden.

Es gilt ja nach Gleichung (6.6) und (6.3)

$$C = 1 - \left(\frac{F}{F'} \right)^2 \geq 0,$$

also

$$\left(\frac{F}{F'} \right)^2 \leq 1 \quad \text{und} \quad \underline{F \leq F'}.$$

Diese Formel, die für den mittleren Richtungsfehler $m = 1$ gültig ist, behält ihre Gültigkeit für einen beliebigen mittleren Fehler, solange er für beide Ellipsen den gleichen Wert hat.

Damit ist nichts über die Form der Fehlerellipsen ausgesagt. Es läßt sich aber zusätzlich beweisen, daß unter den oben gemachten Voraussetzungen die Fehlerellipse für das Vorwärtseinschneiden immer innerhalb der Fehlerellipse für das Rückwärtseinschneiden verläuft oder diese höchstens berührt.

Für den mittleren Punktlagefehler m_φ in einer beliebigen Richtung φ besteht die allgemeine Beziehung [2]

$$m_\varphi^2 = \cos^2 \varphi \cdot Q_{xx} + 2 \sin \varphi \cos \varphi Q_{xy} + \sin^2 \varphi Q_{yy}.$$

Dies ist die Gleichung der Fußpunktkurve der Fehlerellipse in Polarkoordinaten. Die Koeffizienten Q_{xx} , Q_{xy} , Q_{yy} nehmen für das Vorwärtseinschneiden die Werte an

$$Q_{xx} = \frac{[bb]}{D}, \quad Q_{xy} = -\frac{[ab]}{D}, \quad Q_{yy} = \frac{[aa]}{D}.$$

Für das Rückwärtseinschneiden gelten die entsprechenden Beziehungen mit den gestrichenen Größen a' , b' , D' .

Der Beweis der obenstehenden Behauptung läuft im wesentlichen darauf hinaus, zu zeigen, daß $m_{\varphi'}^2 \geq m_\varphi^2$ ist, unabhängig vom Winkel φ . Man kann den Beweis führen, indem man das xy -System festhält und den Winkel φ variiert; einfacher ist es aber, das xy -System zu drehen und den Winkel $\varphi = \text{const.} = 0$ zu wählen.

Es ist erlaubt, das Koordinatensystem zu verdrehen, weil die Fehlerellipse eine Invariante von x und y ist. Mit $\varphi = 0$ geht m_φ^2 über in

$$m_x^2 = \frac{[bb]}{D} \quad \text{für das Vorwärtseinschneiden}$$

$$\text{und} \quad m_{x'}^2 = \frac{[b'b']}{D'} \quad \text{für das Rückwärtseinschneiden}$$

mit variablen Richtungskoeffizienten a und b , je nach der Richtung der x -Achse in bezug auf die Festpunktstrahlen.

Dann wird

$$m_{x'^2} - m_{x^2} = \frac{[b'b']}{D'} - \frac{[bb]}{D} = \frac{D[b'b'] - D'[bb]}{D'D}$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für $[b'b']$ und D' im Zähler nach Gleichungen (2.12) und (3.4) und Ausmultiplizieren heben sich verschiedene Glieder weg, und es bleibt schließlich

$$m_{x'^2} - m_{x^2} = \frac{([a][bb] - [b][ab])^2}{n \cdot D'D}. \quad (7.1)$$

Der Zähler ist als reines Quadrat immer positiv oder Null, der Nenner $nD'D \geq 0$, wie früher gezeigt wurde. Damit ist bewiesen:

$$m_{x'^2} - m_{x^2} \geq 0. \quad (7.2)$$

Die Fußpunktkurve für das Rückwärtseinschneiden läuft also ganz außerhalb oder höchstens auf der Fußpunktkurve für das Vorwärtseinschneiden. Die Normalen auf die m_φ -Richtungen durch die Fußpunkte sind Tangenten an die zugehörigen Fehlerellipsen, entsprechend der Definition der Fußpunktkurve. Man darf darum das Ergebnis so formulieren: zieht man eine zu einer beliebigen Richtung parallele Tangente t_R an die Fehlerellipse für das Rückwärtseinschneiden (RE) und t_V an die Fehlerellipse für das Vorwärtseinschneiden (VE), so ist der Abstand von t_R zum Mittelpunkt immer größer oder höchstens gleich dem Abstand von t_V zum Mittelpunkt.

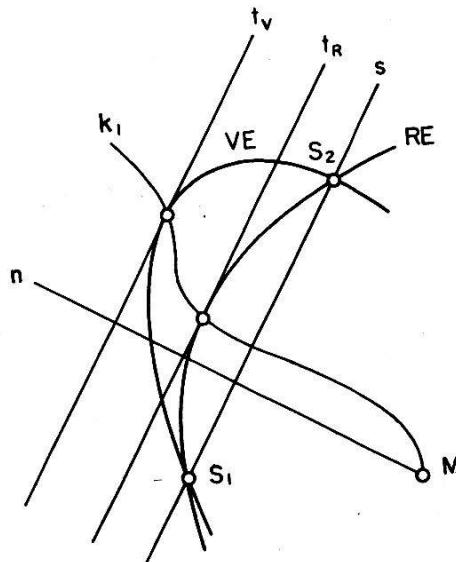


Abb. 6

Ausgehend von diesem Satz läßt sich folgern, daß VE nie außerhalb von RE verläuft. Anders formuliert, darf eine vom gemeinsamen Ellipsenmittelpunkt ausgehende beliebige stetige Kurve die RE nie vor der VE schneiden.

Würde an irgendeiner Stelle die VE über die RE hinaustreten (Abb. 6), so ließen sich immer zwei parallele Tangenten so finden, daß die Tangente

t_V den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat als die Tangente t_R , was im Widerspruch mit dem vorhin bewiesenen Satz steht.

Der ausführliche Beweis dazu läßt sich folgendermaßen führen: Wir nehmen an, die VE trete zwischen den Punkten S_1 und S_2 über die RE hinaus. Nach dem Satz von *Rolle* aus der Differentialrechnung lassen sich auf beiden Kurven zwischen S_1 und S_2 parallele Tangenten zur Sekante s finden. Wir ziehen vom Mittelpunkt M eine Kurve k_1 so, daß sie die beiden Ellipsen in den Tangentenberührungs punkten schneidet. Nach der Annahme muß k_1 RE vor VE schneiden und damit auch t_R vor t_V . Wenn die Kurve k_1 t_R vor t_V schneidet, gilt dasselbe für irgendeine von M ausgehende und die beiden parallelen Geraden t_R und t_V schneidende Kurve, speziell für die Normale n . Das würde heißen $m_\varphi^2 \geq m_{\varphi'}^2$, was der Gleichung (7.2) widerspricht. Die Annahme VE außerhalb von RE muß darum verworfen werden.

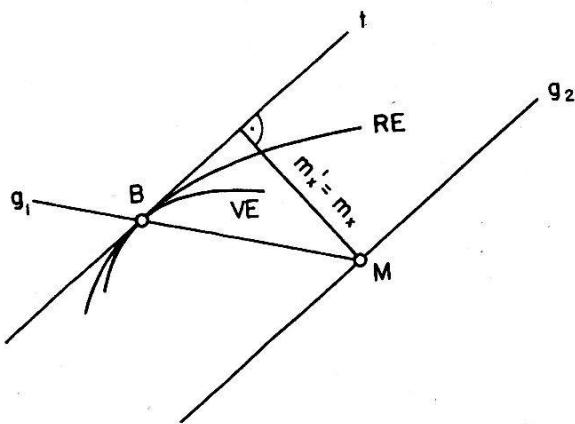


Abb. 7

Es gilt also der Satz:

Bei gleicher Punktkonfiguration und bei gleicher Meßgenauigkeit aller Visuren verläuft auf dem Neupunkt die Fehlerellipse für das reine Vorwärtseinschneiden immer innerhalb der Fehlerellipse für das reine Rückwärtseinschneiden, berührt sie höchstens oder fällt im Grenzfall mit ihr zusammen.

Der Grenzfall tritt ein, wenn die Flächen $F = F'$, das heißt $C = 0$. Dazu muß der Zähler von C verschwinden, und das ist zum Beispiel der Fall, wenn $[a] = [b] = 0$, speziell zum Beispiel bei rotationssymmetrischen Anordnungen (n gleich lange, über den ganzen Kreis gleichmäßig verteilte Strahlen).

Man kann noch die Frage aufwerfen: Haben die VE und die RE – immer unter den gemachten Voraussetzungen – für jede beliebige Festpunktkonfiguration gemeinsame Berührungs punkte?

Für einen Berührungs punkt B müßte $m_x = m_x'$ sein. Es gilt auch die Umkehrung: Wenn $m_x = m_x'$, dann ist die Gerade mit dem Abstand m_x vom Mittelpunkt Tangente (t) an den gemeinsamen Berührungs punkt B . Würde nämlich die Gerade t die VE und die RE in zwei verschiedenen Punkten berühren, so könnte die VE nicht ganz innerhalb der RE verlaufen.

$m_x = m_x'$ führt nach (7.1) auf die Bedingung $[a][bb] - [b][ab] = 0$. Dieser Ausdruck tritt auch als Nenner des Steigungsfaktors μ_2 auf (5.4). Wird er zu Null, wird $\mu_2 = \infty$ (Gerade g_2 in Abb. 4). μ_2 wird unendlich im Koordinatensystem, dessen x -Achse senkrecht auf g_2 steht. Die gemeinsame Tangente t ist darum parallel zu g_2 . Der Berührungsrand ist der Durchstoßpunkt des konjugierten Durchmessers zu g_2 mit den Fehlerellipsen. Nach Abschnitt 5 ist das der Durchmesser mit dem Steigungsfaktor μ_1 (g_1 in Abb. 4).

Damit ist bewiesen:

Bei gleicher Punktkonfiguration und bei gleicher Meßgenauigkeit haben die Fehlerellipsen für das Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden immer wenigstens zwei gemeinsame Berührungsrande. Es sind dies die Schnittpunkte mit dem Durchmesser vom Steigungsfaktor $-[a]/[b]$.

Im System der konjugierten Durchmesser g_1 und g_2 heißen die Gleichungen der *VE* und der *RE*

$$VE: \frac{x_1^2}{r^2} + \frac{y_1^2}{r_1^2} = 1 \quad RE: \frac{x_2^2}{r^2} + \frac{y_2^2}{r_2^2} = 1.$$

r ist der gemeinsame konjugierte Halbmesser auf g_1 , r_1 und r_2 sind die konjugierten Halbmesser auf g_2 . Für ein beliebiges festes x verhalten sich die y -Koordinaten wie $\frac{y_2}{y_1} = \frac{r_2}{r_1}$.

Die beiden Ellipsen sind somit zueinander affin. Die Gerade g_1 ist die Affinitätsachse, g_2 die Affinitätsrichtung, und das Affinitätsverhältnis hat den Betrag

$$f = \frac{y_2}{y_1} = \frac{F'}{F} = \sqrt{\frac{D}{D'}} = \frac{1}{\sqrt{1-C}}.$$

8. Behandlung des kombinierten Einschneidens

Für das kombinierte Vor- und Rückwärtseinschneiden lässt sich eine entsprechende Formel für C ableiten.

Die Fehlergleichungen lauten in diesem Fall:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 \xi + b_1 \eta + f_1 \\ v_2 &= a_2 \xi + b_2 \eta + f_2 \\ \vdots & \\ v_r &= a_r \xi + b_r \eta + f_r \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{äußere Richtungen}$$

$$\begin{aligned} v_{r+1} &= a_{r+1} \xi + b_{r+1} \eta - \zeta + f_{r+1} \\ \vdots & \\ v_n &= a_n \xi + b_n \eta - \zeta + f_n \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{innere Richtungen}$$

Dabei können einige oder alle Richtungen gegenseitig beobachtet sein.

Abgekürzt kann man auch schreiben

$$v_i = a_i \xi + b_i \eta - c_i \zeta + f_i$$

mit

$$c_i = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, r,$$

$$c_i = +1 \quad \text{für } i = r+1, r+2, \dots, n.$$

Man wird für die innern Richtungen wieder ζ nach *Gauss* vorgängig eliminieren und kommt auf die reduzierten Fehlergleichungen

$$v_i' = a_i' \xi + b_i' \eta + f_i' \quad \text{für } i = r+1, r+2, \dots, n,$$

$$\text{wo } a_i' = a_i - \frac{[a]_{r+1}^n}{n-r}, \quad b_i' = b_i - \frac{[b]_{r+1}^n}{n-r}, \quad f_i' = f_i - \frac{[f]_{r+1}^n}{n-r}.$$

Um die Formel für den Konvergenzfaktor abzuleiten, verwenden wir die unreduzierte Form. Analog wie beim reinen Rückwärtseinschnitt heißen die Fehlergleichungen auf den ausgeglichenen Punkt bezogen

$$v_i = a_i \xi + b_i \eta - c_i \zeta + \bar{v}_i$$

mit

$$c_i = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, r,$$

$$c_i = 1 \quad \text{für } i = r+1, r+2, \dots, n.$$

Wird wieder nur ζ geändert und ξ_0 und η_0 festgehalten, bekommt man in einem ersten Schritt aus der Bedingung

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [vv]}{\partial \zeta} = [v_i]_{r+1}^n = 0$$

für ζ den ersten Näherungswert

$$\zeta_1 = \frac{[a]_{r+1}^n \xi_0 + [b]_{r+1}^n \eta_0}{n-r}$$

und in einem zweiten Schritt unter Festhalten von ζ_1 die ersten Näherungswerte für ξ und η aus den Bedingungen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [vv]}{\partial \xi} = [av]_1^n = 0, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [vv]}{\partial \eta} = [bv]_1^n = 0$$

$$\xi_1 = \frac{[a]_{r+1}^n [bb] - [b]_{r+1}^n [ab]}{[aa][bb] - [ab]^2} \cdot \zeta_1$$

$$\eta_1 = \frac{[b]_{r+1}^n [aa] - [a]_{r+1}^n [ab]}{[aa][bb] - [ab]^2} \cdot \zeta_1.$$

Beim Summieren von 1 nach n sind der Einfachheit halber die Summationsindizes nach der eckigen Klammer weggelassen. Der zweite Näherungswert für ζ heißt

$$\zeta_2 = \frac{[a]_{r+1}^n \xi_1 + [b]_{r+1}^n \cdot \eta_1}{n-r}.$$

Daraus lässt sich C berechnen zu

$$C = \frac{([a]_{r+1}^n)^2 [bb] - 2 [a]_{r+1}^n [b]_{r+1}^n [ab] + ([b]_{r+1}^n)^2 [aa]}{(n-r) ([aa] [bb] - [ab]^2)}. \quad (8.1)$$

Um einen einfachen Ausdruck für C zu finden, berechnen wir auch hier wieder die Größen

$$D = [aa] [bb] - [ab]^2$$

für reinen Vorwärtseinschnitt und

$$D' = ([aa]_1^r + [a' a']_{r+1}^n) ([bb]_1^r + [b' b']_{r+1}^n) - ([ab]_1^r + [a' b']_{r+1}^n)^2$$

für das kombiniert Einschneiden.

Unter Benutzung der Beziehungen

$$\begin{aligned} [a' a']_{r+1}^n &= [aa]_{r+1}^n - \frac{([a]_{r+1}^n)^2}{n-r} && \text{analog} \\ [b' b']_{r+1}^n &= [bb]_{r+1}^n - \frac{([b]_{r+1}^n)^2}{n-r} && (2.12) \\ [a' b']_{r+1}^n &= [ab]_{r+1}^n - \frac{[a]_{r+1}^n [b]_{r+1}^n}{n-r} \end{aligned}$$

wird D' zu

$$D' = \left([aa] - \frac{([a]_{r+1}^n)^2}{n-r} \right) \left([bb] - \frac{([b]_{r+1}^n)^2}{n-r} \right) - \left([ab] - \frac{[a]_{r+1}^n [b]_{r+1}^n}{n-r} \right)^2.$$

Multipliziert man aus und vereinfacht, so entsteht schließlich die Gleichung

$$\begin{aligned} D' &= D - \frac{[aa] ([b]_{r+1}^n)^2 - 2 [ab] [a]_{r+1}^n [b]_{r+1}^n + [bb] ([a]_{r+1}^n)^2}{n-r} \\ &= D - CD \end{aligned}$$

und

$$C = 1 - \frac{D'}{D} = 1 - \left(\frac{F}{F'} \right)^2.$$

Diese Gleichung verknüpft den Konvergenzfaktor auf dieselbe Weise mit der Fläche der Fehlerellipsen wie beim reinen Rückwärtseinschneiden. Dabei ist F die Fläche der Fehlerellipse, wenn alle Richtungen, äußere wie innere, nur von außen beobachtet wären, wobei gegenseitige Richtungen doppelt zu zählen sind und F' die Fläche der Fehlerellipse für den tatsächlich beobachteten Fall des kombinierten Einschneidens.

Die Formel für den reinen Rückwärtseinschnitt ist ein Grenzfall dieser allgemeinen Formel, ebenso geht daraus der reine Vorwärtseinschnitt hervor zu

$$C = 1 - \left(\frac{F}{F} \right)^2 = 0.$$

Zum Schluß sei noch der Fall des kombinierten Einschneidens, mit allen Visuren gegenseitig beobachtet, dem Fall des reinen Rückwärts-einschneidens gegenübergestellt. Nach Formel (8.1) wird C für diesen speziellen Fall

$$C_k = \frac{([a]_1^r)^2 \cdot 2 [bb]_1^r - 2 [a]_1^r [b]_1^r \cdot 2 [ab]_1^r + ([b]_1^r)^2 \cdot 2 [aa]_1^r}{r (2 [aa]_1^r \cdot 2 [bb]_1^r - 4 ([ab]_1^r)^2)}$$

weil $2r = n$, $[a]_{r+1}^n = [a]_1^r$, $[aa]_1^n = 2 [aa]_1^r$... usw.

und nach Vergleich mit C_R für reinen Rückwärtseinschnitt

$$\underline{C_K = \frac{1}{2} C_R.} \quad (8.2)$$

Für diesen speziellen Fall des kombinierten Einschneidens (vollständiges Einschneiden) ist der Konvergenzfaktor halb so groß wie beim Rückwärtseinschneiden. Das Verfahren der sukzessiven Näherung konvergiert daher bedeutend besser. Im besondern konvergiert das Verfahren immer, weil wegen $C_R \leq 1$ der Wert $C_K \leq \frac{1}{2}$ werden muß.

9. Behandlung zweier Spezialfälle

a) Rückwärtseinschneiden: Alle Visuren gleich lang und gleiche Zwischenwinkel.

Die Distanz d kürzt sich im Ausdruck für C im Zähler und Nenner weg, sie darf darum zu 1 angenommen werden

$$a_i = \sin \alpha_i \quad b_i = -\cos \alpha_i.$$

C wird dann

$$C = \frac{[\sin \alpha]^2 [\cos^2 \alpha] - 2 [\sin \alpha] [\cos \alpha] [\sin \alpha \cos \alpha] + [\cos \alpha]^2 [\sin^2 \alpha]}{n ([\sin^2 \alpha] [\cos^2 \alpha] - [\sin \alpha \cos \alpha]^2)}.$$

Die Formel für C muß gegen eine Drehung des Koordinatensystems invariant sein, wie die Bedeutung von C vermuten läßt und wie auch aus Formel (6.6) ersichtlich ist. Man darf deshalb die Nullrichtung des Satzes so legen, daß die Formeln möglichst einfach werden. In unserm Fall hier legen wir sie, wie in Abb. 8 angegeben ist.

Man läßt am besten den gesamten Winkelbereich nicht vom ersten bis zum letzten Strahl gehen, sondern erweitert auf beide Seiten um den Winkel $\frac{\Phi}{2n} = \frac{\gamma}{2}$. Dies führt im Falle von einem rotationssymmetrischen Richtungssatz auf die logischere Bezeichnung, wo der erste und der letzte Strahl keinen vollen Winkel einschließen, Φ dann aber 360° wird.

Für die Summenausdrücke in der Formel von C lassen sich geschlossene Formeln in Abhängigkeit von Φ und n angegeben, die man

zum Beispiel erhält, wenn man für die trigonometrischen Funktionen die komplexe Schreibweise einführt und nach Real- und Imaginärteil trennt.

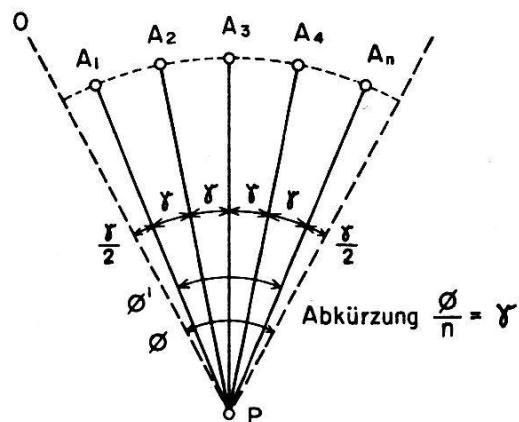


Abb. 8

Man kommt dann zu folgenden Beziehungen:

$$[\sin \alpha] = \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{\gamma}{2} (2k-1) \right) = \frac{1 - \cos \Phi}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\Phi}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$[\cos \alpha] = \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{\gamma}{2} (2k-1) \right) = \frac{\sin \Phi}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$[\sin^2 \alpha] = \sum_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} (2k-1) \right) = \frac{n}{2} - \frac{\sin 2\Phi}{4 \sin \gamma}$$

$$[\cos^2 \alpha] = \sum_{k=1}^n \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} (2k-1) \right) = \frac{n}{2} + \frac{\sin 2\Phi}{4 \sin \gamma}$$

$$[\sin \alpha \cos \alpha] = \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{\gamma}{2} (2k-1) \right) \cdot \cos \left(\frac{\gamma}{2} (2k-1) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 2\Phi}{\sin \gamma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \Phi}{\sin \gamma}.$$

Diese Ausdrücke, in die Formel für C eingesetzt, führen nach Vereinfachungen und Zusammenfassung auf die Schlußformel

$$C = \frac{2 \sin \gamma (1 - \cos \Phi)}{n (1 - \cos \gamma) (n \cdot \sin \gamma + \sin \Phi)} \quad (9.1')$$

oder auch

$$C = \frac{4 \cdot \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{n \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (n \cdot \sin \gamma + \sin \Phi)}. \quad (9.1'')$$

In Diagramm 9 sind die Formeln für einige Werte von n graphisch dargestellt, zusammen mit dem Grenzfall $n = \infty$. Dieser Fall kommt natürlich praktisch nicht vor, da man ja selten über acht Richtungen mißt, er wurde aber des Interesses halber doch aufgetragen. Die Formel dafür leitet man als Grenzwert aus (9.1'') her.

$$C_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{n \cdot \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2n} \left(n \cdot \sin \frac{\Phi}{n} + \sin \Phi \right)} = \frac{8 \cdot \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{\Phi (\Phi + \sin \Phi)} = \frac{4 (1 - \cos \Phi)}{\Phi (\Phi + \sin \Phi)} \quad (9.2)$$

b) Rückwärtseinschneiden: Ungerade Anzahl von Strahlen, gleiche Zwischenwinkel, Mittelstrahl u -mal so lang wie alle übrigen Strahlen.

Die Herleitung der Formel wird stark vereinfacht, wenn man von der Eigenschaft Gebrauch macht, daß für axialsymmetrische Konfigurationen die Fehlerellipse auch axialsymmetrisch liegt. Der Beweis dafür ist einfach zu führen. Man bezieht alles auf das Koordinatensystem der Symmetriechse. Soll die Fehlerellipse dazu symmetrisch liegen, so muß der Winkel Θ zwischen der großen Achse und der Symmetriechse 0° oder 90° sein.

Wegen $\operatorname{tg} (2\Phi) = \frac{2 [ab]}{[aa] - [bb]}$ kann das nur der Fall sein, wenn $[ab] = 0$. Wir untersuchen zuerst für den Vorwärtseinschnitt, ob diese Bedingung erfüllt ist. Weil

$$a = \frac{\sin \alpha}{d} \cdot \rho \quad b = -\frac{\cos \alpha}{d} \cdot \rho$$

und weil jedem Strahl außerhalb der Mittelachse ein symmetrischer Strahl entspricht, wird für diese Strahlen unter Benutzung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \rightarrow a_- &= -a \\ \cos(-\alpha) &= +\cos \alpha & \rightarrow b_- &= +b \end{aligned}$$

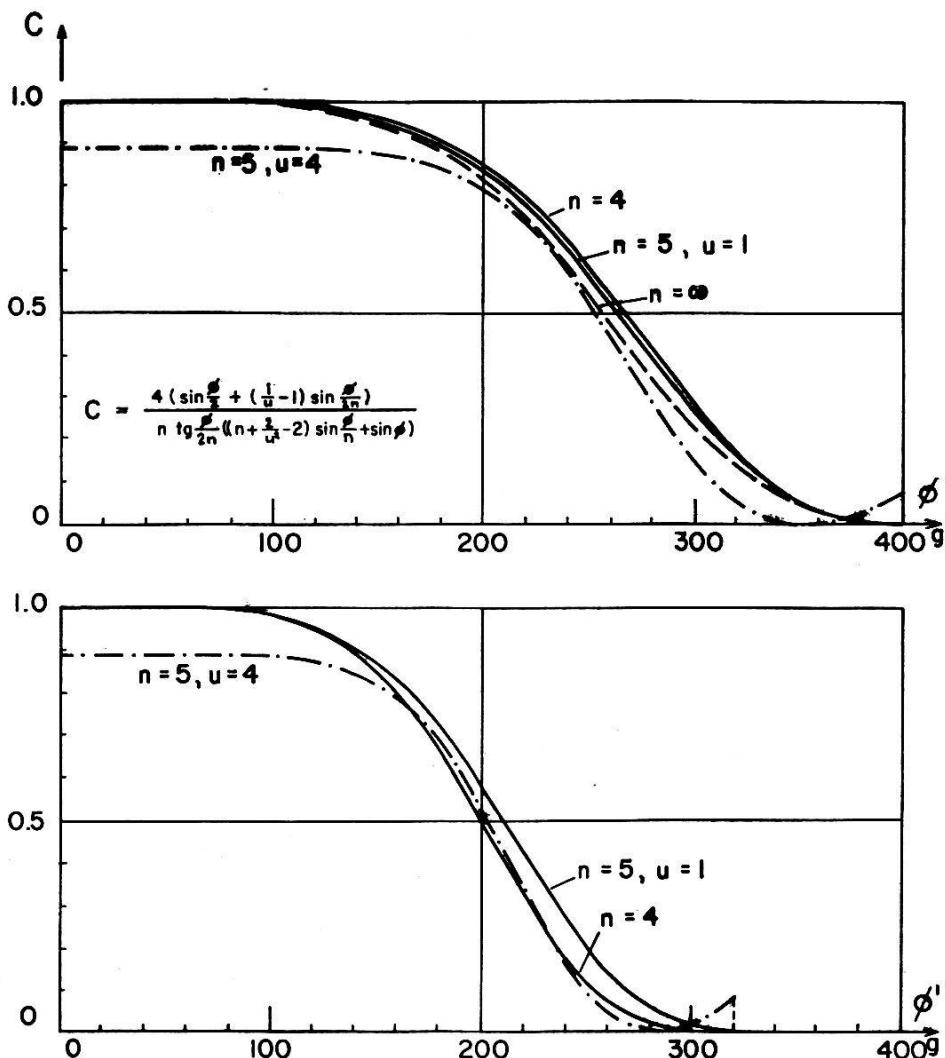


Abb. 9. Konvergenzfaktor C in Abhängigkeit vom Sektorwinkel Φ und Φ' für einige spezielle Fälle (Abschnitt 9, a und b).

Φ ist der im Text definierte Winkel, Φ' der Winkel zwischen den beiden äußersten Strahlen des Sektors.

Hier bedeuten a_- , b_- die Richtungskoeffizienten der symmetrischen Strahlen zu a , b . Eingesetzt in $[ab]$, ergibt sich für symmetrische Strahlen

$$\begin{aligned} [ab] &= a_1_- b_1_- + a_2_- b_2_- + \dots + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots \\ &= -a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Für eine gerade Anzahl von Strahlen ist der Beweis damit geführt. Ist die Zahl der Strahlen ungerade, so gibt es einen Mittelstrahl m . Für diesen gilt $a_m = 0$, $\sin a_m = 0$, $a_m = 0$, das heißt, auch der Summand $a_m b_m$ verschwindet.

Beim Rückwärtseinschnitt muß man an Stelle von a , b

$$a' = a - \frac{[a]}{n}, \quad b' = b - \frac{[b]}{n}$$

einsetzen. Aus Gründen der Symmetrie wird $a'_{-} = -a'$ und $b'_{-} = +b'$ und daraus folgt $[a'b'] = 0$.

Weil wir also für die zu untersuchende Konfiguration setzen dürfen $[ab] = 0$ und weiter auch $[a] = 0$, vereinfacht sich C zu

$$C = \frac{[b]^2}{n [bb]}. \quad (9.3)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf den Randstrahlen die Länge 1 gegeben werden, der Mittelstrahl hat dann die Länge u . Die Richtungskoeffizienten werden dann für den Mittelstrahl

$$a = 0, \quad b = -\frac{1}{u}$$

und für die übrigen Strahlen

$$a = \sin \alpha, \quad b = -\cos \alpha.$$

Führt man dem Fall a analoge Bezeichnungen ein und rechnet man die Summenausdrücke explizit aus, gelangt man zu den Formeln

$$[b] = \frac{\sin \frac{\Phi}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{u}\right)}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$[bb] = \frac{\sin \gamma \left(\frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{u^2}\right) + \frac{1}{2} \sin \Phi}{2 \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$$

und

$$C = \frac{4 \left\{ \sin \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{1}{u} - 1\right) \right\}^2}{n \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left\{ \sin \gamma \cdot \left(n + \frac{2}{u^2} - 2\right) + \sin \Phi \right\}}. \quad (9.4)$$

Für den Spezialfall $u = 1$ erhält man die Formel (9.1").

Literatur:

- [1] Prof. Dr. F. Kobold, Vermessungskunde, Bd. 2, Autographie ETH.
- [2] W. Großmann, Grundzüge der Ausgleichungsrechnung.
- [3] R. Zurmühl, Matrizen, 1. Aufl., 1950.