

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 59 (1961)

**Heft:** 1

**Artikel:** Untersuchung über die Konvergenz eines Näherungsverfahrens zum Ausgleichen von eingeschnittenen Punkten

**Autor:** Köchle, Richard

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-216881>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Untersuchung über die Konvergenz eines Näherungsverfahrens zum Ausgleichen von eingeschnittenen Punkten

Von Richard Köchle, Dipl.-Ing., Zürich

*Inhalt:* In diesem Aufsatz wird ein bekanntes halbgraphisches Verfahren zum Ausgleichen von eingeschnittenen Punkten auf seine Konvergenz hin untersucht. Es wird ein Konvergenzfaktor hergeleitet und in Beziehung zu den Fehlerellipsen gebracht. Der Konvergenzfaktor wird für zwei spezielle Konfigurationen in geschlossener Form angegeben und in einem Graphikon dargestellt. In einem besondern Abschnitt sind einige allgemeine Eigenschaften der Fehlerellipsen eines aus denselben Strahlen vorwärts und rückwärts eingeschnittenen Punktes aufgeführt.

## 1. Beschreibung des halbgraphischen Verfahrens schrittweiser Näherung

Neben dem strengen analytischen Verfahren zum Ausgleichen von eingeschnittenen Punkten gibt es eine ganze Reihe graphischer Lösungswege. Unter ihnen ist das Verfahren mit der fehlerzeigenden Figur dank seiner Einfachheit und Anschaulichkeit sehr beliebt. Die gemessenen Strahlen werden dabei in der Umgebung des Neupunktes in großem Maßstab aufgetragen und der ausgeglichene Punkt meist von Auge eingeschätzt. Während beim reinen Vorwärtseinschneiden (nur äußere, auf den Festpunkten orientierte Visuren) die Methode, abgesehen vom mehr oder weniger willkürlichen Einschätzen des Punktes, im ersten Schritt die strenge Lösung liefert, tritt beim Rückwärtseinschneiden (nur innere, nicht orientierte Richtungen) eine Komplikation auf. Neben den beiden Koordinaten des Neupunktes muß als weitere Unbekannte die Orientierung des gemessenen Satzes auf dem Neupunkt eingeführt werden. Um dennoch mit der Fehlerfigur arbeiten zu können, bedient man sich eines Verfahrens schrittweiser Näherung, das – unter gewissen Einschränkungen – eine Entsprechung in einem Verfahren zum Rückwärtseinschneiden auf dem Meßtisch hat und im folgenden beschrieben werden soll [1].

Man bestimmt zuerst aus drei günstig gelegenen Festpunkten nach irgendeiner der bekannten Berechnungsmethoden zum Rückwärtseinschneiden einen ersten Näherungspunkt, den wir im folgenden als Ausgangspunkt bezeichnen wollen. Damit wird es möglich, dem gemessenen Satz eine erste Näherungsorientierung zu geben und eine erste, noch nicht korrekte Fehlerfigur zu zeichnen. In diese Fehlerfigur wird sodann wie beim Vorwärtseinschneiden ein Punkt eingeschätzt, der wegen der fehlerhaften Orientierung im allgemeinen noch nicht der ausgeglichene Punkt ist. Dieser Punkt wird als besserer Näherungspunkt betrachtet und das beschriebene Verfahren so oft wiederholt, bis die Folge der Näherungspunkte oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Folge der Näherungsorientierungen stehen bleibt.

Der ausgeglichene Punkt wird also in zwei verschiedenen, sich wiederholenden Schritten sukzessiv approximiert, wobei in jedem Schritt einzeln nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen wird. Überwiegt die Genauigkeit der Zentrierung bedeutend über die Genauigkeit der Winkelmessung, gleicht man nach dem Prinzip  $[vv] = \text{Min.}$  aus, im umgekehrten Fall nach  $[qq] = \text{Min.}$  ( $v =$  Verbesserung an der gemessenen Richtung,  $q =$  Querabweichung des ausgeglichenen Punktes von einem fehlerzeigenden Strahl). In diesem Artikel wird nur der Fall  $[vv] = \text{Min.}$  behandelt.

## 2. Die strenge analytische Ausgleichung beim Rückwärtseinschneiden

Die Ergebnisse des bekannten analytischen Ausgleichsverfahrens sollen kurz so weit zusammengestellt werden, als in den später folgenden Ableitungen darauf zurückgegriffen wird. Es werden hier die folgenden Bezeichnungen verwendet (siehe Abb. 1):

- $\alpha_i$  Azimut vom ausgeglichenen Neupunkt  $P$  zum Festpunkt  $A_i$
- $l_i$  gemessene Richtung auf  $P$  nach  $A_i$
- $v_i$  Verbesserung an der Messung  $l_i$ , um auf den ausgeglichenen Wert zu gelangen
- $o$  Orientierungsunbekannte des Satzes
- $x, y$  Koordinaten des ausgeglichenen Punktes  $P$ .

Der Index 0 bezeichnet Näherungswerte. Wie üblich werden nicht direkt die Unbekannten  $x, y, o$  gesucht, sondern die kleinen Differenzen gegenüber Näherungswerten.

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = o - o_0 \quad (2.1)$$

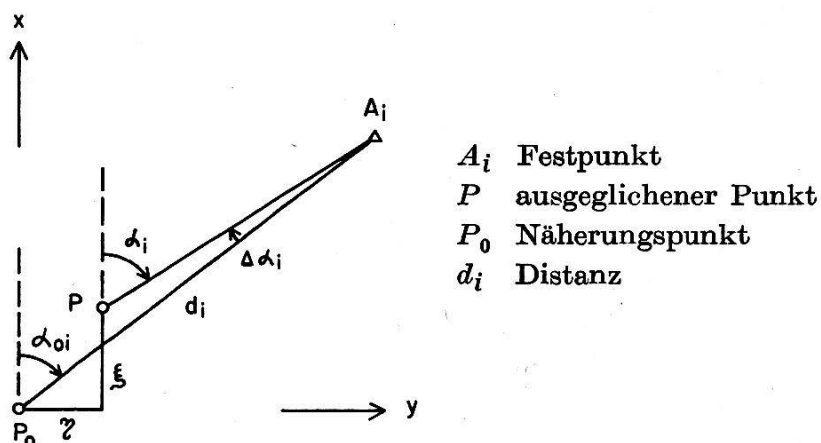


Abb. 1

Das Problem wird nach der Methode der vermittelnden Ausgleichung behandelt.

Die Beobachtungsgleichungen lauten

$$\alpha_i = o + l_i + v_i \quad (2.2)$$

Ersetzt man die unbekanntenen Azimute  $\alpha_i$  mit Hilfe der Gleichungen

$$\alpha_i = \alpha_{0i} + \Delta\alpha_i, \quad \Delta\alpha_i \cong \xi \frac{\sin \alpha_i}{d_i} \rho - \eta \frac{\cos \alpha_i}{d_i} \rho \quad (2.3)$$

durch die Unbekannten  $\xi$  und  $\eta$  und  $o$  durch  $o_0 + \zeta$ , so lauten die Beobachtungsgleichungen

$$\alpha_{0i} + \xi \frac{\sin \alpha_i}{d_i} \rho - \eta \frac{\cos \alpha_i}{d_i} \rho = o_0 + \zeta + l_i + v_i \quad (2.4)$$

und die Fehlergleichungen

$$v_i = \xi \frac{\sin \alpha_i}{d_i} \rho - \eta \frac{\cos \alpha_i}{d_i} \rho - \zeta + \alpha_{0i} - (o_0 + l_i) \quad (2.5)$$

oder mit den üblichen Abkürzungen

$$a_i = \frac{\sin \alpha_i}{d_i} \rho, \quad b_i = -\frac{\cos \alpha_i}{d_i} \rho, \quad f_i = \alpha_{0i} - (o_0 + l_i) \quad (2.6)$$

$$v_i = a_i \xi + b_i \eta - \zeta + f_i \quad (2.7)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots n \quad n = \text{Anzahl der Visuren.}$$

Die Fehlergleichungen stellen ein System von  $n$  Gleichungen mit den  $n + 3$  Unbekannten  $v_1, v_2, \dots, v_n, \xi, \eta, \zeta$  dar.

Die Bedingung  $[v_i v_i] = \text{Min.}$  liefert die drei weiteren Gleichungen

$$[a_i v_i] = 0, \quad [b_i v_i] = 0, \quad [v_i] = 0 \quad (2.8)$$

und ermöglicht damit im allgemeinen eine eindeutige Bestimmung der Unbekannten. Setzt man in die letzten drei Beziehungen die Größen  $v_i$  aus (2.7) ein, entsteht das System der Normalgleichungen

$$\xi [aa] + \eta [ab] - \zeta [a] + [af] = 0 \quad (2.9')$$

$$\xi [ab] + \eta [bb] - \zeta [b] + [bf] = 0 \quad (2.9'')$$

$$-\xi [a] - \eta [b] + \zeta \cdot n - [f] = 0 \quad (2.9''')$$

Dieses System wird meist nicht direkt nach den Unbekannten  $\xi, \eta, \zeta$  aufgelöst, sondern man eliminiert vorgängig die Orientierungsunbekannte  $\zeta$ . Eine gebräuchliche Art ist die Eliminierung nach *Gauss*. Man führt die neuen Richtungskoeffizienten

$$a_i' = a_i - \frac{[a_i]}{n}, \quad b_i' = b_i - \frac{[b_i]}{n}, \quad f_i' = f_i - \frac{[f_i]}{n} \quad (2.10)$$

ein und gelangt zu einem dem Vorwärtseinschneiden analogen System

$$\xi [a'a'] + \eta [a'b'] + [a'f'] = 0 \quad (2.11')$$

$$\xi [a'b'] + \eta [b'b'] + [b'f'] = 0 \quad (2.11'')$$

Wir bilden noch die für später wichtigen Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} [a'] &= 0 & [b'] &= 0 & [f'] &= 0 \\ [a'a'] &= [aa] - \frac{[a]^2}{n} \\ [b'b'] &= [bb] - \frac{[b]^2}{n} \\ [a'b'] &= [ab] - \frac{[a][b]}{n} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

### 3. Elemente der Fehlerellipse [2]

Die Konvergenz des Näherungsverfahrens steht in engem Zusammenhang mit der Fehlerellipse. Es werden darum hier die wichtigsten Elemente der Fehlerellipse angeführt. Es soll angenommen werden, alle Strahlen seien gleich genau beobachtet worden. Der mittlere Fehler an einer beobachteten Richtung werde zu  $m = 1$  angenommen, weil die absolute Größe der Ellipse hier nicht interessiert.

Für das Vorwärtseinschneiden lauten die Elemente der Fehler-einheitsellipse:

$$\text{große Halbachse } A: \quad A^2 = \frac{[aa] + [bb] + W}{2D} \quad (3.1')$$

$$\text{kleine Halbachse } B: \quad B^2 = \frac{[aa] + [bb] - W}{2D} \quad (3.1'')$$

Verdrehungswinkel zwischen großer Halbachse und  $x, y$ -Koordinatensystem

$$\text{tg } (2\Theta) = \frac{-2[ab]}{[aa] - [bb]} \quad (3.1''')$$

Die Abkürzung  $W$  steht für

$$W = \sqrt{([aa] - [bb])^2 + 4[ab]^2} \quad (3.2')$$

und  $D$  für

$$D = [aa][bb] - [ab]^2 \quad (3.2'')$$

Für den Rückwärtseinschnitt aus denselben  $n$  Strahlen lauten die Ausdrücke entsprechend

$$A'^2 = \frac{[a'a'] + [b'b'] + W'}{2D'} \quad \text{tg } (2\Theta') = \frac{-2[a'b']}{[a'a'] - [b'b']} \quad (3.3)$$

$$B'^2 = \frac{[a'a'] + [b'b'] - W'}{2D'} \quad W' = \sqrt{([a'a'] - [b'b'])^2 + 4[a'b']^2}$$

$$\begin{aligned}
D' &= [a' a'] [b' b'] - [a' b']^2 \\
&= \left( [aa] - \frac{[a]^2}{n} \right) \left( [bb] - \frac{[b]^2}{n} \right) - \left( [ab] - \frac{[a][b]}{n} \right)^2 \\
&= [aa][bb] - [ab]^2 - \frac{[aa][b]^2 - 2[ab][a][b] + [bb][a]^2}{n} \\
D' &= D - \frac{[aa][b]^2 - 2[ab][a][b] + [bb][a]^2}{n} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

#### 4. Analytische Behandlung des Näherungsverfahrens

Das Näherungsverfahren liefert an Stelle des ausgeglichenen Punktes  $P$  eine Punktfolge  $P_0, P_1, P_2, P_3 \dots$ , die, wenn das Verfahren brauchbar sein soll, hinreichend rasch gegen  $P$  konvergieren muß.

In der folgenden analytischen Herleitung wird der Punkt in der Fehlerfigur streng nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, im Unterschied zum praktischen Vorgehen, wo er nur eingeschätzt wird. Es ist aber darauf hinzuweisen, daß auch die Einschätzung nach Gesichtspunkten der kleinsten quadratischen Abweichungen geschieht. Die Differenzen zwischen strengem und geschätztem Wert dürfen nur klein sein, soll das Verfahren eine brauchbare Lösung liefern. Wie die Erfahrung zeigt, ist unser Auge im allgemeinen geschickt im Einschätzen nach dem Minimumsprinzip. In praktischen Beispielen liegt der geschätzte Punkt meist sehr gut.

Die Fehlergleichungen sind der Ausdruck der geometrischen Beziehungen zwischen den Beobachtungswerten  $l$  und deren Verbesserungen  $v$  einerseits und den – vorläufig variabeln – Unbekannten  $x, y, o$  (bezogen auf genäherte Werte  $x_0, y_0, o_0$ ) andererseits. Die Unbekannten und die Verbesserungen können im Rahmen der Fehlergleichungen beliebige Werte annehmen. Erst die Ausgleichungsbedingung ( $[vv] = \text{Min.}$  unter Variation einiger oder aller Unbekannten) legt eindeutige Werte fest. Wenn alle Unbekannten variiert werden, führt die Minimumbedingung auf die streng ausgeglichenen Werte, variiert man nur eine oder einige der Unbekannten, ergeben sich Werte, die noch von den frei wählbaren, nicht variierten Unbekannten abhängig sind (im anschließend beschriebenen Verfahren die Näherungswerte auf den verschiedenen Approximationsstufen).

Zum Zwecke der theoretischen Untersuchung des Verfahrens schrittweiser Näherung ist es vorteilhaft, die Korrekturgrößen  $\xi, \eta, \zeta$  anstatt auf beliebige Bezugswerte  $x_0, y_0, o_0$  direkt auf die streng ausgeglichenen Werte zu beziehen. Um Verwechslungen vorzubeugen, werden in diesem Abschnitt alle aus der strengen Ausgleichung resultierenden Größen mit einem Querstrich versehen:  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{o}, \bar{v}_i$ . Sie dürfen durch die ganze Ableitung hindurch als feste Größen angesehen werden,

man kann sie sich zum Beispiel vorgängig des Approximationsverfahrens nach der strengen Methode berechnet denken. Stehen die Größen  $x, y, o, v_i$  ohne Querstrich, sollen sie als Variable aufgefaßt werden.  $\xi, \eta, \zeta$  bedeuten dann nach dem vorhin Gesagten die Abweichungen der Variablen  $x, y, o$  von den ausgeglichenen Werten  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{o}$ . Die ersten, in gewissen Grenzen beliebigen Näherungskoodinaten  $\xi_0, \eta_0$  wollen wir als Ausgangswerte bezeichnen, eigentliche Näherungswerte wollen wir die Größen  $\zeta_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_2, \xi_2, \eta_2 \dots$  auf den einzelnen Approximationsstufen nennen.

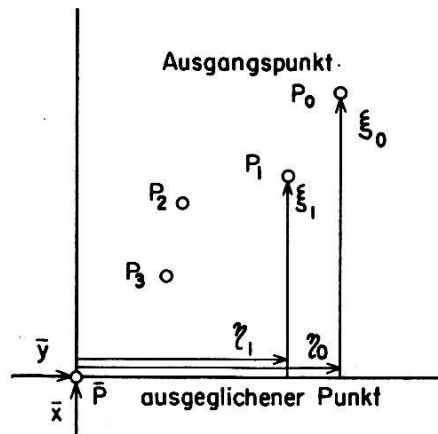


Abb. 2

Wenn man die Formeln für  $v_i$

$$v_i = a_i \xi + b_i \eta - \zeta + f_i \quad (2.7)$$

auf den ausgeglichenen Punkt  $P$  bezieht, werden die Größen  $f_i$  nach (2.6) und (2.2)

$$f_i = \bar{a}_i - (\bar{o} + l_i) = \bar{v}_i.$$

Damit gehen die Formeln für  $v_i$  über in

$$v_i = a_i \xi + b_i \eta - \zeta + \bar{v}_i.$$

Für den Fall der strengen Lösung müssen  $\xi = \eta = \zeta = 0$  und  $v_i = \bar{v}_i$  werden, wie man mit den Normalgleichungen bestätigen kann, deren Absolutglieder nach (2.8) verschwinden und deren triviale Lösung lautet  $\xi = \eta = \zeta = 0$ .

Nach der Vorschrift beim Näherungsverfahren werden aber die Größen  $\xi, \eta, \zeta$  nicht in einem Guß ausgeglichen. Vielmehr werden zuerst die Koordinaten  $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$  festgehalten und ein erster Wert,  $\zeta_1$  für  $\zeta$ , gesucht. Nachher wird die erste Näherungsorientierung,  $\zeta_1$ , festgehalten und die Koordinaten  $\xi, \eta$  nach dem Prinzip  $[vv] = \text{Min.}$  variiert, was auf die ersten Näherungswerte  $\xi_1, \eta_1$  führt; diese werden hinwiederum konstant gehalten und nach  $[vv] = \text{Min.}$  die zweite Näherungsorientierung,  $\zeta_2$ , bestimmt usw.

a) Variation von  $\zeta$

Die Fehlergleichungen haben die Gestalt

$$v_i = a_i \xi_0 + b_i \eta_0 - \zeta + \bar{v}_i$$

Daraus entsteht nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate und bei variablem  $\zeta$  eine Normalgleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [vv]}{\partial \zeta} = -[v_i] = -[a] \xi_0 - [b] \eta_0 + n \cdot \zeta - [\bar{v}_i] = 0$$

und wegen  $[\bar{v}_i] = 0$  (Gleichung 2.8) erhält man den Wert

$$\zeta_1 = \frac{[a] \xi_0 + [b] \eta_0}{n} \quad (4.1)$$

b) Variation von  $\xi$  und  $\eta$

Die Fehlergleichungen lauten

$$v_i = a_i \xi + b_i \eta - \zeta_1 + \bar{v}_i.$$

Daraus entstehen bei variablem  $\xi$  und  $\eta$  die Normalgleichungen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [vv]}{\partial \xi} = [av] = [aa] \xi + [ab] \eta - [a] \zeta_1 = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [vv]}{\partial \eta} = [bv] = [ab] \xi + [bb] \eta - [b] \zeta_1 = 0$$

Die Glieder  $[a\bar{v}] = 0$ ,  $[b\bar{v}] = 0$  verschwinden auch hier nach (2.8). Aus den Normalgleichungen berechnen wir die Unbekannten zu

$$\xi_1 = \frac{[a] [bb] - [b] [ab]}{[aa] [bb] - [ab]^2} \cdot \zeta_1 \quad (4.2')$$

$$\eta_1 = \frac{[b] [aa] - [a] [ab]}{[aa] [bb] - [ab]^2} \cdot \zeta_1 \quad (4.2'')$$

Die Gleichungen (4.1) und (4.2) kann man allgemein für die  $k$ -te Approximationsstufe schreiben:

$$\zeta_k = \frac{[a] \xi_{k-1} + [b] \eta_{k-1}}{n} \quad (4.3')$$

$$\xi_k = \frac{[a] [bb] - [b] [ab]}{[aa] [bb] - [ab]^2} \cdot \zeta_k \quad (4.3'')$$

$$\eta_k = \frac{[b] [aa] - [a] [ab]}{[aa] [bb] - [ab]^2} \cdot \zeta_k \quad (4.3''')$$

## 5. Die Lage der Näherungspunkte

Nach den Gleichungen (4.3) könnte es scheinen, als ob die Näherungspunkte von den Beobachtungen unabhängig wären, weil diese in den Formeln nicht explizit auftreten. Die Beobachtungsgrößen  $l_i$  sind aber implizit in den Größen  $\xi_0$  und  $\eta_0$  enthalten, als den Koordinatendifferenzen zwischen Ausgangspunkt  $P_0$  und ausgeglichenem Punkt  $P$ .  $P$  wird ja als aus der strengen Ausgleichung berechnet gedacht. Es können hingegen andere Größen angegeben werden, die unabhängig von den Beobachtungen sind und nur von der geometrischen Konfiguration der Bestimmungsstrahlen abhängen.

Als erstes wollen wir fragen, welches der geometrische Ort der Näherungspunkte  $\xi_{k-1}$ ,  $\eta_{k-1}$  ist, die auf eine konstante Näherungsorientierung  $\zeta_k$  führen.

Nach Gleichung (4.3')

$$\frac{1}{n} ([a] \xi_{k-1} + [b] \eta_{k-1}) = \zeta_c = \text{const.}$$

ist das die Gerade

$$\eta_{k-1} = - \frac{[a]}{[b]} \xi_{k-1} + \frac{n \cdot \zeta_c}{[b]} \quad (5.1)$$

mit der Steigung 
$$\mu_1 = - \frac{[a]}{[b]} \quad (5.2)$$

und dem Achsabschnitt auf der  $y$ -Achse  $\frac{n \cdot \zeta_c}{[b]}$ .

Speziell ergeben die Näherungspunkte auf der Geraden  $g_1$ :

$$\eta_{k-1} = - \frac{[a]}{[b]} \xi_{k-1} \quad (5.1')$$

die Orientierungsunbekannte  $\zeta_c = 0$ . Liegt der Ausgangspunkt zufällig auf dieser Geraden durch den ausgeglichenen Punkt, so liefert das Verfahren sofort die exakte Lösung. Gelänge es, diese Gerade zu finden, so würde man im ersten Schritt auf den streng ausgeglichenen Punkt stoßen. Nun ist es sehr leicht, die Richtung dieser Geraden anzugeben, ihre Lage setzt aber die Kenntnis des ausgeglichenen Punktes bereits voraus.

Der Wert der Unbekannten  $\zeta_k$  ist dem Abstand  $s_{k-1}$  des Näherungspunktes  $P_{k-1}$  von der Geraden  $\eta = - \frac{[a]}{[b]} \xi$  direkt proportional, denn aus dem rechtwinkligen Dreieck in Abb. 3 geht hervor

$$s_{k-1} = \frac{n \cdot \zeta_k}{[b]} \cdot \cos \nu$$

und weil

$$\operatorname{tg} \nu = \mu_1 = -\frac{[a]}{[b]}, \text{ ist } s_{k-1} = \frac{n \cdot \zeta_k}{[b]} \cdot \frac{[b]}{\sqrt{[a]^2 + [b]^2}}$$

oder

$$\zeta_k = \frac{\sqrt{[a]^2 + [b]^2}}{n} \cdot s_{k-1}.$$

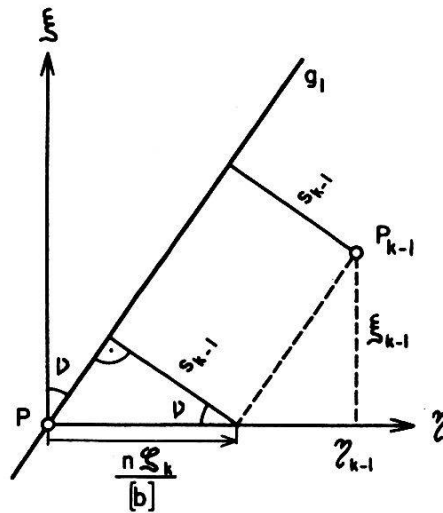


Abb. 3

Weiter soll der geometrische Ort des Punktes  $P_k (\xi_k, \eta_k)$  untersucht werden, für alle Werte der Näherungsorientierung  $\zeta_k$ . Aus den Gleichungen (4.3'') und (4.3''') folgt

$$\eta_k = \frac{[b][aa] - [a][ab]}{[a][bb] - [b][ab]} \cdot \xi_k. \quad (5.3)$$

Der Punkt  $P_k$  läuft auf einer Geraden  $g_2$  durch den ausgeglichenen Punkt. Der Abstand von  $P_k$  zum ausgeglichenen Punkt  $P$  ist proportional zu  $\zeta_k$ . Alle Näherungspunkte,  $P_1, P_2, P_3 \dots$ , liegen demzufolge auf einer Geraden durch den ausgeglichenen Punkt mit dem Steigungsfaktor

$$\mu_2 = \frac{[b][aa] - [a][ab]}{[a][bb] - [b][ab]}. \quad (5.4)$$

Nur der willkürliche Ausgangspunkt  $P_0$  macht davon eine Ausnahme.

Die Geraden Gleichung (5.1') und (5.3) haben die Richtungen von konjugierten Durchmesser in den Fehlerellipsen für das reine Rückwärtseinschneiden wie auch für das reine Vorwärtseinschneiden aus den  $n$  gegebenen Strahlen.

Um den Beweis für den Vorwärtseinschnitt zu führen, schreiben wir

alle Formeln im Hauptachsensystem der zugehörigen Fehlerellipse. Im Hauptachsensystem ist

$$\operatorname{tg}(2\Theta) = \frac{2[ab]}{[aa] - [bb]} = 0$$

woraus folgt  $[ab] = 0$ .

Die beiden Steigungsfaktoren sind dann

$$\mu_1 = -\frac{[a]}{[b]} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \frac{[b][aa]}{[a][bb]}.$$

Das Produkt wird

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = -\frac{[aa]}{[bb]}.$$

Sollen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Richtungen von konjugierten Durchmessern sein, muß im System der Hauptachsen gelten

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = -\frac{A^2}{B^2}.$$

Im speziellen System wird

$$A^2 = \frac{[aa] + [bb] + [aa] - [bb]}{2D} = \frac{[aa]}{D} \quad (5.5')$$

$$B^2 = \frac{[aa] + [bb] - [aa] + [bb]}{2D} = \frac{[bb]}{D} \quad (5.5'')$$

und  $-\frac{A^2}{B^2} = -\frac{[aa]}{[bb]} = \mu_1 \cdot \mu_2$ , q. e. d.

Für das Rückwärtseinschneiden führt die Bedingung

$$\operatorname{tg}(2\Theta') = 0 \quad \text{auf} \quad [a'b'] = 0$$

oder nach Gleichung (2.12) auf  $[ab] = \frac{[a][b]}{n}$ .

Die Steigungsfaktoren werden nach Gleichungen (5.2) und (5.4)

$$\mu_1 = -\frac{[a]}{[b]}, \quad \mu_2 = \frac{[b][aa] - \frac{[a]^2[b]}{n}}{[a][bb] - \frac{[b]^2[a]}{n}}$$

und

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = -\frac{[aa] - \frac{[a]^2}{n}}{[bb] - \frac{[b]^2}{n}}$$

Es wird analog den Gleichungen (5.5)

$$A'^2 = \frac{[a'a']}{D'}, \quad B'^2 = \frac{[b'b']}{D'}$$

und

$$-\frac{A'^2}{B'^2} = -\frac{[a'a']}{[b'b']} = -\frac{[aa] - \frac{[a]^2}{n}}{[bb] - \frac{[b]^2}{n}} = \mu_1 \cdot \mu_2, \text{ q. e. d.}$$

Die Abb. 4 zeigt an einem durchgerechneten Beispiel die Lage der beiden Geraden und die Fehlerellipsen. In der Figur ist auch dargestellt, wie die Näherungspunkte auf einer Geraden gegen den ausgeglichenen Punkt zulaufen. Sobald das Gesetz der Annäherung bekannt ist, kann man Aussagen über die Güte der Konvergenz machen.

Weil nach Gleichungen (4.3'') und (4.3''')  $\xi_k$  und  $\eta_k$  proportional zu  $\zeta_k$  sind, gilt das auch für den Abstand  $\overline{P_k P} = p_k$  ( $k \neq 0$ ). Man darf darum schreiben

$$\frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_k} = \frac{\overline{P_{k+1} P}}{\overline{P_k P}} = \frac{p_{k+1}}{p_k}$$

Es genügt also, die Folge  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \dots$  auf Konvergenz zu untersuchen. Dazu ersetzen wir in der Gleichung

$$\zeta_{k+1} = \frac{[a] \xi_k + [b] \eta_k}{n},$$

die Größen  $\xi_k$  und  $\eta_k$  durch die Gleichungen (4.3'') und (4.3''') und erhalten

$$\zeta_{k+1} = \frac{[a]^2 [bb] - 2 [a] [b] [ab] + [b]^2 [aa]}{n ([aa] [bb] - [ab]^2)} \cdot \zeta_k.$$

Das Verhältnis  $\zeta_{k+1}/\zeta_k$  ist unabhängig vom Index  $k$ .

$$\zeta_{k+1}/\zeta_k = \text{const.} = C \quad \text{für } k = 1, 2, 3 \dots$$

Eine Folge mit dieser Eigenschaft heißt eine geometrische Folge mit dem Konvergenzfaktor  $C$ . Man kann auch schreiben  $\zeta_{k+1} = C^k \cdot \zeta_k$ .

$C$  ist eine Größe, die nur von der Konfiguration der Festpunkte und des Neupunktes abhängt und nicht von der Lage des Ausgangspunktes, denn  $a_i$  und  $b_i$  sind die Richtungskoeffizienten und  $n$  die Anzahl der Richtungen.

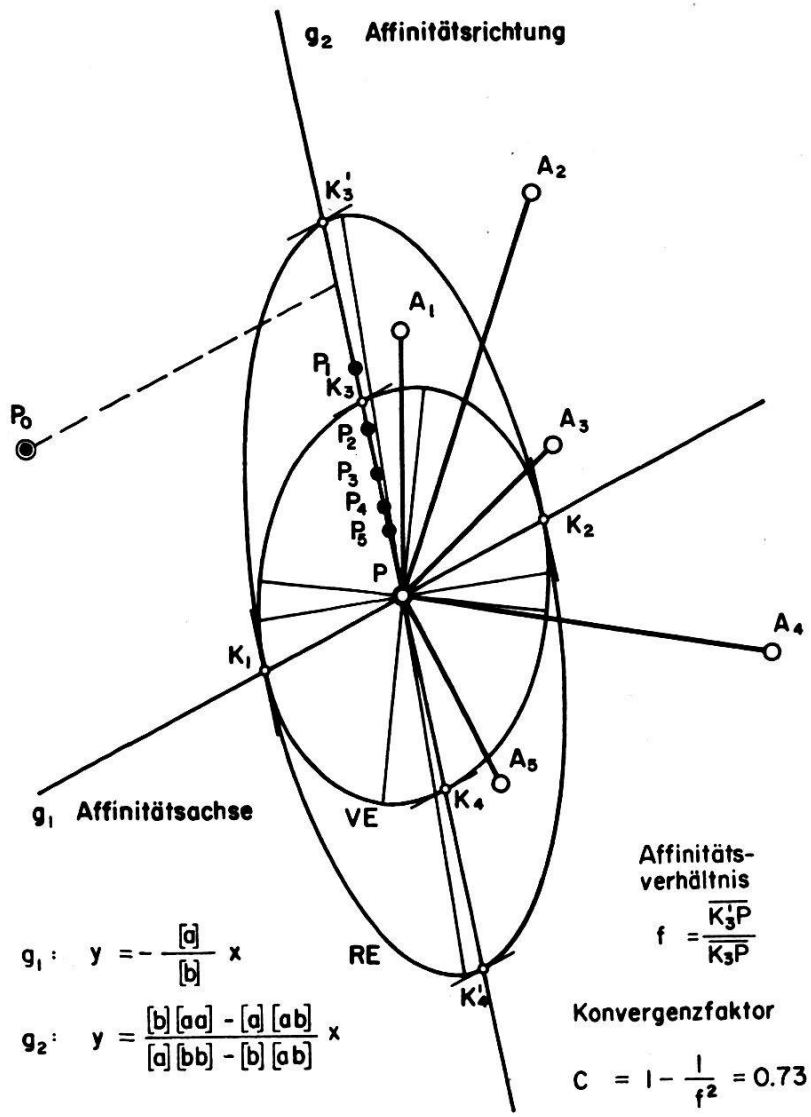


Abb. 4. Fehlerellipsen und Näherungspunkte.

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  Festpunkte,  $P$  Neupunkt  
 $P_0$  Ausgangspunkt.  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \dots$  Näherungspunkte  
 $VE$  Fehlerellipse für das Vorwärtseinschneiden  
 $RE$  Fehlerellipse für das Rückwärtseinschneiden

6. Untersuchung und anschauliche Deutung des Konvergenzfaktors  $C$

Der Konvergenzfaktor

$$C = \frac{[a]^2 [bb] - 2 [a] [b] [ab] + [b]^2 [aa]}{n ([aa] [bb] - [ab]^2)} \quad (6.1)$$

charakterisiert die Güte der Konvergenz vollständig. Je nachdem  $C > 1$ ,  $= 1$ ,  $< 1$  ist, divergiert die Folge der Näherungspunkte, bleibt sie stehen oder konvergiert sie.

Eine allgemeine Aussage läßt sich sofort mit Hilfe der Determinante des Normalgleichungssystems (2.9) machen, die in der Theorie der

Matrizen als Gramsche Determinante bekannt ist. Im vorliegenden Fall ist es speziell eine Gramsche Determinante dritter Ordnung (siehe [3]). Als Determinante einer Gaußschen Transformationsmatrix besitzt sie die Eigenschaft  $G \geq 0$ . Ausführlich geschrieben, lautet die Bedingung

$$G = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & -[a] \\ [ab] & [bb] & -[b] \\ -[a] & -[b] & n \end{vmatrix} =$$

$$= n [aa] [bb] + 2 [a] [b] [ab] - [a]^2 [bb] - [b]^2 [aa] - n [ab]^2 \geq 0,$$

und daraus folgt sofort

$$\frac{[a]^2 [bb] - 2 [a] [b] [ab] + [b]^2 [aa]}{n ([aa] [bb] - [ab]^2)} = C \leq 1. \quad (6.2)$$

Weiter läßt sich zeigen, daß  $C \geq 0$ .

Der Nenner wird nach (3.2'') mit  $nD$  abgekürzt.  $D$  ist die Normalgleichungsdeterminante für das reine Vorwärtseinschneiden und damit eine Gramsche Determinante zweiter Ordnung. Es gilt darum  $D \geq 0$ , welche Beziehung auch unter dem Namen Schwarzsche Ungleichung bekannt ist. Weil  $n$  ganz und positiv ist, gilt für den Nenner allgemein  $nD \geq 0$ .

Den Zähler

$$Z = [a]^2 [bb] - 2 [a] [b] [ab] + [b]^2 [aa]$$

vergleichen wir mit dem Ausdruck

$$Q = [a]^2 [bb] - 2 [a] [b] \sqrt{[aa]} \sqrt{[bb]} + [b]^2 [aa].$$

Dieser läßt sich zu dem reinen Quadrat

$$Q = ([a] \sqrt{[bb]} - [b] \sqrt{[aa]})^2 \geq 0$$

umformen und ist darum nie negativ.

Man muß nun die beiden Fälle unterscheiden:

$$\left. \begin{array}{l} 1. -2 [a] [b] [ab] \geq 0 \\ 2. -2 [a] [b] [ab] \leq 0 \end{array} \right\} \text{ in der Zahlenrechnung.}$$

Im ersten Fall wird  $Z \geq 0$ , weil das erste und dritte Glied nie negativ werden. Im zweiten Fall läßt sich wieder die Schwarzsche Ungleichung anwenden:

$$[aa] [bb] - [ab]^2 \geq 0$$

$$| \sqrt{[aa]} \cdot \sqrt{[bb]} | \geq | [ab] |$$

und daraus

$$| 2 [a] [b] \cdot \sqrt{[aa]} \cdot \sqrt{[bb]} | \geq | 2 [a] [b] [ab] |$$

und also

$$Z \geq Q \geq 0, \quad C = \frac{Z}{nD} \geq 0. \quad (6.3)$$

Mit  $1 \geq C \geq 0$  ist die Konvergenz des Verfahrens bewiesen, wobei im Grenzfall von  $C = 1$  der Prozeß stehen bleibt.

### Untersuchung des Grenzfalles $C = 1$

$C = 1$  bedeutet  $G = 0$ . Aus der Matrizen­theorie ist bekannt, daß die Gramsche Determinante dann und nur dann zu Null werden kann, wenn die drei  $n$ -dimensionalen Spaltenvektoren

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

der Fehlergleichungsmatrix von Gleichung (2.7) untereinander linear abhängig sind. Da für das Rückwärtseinschneiden mindestens drei Richtungen gebraucht werden, ist  $n \geq 3$ . Ein Kriterium für die lineare Abhängigkeit ist das Verschwinden aller Unterdeterminanten vom Range 3 der Fehlergleichungsmatrix. Für die ersten drei Zeilenvektoren zum Beispiel lautet die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -1 \\ a_2 & b_2 & -1 \\ a_3 & b_3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sin a_1}{d_1} & -\frac{\cos a_1}{d_1} & -1 \\ \frac{\sin a_2}{d_2} & -\frac{\cos a_2}{d_2} & -1 \\ \frac{\sin a_3}{d_3} & -\frac{\cos a_3}{d_3} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Determinante ausgerechnet ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{\sin a_1 \cos a_2}{d_1 d_2} + \frac{\sin a_3 \cos a_1}{d_1 d_3} + \frac{\sin a_2 \cos a_3}{d_2 d_3} \\ & - \frac{\cos a_1 \sin a_2}{d_1 d_2} - \frac{\cos a_3 \sin a_1}{d_1 d_3} - \frac{\cos a_2 \sin a_3}{d_2 d_3} = 0 \\ & d_3 (\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2) \\ & + d_2 (\sin a_3 \cos a_1 - \cos a_3 \sin a_1) \\ & + d_1 (\sin a_2 \cos a_3 - \cos a_2 \sin a_3) = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Es läßt sich nun zeigen, daß diese Bedingung nur für vier auf einem Kreis liegende Punkte erfüllt sein kann.

Von den vier Punkten  $P$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  kann man unter Berücksichtigung von Gleichung (6.4) nur drei beliebig wählen. Die einschränkende Bedingung (6.4) erlaubt bei einmal getroffener Wahl von zum Beispiel  $P$ ,

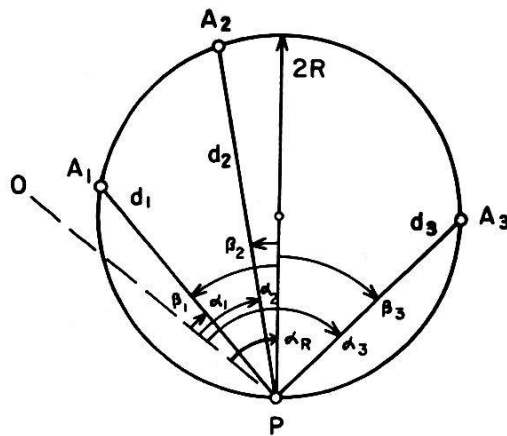


Abb. 5

$A_1$ ,  $A_2$  nur noch, daß sich der Punkt  $A_3$  auf einer Kurve bewegen kann. Die Gleichung dieser Kurve heißt in den Variablen  $\alpha_3$ ,  $d_3$  geschrieben nach (6.4)

$$d_3 = \frac{\sin \alpha_3 (d_1 \cos \alpha_2 - d_2 \cos \alpha_1) + \cos \alpha_3 (d_2 \sin \alpha_1 - d_1 \sin \alpha_2)}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}$$

Man darf abgekürzt schreiben

$$d_3 = M \sin \alpha_3 + N \cos \alpha_3, \quad (6.5)$$

wo  $M$  und  $N$  Konstanten sind. Durch eine Drehung der Nullrichtung um den Winkel  $\alpha_R$  (siehe Abb. 5) läßt sich diese Gleichung immer in die Form überführen  $d_3 = 2 R \cos \beta_3$ , was die Gleichung eines Kreises mit dem Radius  $R$  in Polarkoordinaten darstellt, wenn der Koordinatenursprung auf der Peripherie liegt und die Nullrichtung mit dem Durchmesser zusammenfällt.

Substituiert man nämlich  $\alpha_i = \alpha_R + \beta_i$ , heißt Gleichung (6.5)

$$\begin{aligned} d_3 &= M (\sin \alpha_R \cos \beta_3 + \cos \alpha_R \sin \beta_3) + N (\cos \alpha_R \cos \beta_3 - \sin \alpha_R \sin \beta_3) \\ &= \sin \beta_3 (M \cos \alpha_R - N \sin \alpha_R) + \cos \beta_3 (M \sin \alpha_R + N \cos \alpha_R). \end{aligned}$$

Wählt man nun  $\alpha_R$  so, daß  $M \cos \alpha_R = N \sin \alpha_R$  oder  $\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{M}{N}$ , geht daraus  $d_3 = 2 R \cdot \cos \beta_3$  hervor, mit  $R = \frac{1}{2} (M \sin \alpha_R + N \cos \alpha_R)$ .

**Schlußfolgerung:** Der Konvergenzfaktor  $C$  kann nur gleich 1 werden, wenn die vier Punkte  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $P$  auf einem Kreis liegen. (Gefährlicher Kreis beim Rückwärtseinschneiden.) Wird  $P$  aus mehr als drei Punkten  $A_i$  bestimmt, gilt der Satz für irgendeine Kombination von Neupunkt  $P$  und drei Festpunkten  $A_i$ .  
(Fortsetzung folgt)