Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 58 (1960)

Heft: 7

Artikel: Le fractionnement des calculs de compensation et la détermination des poids en cas de covariance

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-216104

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 7 • LVIII. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Juli 1960

Le fractionnement des calculs de compensation et la détermination des poids en cas de covariance

Par A. Ansermet

Considérations préliminaires

Au cours de ces dernières années certaines tendances se sont manifestées visant à simplifier les calculs de compensation soit en ayant recours à des symboles ce qui est maintenant courant dans tous les domaines de la technique, soit en fractionnant les opérations. Les calculateurs se préoccupent en outre davantage que par le passé de rechercher dans quelle proportion les valeurs initiales (poids, etc.) sont améliorées grâce à la compensation ([8], p. 395–397). Ces calculs sont, il est vrai, parfois un peu fastidieux.

Le fractionnement, en matière de compensation, peut revêtir des formes multiples dont certaines sont bien connues. Remarquons en outre que grâce à de simples transformations linéaires on peut passer d'un mode de compensation à un autre.

En partant d'un système initial tel que

$$-f_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots\ldots \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots n) \qquad (1)$$

on peut grouper ces équations par deux, trois, etc., ce qui modifie le caractère du calcul.

Le système (1) a trait à des observations mutuellement indépendantes; si ce n'est pas le cas, on crée ce que parfois l'on appelle une dépendance stochastique dont un exemple concret sera développé plus loin. Ce problème devient alors complexe; la corrélation ou la covariance entre les éléments initiaux devient fonction de coefficients appelés tantôt comultiplicateurs, tantôt cofacteurs. Il n'est pas toujours facile d'attribuer à ces derniers des valeurs suffisamment précises et les calculs deviennent en général moins simples.

Ce genre de problèmes avait fait sans doute depuis assez longtemps l'objet de recherches, et il faut présumer qu'il n'avait pas échappé

notamment à l'esprit perspicace de C. F. Gauss; mais ce titan de la science mathématique ne se souciait guère de livrer à la publication les résultats de toutes ses investigations.

Parmi les moyens auxiliaires de calcul, on sait que l'emploi de symboles joue un certain rôle. L'algèbre matricielle en particulier, qui fut créée surtout en vue de son application en physique, rend des services dans le domaine des compensations. L'établissement de formules, le calcul littéral sous ses diverses formes, tirent profit de l'emploi de symboles. Le calcul matriciel ne permet du reste pas, par lui-même, de résoudre des problèmes que l'algèbre classique ne saurait résoudre.

Quant au calcul numérique proprement, il ne subit guère de simplifications; on est ramené à la règle connue de *Cramer* si les matrices à inverser sont quelconques et aux méthodes de Gauss-Doolittle, v. Gruber, Cholesky, etc., si les matrices sont symétriques. Il ne faut donc pas que les praticiens se fassent trop d'illusions à la veille d'appliquer ces moyens auxiliaires de calcul.

Compensations fractionnées

Parmi les formes nombreuses qui peuvent se présenter considérons le cas simple d'observations médiates scindées en deux groupes. Le premier groupe n'ayant pas donné satisfaction quant à la précision des résultats, on a recours à de nouvelles mesures dont le nombre peut être inférieur, égal ou supérieur à celui des inconnues. Pour le premier groupe on a:

$$\left\{\begin{array}{lll} -f_1 + v_1 = +0.707\,dx + 0.707\,dy & \text{poids } p_1 = 1 \\ -f_2 + v_2 = +0.707\,dx - 0.707\,dy & \text{poids } p_2 = 1 \\ -f_3 + v_3 = +0.8\,dx \quad + 0.6\,dy & \text{poids } p_3 = 1.25 \\ -f_4 + v_4 = +0.6\,dx \quad - 0.8\,dy & \text{poids } p_4 = 1.25 \end{array}\right. \qquad (2)$$

Il s'agit d'un point déterminé par des mesures linéaires, les inconnues étant des corrections à apporter à des valeurs provisoires des coordonnées (X_o, Y_o). On a immédiatement:

$$[paa] = [pbb] = 2.25, [pab] = 0; \; Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{1}{2.25} = 4/9$$

et pour les quatre binômes $(-f_i + v_i)$ on a:

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = Q_{44} = 4/9$$

Quant à l'erreur quadratique moyenne, elle se déduit de:

$$m^2 \cong [pvv] : 2$$

Dans certains cas, il faut déterminer aussi les valeurs Q_{12}, Q_{13}, Q_{23} .....

$$(-f_1 + v_1) + (-f_2 + v_2) = 1.414\,dx$$

$$Q_{11} + Q_{22} + 2\,Q_{12} = 2\,Qxx \quad \text{ou} \quad Q_{12} = 0$$

ce que l'on pouvait présumer

$$(-f_1 + v_1) + (-f_3 + v_3) = 1.507\, dx + 1.307\, dy$$

$$Q_{11} + Q_{33} + 2\, Q_{13} = (\overline{1.507}^2 + \overline{1.307}^2)\frac{4}{9}$$

d'où l'on déduit Q_{13}; on fait de même pour Q_{23}.

2e phase des calculs. Une première solution consiste à englober les mesures primitives et les nouvelles, supposées au nombre de trois. Les calculs effectués pour résoudre le système (2) ne sont pas inutiles quand on passe au système (3). Nous aurons deux surcorrections (dx), (dy) et 7 valeurs $v'_1, v'_2 \ldots\ldots v'_7$

$$m'^2 \cong [pv'v'] : 5$$

La comparaison des m et m' présente de l'intérêt.

Ecrivons la matrice des coefficients de (dx) et (dy)

$$(3)\quad \begin{bmatrix} +0.707 & +0.707 \\ +0.707 & -0.707 \\ +0.80 & +0.60 \\ +0.60 & -0.80 \\ +0.643 & +0.766 \\ +0.342 & -0.940 \\ -0.985 & +0.174 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p_1 = 1 \\ p_2 = 1 \\ p_3 = 1.25 \\ p_4 = 1.25 \\ p_5 = 1.5 \\ p_6 = 1.5 \\ p_7 = 1.5 \end{matrix}$$

$[pab] = 0$
$[paa] = [pbb] = 4.5 = 9/2$
$Q_{xx} = Q_{yy} = 2/9$
$Q_{11} = Q_{22} = \ldots Q_{77} = 2/9 =$
$= 1 : P_i \ (i = 1,2 \ldots 7)$
Au point calculé on a un cercle d'erreur de rayon égal à $m' : \sqrt{4.5}$

$$\textit{Contrôle:}\ S = [p:P]_1^7 = 2 \times \frac{1}{4.5} + 2 \times \frac{1.25}{4.5} + 3 \times \frac{1.5}{4.5} = \frac{9}{4.5} = 2$$

(2 inconnues)

Une autre solution, mais qui ici est moins à recommander, consiste à combiner les trois dernières équations avec des éléments fournis par la première phase des calculs ([4], p. 96).

Dans le système d'équations initiales on peut rencontrer simultanément des inconnues $x, y, z \ldots\ldots$ et les $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots$ Ce cas est connu (voir [6]). Le calcul des $Q_{12}, Q_{13}, Q_{23} \ldots\ldots Q_{67}$ s'effectue aussi sans difficulté. C'est en fonction de ces coefficients que l'on détermine les écarts dits rectangulaires $m_{12}, m_{13}, m_{23} \ldots\ldots$

$$m^2_{12} : m^2_{13} : m^2_{23} \ldots\ldots = Q_{12} : Q_{13} : Q_{23} \ldots\ldots$$

Les Q de la seconde phase des calculs ne sont pas les mêmes que ceux de la première phase.

Observations initiales mutuellement dépendantes

Le problème posé par la compensation de telles mesures devient ici plus complexe. Il convient de faire intervenir la notion de covariance laquelle nécessite l'emploi d'éléments exempts de dimensions (comultiplicateurs ou cofacteurs). Une remarque préliminaire s'impose: en matière de compensation, aucune solution n'est absolument exempte d'arbitraire, que l'on applique ou qu'on s'écarte du principe des moindres carrés. La méthode matricielle peut intervenir ici comme auxiliaire du

calcul, mais il ne faut pas exagérer le rôle qu'elle joue. Le calculateur aura surtout à effectuer des multiplications et des inversions de matrices. Avant de poursuivre, il convient de définir de façon aussi explicite que possible ce que l'on entend par la corrélation. Il s'agit d'exprimer par des valeurs numériques le fait que des observations ne sont pas indépendantes mutuellement; ainsi que le fait remarquer *R. Hugershoff* (Korrelationsrechnung, Sammlung Wichmann), on ne peut en général fournir que des valeurs présumées, probables («stochastiques»). Si des mesures sont effectuées dans un court intervalle de temps, dans les mêmes circonstances (température, pression, humidité), il faut craindre une corrélation caractérisée par des coefficients (comultiplicateurs) plus élevés ([4], p. 85). Certains praticiens préconisent d'avoir recours à une précompensation; cette première phase des calculs fournit alors des éléments pour établir la matrice dite des comultiplicateurs. Une telle solution (*Vorausgleichung*) revient à fractionner le problème; ce n'est pas nouveau.

Ces diverses considérations montrent que le problème est complexe; le but du présent article n'est pas de le traiter dans son ensemble. A l'aide de la méthode matricielle on se bornera à traiter un cas concret du type standard. Se basant sur les résultats obtenus, en faisant abstraction ou non des éléments hors-diagonale dans la matrice, le lecteur pourra se former une opinion. C'est le langage des chiffres qui exprime le mieux le rôle joué par la covariance.

Dans le problème traité si-dessus où $n = 7$ les matrices des poids et comultiplicateurs sont diagonales, cas fort simple de matrices réciproques

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ & & 1.25 & & & & \\ & & & 1.25 & & & \\ & & & & 1.5 & & \\ & & & & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ & & 0.8 & & & & \\ & & & 0.8 & & & \\ & & & & 2/3 & & \\ & & & & & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

elles sont de plus carrées, symétriques et non singulières (déterminants non nuls). Une matrice est un opérateur; il ne faut pas confondre avec un déterminant.

Produit matriciel. Considérons les matrices A, rectangulaire à 6 éléments, et B, carrée à 9 éléments, ainsi que leur produit C ([4], p. 113).

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & A_{22} & \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{13} & A_{23} & \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}$$

Les éléments de C seront:

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ C_{13} &= A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33} \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \\ C_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \\ C_{23} &= A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} \end{aligned}$$

La multiplication de matrices n'est pas commutative.

Réciprocité des matrices. Il n'existe pas, à proprement parler, de division en calcul matriciel. Par contre, on peut définir l'inverse d'une matrice. En compensation le cas le plus courant porte sur la matrice symétrique non singulière en vue d'effectuer une transformation linéaire, c'est-à-dire une élimination par la méthode usuelle des coefficients indéterminés ([1], p. 295); considérons le cas particulier suivant très simple pour faciliter le raisonnement:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 = y_1 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 = y_2 \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 = cy_1 + dy_2 + dy_3 \\ x_2 = dy_1 + cy_2 + dy_3 \\ x_3 = dy_1 + dy_2 + cy_3 \end{cases}$$

d'où les matrices réciproques:

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} c & d & d \\ d & c & d \\ d & d & c \end{bmatrix}$$

ce qui exige: $\begin{cases} ac + 2\,bd = 1 \\ bc + (a + b)\,d = 0 \end{cases}$

et si on a n lignes et n colonnes au lieu de trois:

$$\begin{cases} ac + (n - 1)\,bd = 1 \\ bc + \left\{a + (n - 2)\,b\right\} d = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Dans les calculs de compensation, la matrice de gauche joue un grand rôle; elle sera dite des comultiplicateurs ou cofacteurs, et sa réciproque sera celle des poids. Les exemples ci-après permettront de mieux saisir ces notions.

Application. Considérons le système très simple:

$$-f_i + v_i = a_i x + b_i y \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

avec la matrice des poids:

$$\begin{bmatrix} p & p' & p' \\ p' & p & p' \\ p' & p' & p \end{bmatrix}$$

qui est l'inverse de celle des comultiplicateurs et admettons tout d'abord que les p' soient nuls. Multiplions la matrice des coefficients a_i, b_i par celle des poids:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \\ p & p' & p' \\ a_2 & b_2 & \\ p' & p & p' \\ a_3 & b_3 & \\ p' & p' & p \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} pa_1 & pb_1 \\ a_1 & b_1 \\ pa_2 & pb_2 \\ a_2 & b_2 \\ pa_3 & pb_3 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

puis multiplions ce premier produit par la matrice des coefficients: Le second produit fournit les coefficients des équations normales relatives au système (5) valeurs familières

$$\text{produit} \begin{bmatrix} pa_1 & pa_2 & pa_3 \\ pb_1 & pb_2 & pb_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} [paa] & [pab] \\ [pab] & [pbb] \end{bmatrix}$$

second produit

Admettons les p' différents de zéro et formons les mêmes produits; les résultats obtenus seront ensuite interprétés ainsi que le rôle joué par les p'. Le premier produit devient alors:

$$\begin{bmatrix} pa_1 + p'(a_2 + a_3) & pa_2 + p'(a_1 + a_3) & pa_3 + p'(a_1 + a_2) \\ pb_1 + p'(b_2 + b_3) & pb_2 + p'(b_1 + b_3) & pb_3 + p'(b_1 + b_2) \end{bmatrix}$$

et le second produit:

$$\begin{bmatrix} pa_1 + p'(a_2 + a_3) & pb_1 + p'(b_2 + b_3) \\ a_1 & b_1 \\ pa_2 + p'(a_1 + a_3) & pb_2 + p'(b_1 + b_3) \\ a_2 & b_2 \\ pa_3 + p'(a_1 + a_2) & pb_3 + p'(b_1 + b_2) \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

second produit
$$\begin{bmatrix} [paa] + 2\,p'(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) & [pab] + p'[b_1(a_2 + a_3) + b_2(a_1 + a_3) + b_3(a_1 + a_2)] \\ [pab] + p'(a_1(b_2 + b_3) + a_2(b_1 + b_3) + a_3(b_1 + b_2)) & [pbb] + 2\,p'(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) \end{bmatrix}$$

ce sont les nouveaux coefficients des équations normales du système (5).

Or on sait que la matrice des comultiplicateurs des inconnues compensées et celle du système d'équations normales sont réciproques.

Pour tenir compte des p' une solution consiste à rendre minimum l'expression de forme biquadratique ci-après, adaptée au cas particulier:

$$[pvv] + 2\,p'(v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3) = \text{minimum} \qquad (5')$$

Bien entendu dans de nombreux problèmes les p' ne sont pas tous égaux mutuellement. Bornons-nous à écrire les termes en x^2 et xy:

$$x^2 \left\{ [paa] + 2\,p'(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) \right\}$$
$$+ xy \left\{ 2\,[pab] + 2\,p'(a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2) \right\} + \ldots\ldots$$

En rendant nulle la demi-dérivée par rapport à x on retrouve immédiatement deux éléments du second produit matriciel; on procédera de même en dérivant par rapport à y. On exprime sous cette forme la covariance. Un point faible de la méthode est que la détermination des comultiplicateurs repose parfois sur des bases quelque peu fragiles; de plus les calculs numériques peuvent devenir assez touffus malgré l'emploi de symboles.

Exemple numérique (problème standard)

Considérons le système:

$$-f_i + v_i = a_ix + b_iy + c_iz \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots 7) \qquad (6)$$

qui sera traité par les deux méthodes, les p' étant tout d'abord nuls. Il sera intéressant de comparer les résultats obtenus à posteriori.

La matrice des coefficients a_i, b_i, c_i est, pour des valeurs toutes positives:

$$\begin{array}{ccc} a_i & b_i & c_i \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et pour les équations normales:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (p = 1,\ p' = 0)$$

d'où $Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = 0.375$; $\quad Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = -0.125$

et pour les poids amplifiés:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_3} = 0.375, \quad \frac{1}{P_4} = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{P_6} = 0.5, \quad \frac{1}{P_7} = 0.375$$

Contrôle:

$$S = [p : P]_1^7 = 3 \times 0.375 + 3 \times 0.5 + 0.375 = 3 \quad \text{(3 inconnues)} \qquad (7)$$

Les poids initiaux sont amplifiés 2.33 fois en moyenne (moindres carrés).

Comultiplicateurs à posteriori. Bien que ces éléments ne présentent pas un intérêt primordial, il est aisé de les calculer.

Considérons Q_{67} par exemple; on a:

$(-f_6 + v_6) + (-f_7 + v_7) = 2\,x + 2\,y + z$ ou, plus simplement
$(-f_7 + v_7) - (-f_6 + v_6) = z$
$Q_{66} + Q_{77} - 2\,Q_{67} = Qzz$
$0.5 + 0.375 - 2\,Q_{67} = 0.375 \qquad Q_{67} = +0.25$

Rôle des p'. Revenons aux équations (4) et admettons, en se basant sur l'expérience et pour exprimer que les observations ne sont plus indépendantes mutuellement:

$$a = 1 \qquad b = +0.25 \qquad \text{([4], p. 79)}$$

Les produits am^2 et bm^2 sont respectivement les carrés des écarts quadratiques et rectangulaires à priori.

d'où pour $n = 7$, $\quad c = 1.2 = p$, $\quad d = -\dfrac{1}{7.5} = -0.133 = p' \qquad (1)$

Formons le produit de la matrice rectangulaire des coefficients par celle symétrique des poids à 7×7 éléments:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 1.2 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 \\ & 1 & & & & & \\ -0.133 & 1.2 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 \\ & & 1 & & & & \\ -0.133 & -0.133 & 1.2 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 \\ & 1 & 1 & & & & \\ -0.133 & -0.133 & -0.133 & 1.2 & -0.133 & -0.133 & -0.133 \\ 1 & & 1 & & & & \\ -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & 1.2 & -0.133 & -0.133 \\ 1 & 1 & & & & & \\ -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & 1.2 & -0.133 \\ 1 & 1 & 1 & & & & \\ -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & -0.133 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Premier produit $\begin{bmatrix} 0.8 & -0.533 & -0.533 & -0.533 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ -0.533 & 0.8 & -0.533 & 0.8 & -0.533 & 0.8 & 0.8 \\ -0.533 & -0.533 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & -0.533 & 0.8 \end{bmatrix}$

et en multipliant par la matrice des coefficients:

$$\begin{bmatrix} 3.2 & +0.533 & +0.533 \\ +0.533 & 3.2 & +0.533 \\ +0.533 & +0.533 & 3.2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice des termes absolus

matrice des équations normales

et, en utilisant les q au lieu des Q:

$$q_{xx} = q_{yy} = q_{zz} = 0.328; \quad q_{xy} = q_{xz} = q_{yz} = -0.047$$

et pour les binômes $(-f_i + v_i)$:

$$q_{11} = q_{22} = q_{33} = 0.328$$

Ce problème standard est inspiré de la remarquable publication [4], mais avec d'autres valeurs numériques, par suite d'une erreur de calcul dans [4], p. 79.

$$q_{44} = q_{55} = q_{66} = 2 \times 0.328 - 2 \times 0.047 = 0.562$$

$$q_{77} = 3 \times 0.328 - 6 \times 0.047 = 0.702$$

et l'on peut calculer la valeur S, mais ce n'est plus un contrôle.

$$S = 3 \times 0.328 + 3 \times 0.562 + 0.702 = 3.37 \qquad (8)$$

Ce résultat peut décevoir, le coefficient d'amplification est 7:3,37 = 2,08. La comparaison des résultats sous chiffres (7) et (8) prouve que la mé-

thode des moindres carrés ne sort pas amoindrie de cette confrontation. Evidemment il s'agit ici d'un exemple numérique pris au hasard, et cette valeur S est un élément d'appréciation dans un problème complexe. Théoriquement une formule pour la somme S peut se concevoir lorsque les observations ne sont plus mutuellement indépendantes, mais une telle formule sera sans doute compliquée; c'est un critère.

Comultiplicateurs à posteriori. On se bornera ici au calcul de q_{67} par exemple; l'intérêt de ces éléments n'est pas capital

$$(-f_6 + v_6) - (-f_7 + v_7) = -z$$
$$q_{66} + q_{77} - 2\,q_{67} = q_{zz}$$
$$0.562 + 0.702 - 2\,q_{67} = 0.328 \text{ d'où } q_{67} = +0.468.$$

Telles sont exposées, sous une forme élémentaire, quelques tendances modernes en matière de compensation: l'emploi de symboles, la non-indépendance des observations, le calcul des éléments à posteriori. Ce dernier calcul est parfois un peu fastidieux, mais il revêt une importance qui ne doit pas échapper au praticien; il est intéressant de savoir dans quelle mesure les valeurs initiales sont améliorées. Les considérations qui précèdent seraient susceptibles encore de bien des développements. Il s'agirait en particulier d'établir une formule pour la somme S dans le cas général où il y a dépendance stochastique entre les quantités observées. L'auteur de ces lignes se réserve de revenir sur ce problème. En attendant constatons que pour les applications géodésiques cette notion de covariance présente assez peu d'intérêt.

Littérature

[1] *E. Czuber,* Theorie der Beobachtungsfehler, Teubner, Leipzig.

[2] *E. Gotthardt,* Zur zweistufigen vermittelnden Ausgleichung, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1956.

[3] *W. Großmann,* Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, Springer, Berlin.

[4] *R. Marchant,* La compensation de mesures surabondantes, Bruxelles 1956.

[5] *R. Marchant,* Méthodes générales de compensation, Festschrift C. F. Baeschlin, 1957.

[6] *F. Neiß,* Determinanten und Matrizen, Springer, Berlin.

[7] *H. Wolf,* Beitrag zur Ausgleichung von untereinander abhängigen Beobachtungen, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1958.

[8] *A. Ansermet,* A propos d'une forme générale de compensation, Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen, 1959, N° 11.