

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 58 (1960)

Heft: 4

Artikel: Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfiguren

Autor: Ledersteger, K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-216089>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfiguren

Von K. Ledersteger, Wien

Die bisherigen Untersuchungen der aus dem Helmhertschen Ansatz für das Rotations-Niveausphäroid vierten Ranges

$$U_4 = \frac{k^2 E}{l} \left[1 - \frac{K}{l^2} P_2(\cos \vartheta) + \frac{8}{35} \frac{D}{l^4} P_4(\cos \vartheta) + \frac{\omega^2 l^3}{2 k^2 E} \sin^2 \vartheta \right] \quad (1)$$

hervorgehenden Näherungen für die sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren haben zu dem Schluß geführt, daß alle diese ∞^3 -Näherungsfiguren ihr streng individuelles Dichtegesetz besitzen, das heißt, daß jeder dieser Figuren mit der freien Oberfläche $S(a, a, f)$ eine und nur eine Massen-anordnung im hydrostatischen Gleichgewicht entspricht, und zwar nur für eine ganz bestimmte Rotationsgeschwindigkeit. Da es nämlich zu jedem System Stokesscher Elemente $E, \omega, S(a, a, f)$ verschiedene Stokessche Konstanten gibt, darunter die beiden Massefunktionen K und D , welche für alle möglichen zugehörigen Massen-anordnungen Integralinvariante sind, andererseits aber durch (E, ω, K, D) eindeutig eine heterogene oder homogene Gleichgewichtsfigur bestimmt ist, gibt es zu jedem System Stokesscher Elemente, sofern in Anbetracht des bedingten Charakters der Parameter überhaupt eine physikalisch sinnvolle Lösung möglich ist, unter den sonstigen unendlich vielen Massen-anordnungen nur *eine* Massen-anordnung im Gleichgewicht, derart, daß die gegebene Fläche S entweder freie Oberfläche oder äußere Niveaulfläche ist. Ein zweiter Beweis für die Eindeutigkeit des Dichtegesetzes ergibt sich aus dem klassischen Ergebnis, demzufolge für Gleichgewichtsfiguren auch die Trägheitsmomente selbst – und nicht bloß deren Differenz – wenigstens mit sehr guter Annäherung Stokessche Konstanten sind. Dies ist aber nur dann mit der eigentlich selbstverständlichen Tatsache in Einklang zu bringen, daß die Trägheitsmomente sehr wesentlich von der Massenkongfiguration abhängen, wenn sich bei den Gleichgewichtsfiguren die Trägheitsmomente zwar als *Funktionen* der Stokesschen Elemente darstellen lassen, welche aber nicht mehr den Sinn von Integralinvarianten für unendlich viele Massen-anordnungen haben, die es gar nicht gibt¹.

Wenn nun die späteren Ausführungen für die Näherungen mit dem Potentialausdruck (1) ein sehr einfaches, *stetiges* Dichtegesetz liefern, so zwingt dies im Verein mit der Eindeutigkeit des Dichtegesetzes zu der logischen Folgerung, daß diese Figuren noch lange nicht die Gesamtheit aller Gleichgewichtsfiguren darstellen. Denn sonst bliebe kein Raum für die sicherlich möglichen unstetigen Dichteverteilungen. Man braucht dabei noch gar nicht an den wirklichen Erdkörper zu denken, der zumin-

¹ K. Ledersteger, Die Stokesschen Konstanten und die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur. Öst. ZfV, 1959, S. 97–114.

dest in seiner Kruste offensichtlich beträchtliche Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht aufweist. Wir müssen daher nochmals die Frage nach der Mannigfaltigkeit der überhaupt möglichen Gleichgewichtsfiguren aufgreifen, wobei zu betonen ist, daß diese selbstverständlich als völlig exakte Figuren und nicht bloß als Näherungen zu betrachten sind.

Wir gehen von den sukzessiven Näherungen der Potentialentwicklung der Gleichgewichtsfiguren aus und finden die erste Näherung, wenn wir in (1) bereits die Massefunktion 4.0., das heißt den Koeffizienten D der zonalen Kugelfunktion P_4 , unterdrücken. Es resultiert als Sphäroid zweiten Ranges das Brunssche Niveausphäroid von Rotationsform U_2 . Wollte man auf dieses das bekannte Helmertsche System von acht Gleichungen anwenden, so hat letzteres wegen des Ausfalls des Parameters $\delta = D/a^4$ nur mehr zwölf Parameter, also für die vorgegeben gedachte Erdmasse nur mehr ∞^3 Lösungen, und ein einfacher Analogieschluß zeigt, daß wir es mit den ∞^3 homogenen MacLaurinschen Ellipsoiden mitsamt ihren äußeren Niveaulächen zu tun haben. Führen wir aber in das Gleichungssystem den für alle homogenen Ellipsoide gültigen Wert für die statische Abplattung

$$K/a^2 = \frac{1}{5} (2a - a^2) \quad (2)$$

ein, so liefert dies

$$\frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} = \frac{4}{5} a + \frac{1}{5} a^2, \quad (3)$$

was besagt, daß sich die transformierte MacLaurinsche Bedingung bereits in den Gliedern 4.0. falsch ergibt; dies ist gar nicht verwunderlich, weil ja im Näherungspotential U_2 gleichfalls ein Parameter 4.0. ($\delta = 0$) unterdrückt wurde. Der Fehler der Lösung kommt am klarsten darin zum Ausdruck, daß sie auf einen positiven Formparameter f führt, was physikalisch sinnlos ist. Wir müssen bei dieser Näherung demnach konsequenterweise sämtliche Parameter 4.0., δ , β_4 und f , unterdrücken, dürfen also die abgeleiteten Gleichungen ebenfalls nur bis einschließlich der Glieder 2.0. entwickeln. Mit β_4 und f entfallen aber zwei Gleichungen, so daß nur sechs Gleichungen mit insgesamt zehn Parametern vorliegen, welche für die gegebene Masse tatsächlich ∞^3 Lösungen besitzen, eben in der entsprechenden Näherung die ∞^3 MacLaurinschen Ellipsoide mit ihren äußeren Niveaulächen. Jedes Ellipsoid $S(a, \alpha)$ ist, wie wir wissen, für eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit streng eine homogene Gleichgewichtsfigur, auf der vorliegenden Näherungsstufe aber gleichzeitig für unendlich viele andere Werte von ω äußere Niveauläche anderer homogener Ellipsoide.

Die Verallgemeinerung ist nun recht einfach. Im Potentialausdruck (1) für U_4 , in welchem wir die Massefunktion 4.0. statt mit D besser mit D_4 bezeichnen, sind alle höheren Massefunktionen D_6 , $D_8 \dots$ vernachlässigt. Es wäre somit sinnlos, die Helmertschen Gleichungen über die vierte Ordnung hinaus zu entwickeln, das heißt in der Formel für die

theoretische Schwere einen Koeffizienten β_6 und in der Differenz der Radienvektoren von Sphäroid und achsengleichem Rotationsellipsoid

$$(l - s) = \frac{a}{4} [f_4 \sin^2 2\varphi + \dots] \quad (4)$$

neben dem ersten Formparameter 4.0. ($f = f_4$) etwa einen Parameter 6.0. (f_6) mitzunehmen. Die ∞^4 Lösungen des Helmertschen Systems für die gegebene Masse E umfassen die ∞^3 überhaupt möglichen zweiten Näherungen $S(a, \alpha, f_4)$ der viel größeren Mannigfaltigkeit aller Gleichgewichtsfiguren, deren jede gleichzeitig auch äußere Niveauläche von unendlich vielen anderen dieser «Näherungsfiguren» ist.

Geht man zu einem Niveausphäroid sechsten Ranges U_6 über, erweitert also (1) um die zonale Kugelfunktion P_6 , so tritt eine Massefunktion D_6 hinzu, und man muß die Formeln bis einschließlich der Glieder 6.0. entwickeln, wodurch die zusätzlichen Parameter β_6 und f_6 und zwei weitere Gleichungen auftreten. Man wird also zehn Gleichungen für sechzehn Parameter und damit für die gegebene Masse ∞^5 Lösungen erhalten, nämlich ∞^4 dritte Näherungen $S(a, \alpha, f_4, f_6)$ mitsamt ihren äußeren Niveaulächen. So kann man zu immer höheren Näherungen fortschreiten.

Wenn wir aber von Gleichgewichtsfiguren sprechen, so denken wir an völlig strenge Lösungen des geschlossenen oder des vollständig entwickelten Potentialausdruckes. So werden für ganz bestimmte Werte der Massefunktionen $K, D_4, D_6 \dots$ in aller Strenge die ∞^2 homogenen, MacLaurinschen Ellipsoide als die «nullparametrischen» Gleichgewichtsfiguren $S(a, \alpha)$ resultieren. Die nächste Stufe stellen die ∞^3 «einparametrischen» Gleichgewichtsfiguren $S(a, \alpha, f_4)$ dar, wie sie bisher in ihren zweiten Näherungen mit dem Potentialausdruck (1) allein untersucht wurden². Es folgen die ∞^4 «zweiparametrischen» Gleichgewichtsfiguren $S(a, \alpha, f_4, f_6)$, welche natürlich die vorhergehenden mit einschließen usf.

So gesehen, wird die strenge Eindeutigkeit des jeweiligen Dichtegesetzes unmittelbar evident. Denn zu jeder Figur, etwa zu einer bestimmten zweiparametrischen Figur $S(a, \alpha, f_4, f_6)$, gehören außer einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit nicht nur bestimmte Werte für die Massenfunktionen K, D_4 und D_6 , sondern auch für alle bei der dritten Näherung U_6 vernachlässigten weiteren Massefunktionen $D_8, D_{10} \dots$. Wählt man ein beliebiges System Stokesscher Elemente $E, \omega, S(a, \alpha, f_4, f_6)$, so sind dafür alle diese Massefunktionen Stokessche Konstante, das heißt Integralinvarianten für sämtliche mögliche Massenkonfigurationen von E im Innenraum von S , unter denen sich, wenn überhaupt, so nur eine Massenordnung im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, die durch $(E, \omega, K, D_4, D_6 \dots)$ streng definiert ist und die sich aus U_6 mit (E, ω, K, D_4, D_6) eindeutig als dritte Näherung ergibt, wenn es gelingt,

² K. Ledersteger, Die heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normalsphäroid der Erde. *Geofisica pura e applicata*, Bd. 44, S. 1–19, Milano 1959.

dem zugehörigen Gleichungssystem die fehlende Gleichgewichtsbedingung in irgendeiner Form als elfte Gleichung anzuschließen. Variiert man ω , so erhält man im Innern von S eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren, und wir dürfen in Analogie zu den früheren Untersuchungen³ schließen, daß diese Reihe mit einer einparametrischen Figur von maximaler Rotationsgeschwindigkeit beginnt und in jener Gleichgewichtsfigur mit minimalem ω endet, für welche die gegebene Fläche S zur freien Oberfläche wird. Die eigenartige Wechselbeziehung zwischen den Näherungen und den strengen Gleichgewichtsfiguren wirft aber noch mancherlei Fragen auf. Denn während zum Beispiel für eine zweiparametrische Figur alle höheren Formparameter $f_8, f_{10} \dots$ streng Null sind, gilt dies nicht für die Massenfunktionen $D_8, D_{10} \dots$, welche in den dritten Näherungen (U_0) bloß vernachlässigt sind.

Nachdem somit die strenge Eindeutigkeit der Dichteverteilung in jeder exakten Gleichgewichtsfigur hinreichend geklärt ist, erhebt sich die Frage, ob sich die Dichtegesetze für jede beliebige Anzahl von Formparametern f_i ebenso in einem einheitlichen Ausdruck zusammenfassen lassen, wie dies bekanntlich für die homogenen Ellipsoide oder «nullparametrischen Gleichgewichtsfiguren» der Fall ist. Hier weist das allgemeine Dichtegesetz $\rho = \text{const}$ eine Konstante (später allgemein als mittlere Dichte ρ_m bezeichnet) auf, die für alle volumgleichen Ellipsoide denselben Wert besitzt. Es scheint daher die Annahme sehr naheliegend, daß sich das Dichtegesetz der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren, das die Dichte der inneren Niveaulächen in Funktion ihrer Äquatorradien darstellt: $\rho_i = f(a_i)$, in einen Ausdruck mit zwei Konstanten zusammenfassen läßt.

Zur Ableitung des Dichtegesetzes dürfen wir mit hinreichender Annäherung die Niveaulächen der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren als Ellipsoide betrachten. Um die Bedingungen für das Dichtegesetz aufzustellen, gehen wir sodann von den elementaren Massenfunktionen für das homogene Ellipsoid aus. Bezeichnet man die Äquator- und die Polachse des Ellipsoides mit a und c , so ist bekanntlich das Volumen $\frac{4}{3} \pi a^2 c$, so daß sich für die mittlere Dichte die einfache Beziehung ergibt:

$$E = \frac{4}{3} \pi a^2 c \rho_m = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - \alpha) \rho_m, \quad (5)$$

worin α und a die freie Oberfläche bestimmen. Setzt man nun für das Dichtegesetz zunächst ganz allgemein an:

$$\rho = \rho_{\max} f\left(\frac{x}{a}\right), \quad (6)$$

unter x den Äquatorradius einer inneren Niveauläche verstanden, so ergibt sich für den heterogenen Körper unmittelbar

³ Siehe Fußnote 2.

$$\begin{aligned}
 E &= 4 \pi \rho_{\max} \int_0^a (1 - \alpha) f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx = \\
 &= 4 \pi \rho_{\max} (1 - \bar{\alpha}_2) \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx, \quad (5a)
 \end{aligned}$$

wobei $\bar{\alpha}_2$ einen durch die Gleichung definierten Mittelwert der inneren Abplattungen darstellt, der kleiner als die Abplattung α der Oberfläche ist, weil die Abplattung nach innen, also mit abnehmendem x , ständig abnimmt. Aus der Gleichsetzung der beiden Gleichungen (5) folgt bereits die Bedingung für die mittlere Dichte:

$$\frac{1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}_2} = \frac{\rho_{\max}}{\rho_m} \frac{3}{a^3} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx, \quad (7)$$

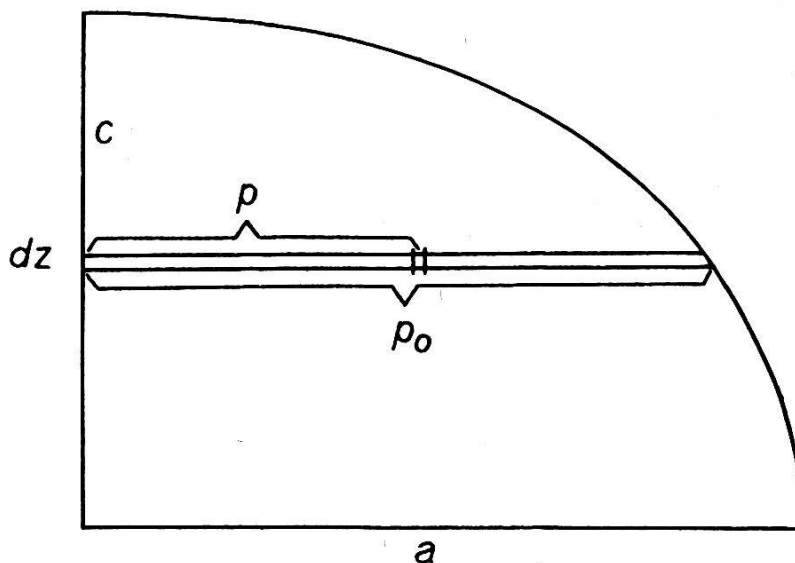
in welcher die linke Seite ≤ 1 ist, während das Verhältnis $n = (\rho_{\max} : \rho_m) \geq 1$ ist.

Für das Trägheitsmoment C des homogenen Ellipsoides findet man leicht

$$C = \rho \int_{Ell} (x^2 + y^2) d\tau = \rho \int p^2 d\tau; \quad d\tau = 2\pi p dp dz,$$

also:

$$C = 2\pi \rho \int_{Ell} p^3 dp dz = 4\pi \rho \int_0^{p_0} \int_0^c p^3 dp dz = 4\pi \rho \int_0^c \frac{p_0^4}{4} dz.$$



Nun folgt aus der Ellipsengleichung

$$p_0^2 = \frac{a^2}{c^2} (c^2 - z^2)$$

und daher

$$C = \pi \rho \frac{a^4}{c^4} \int_0^c [c^4 - 2c^2 z^2 + z^4] dz = \frac{8}{15} \pi \rho a^4 c = \frac{2}{5} E a^2 \quad (8)$$

Für das äquatoriale Trägheitsmoment

$$A = B = \rho \int_{Ell} \left[\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 \right] d\tau = \frac{1}{2} C + \rho \int_{Ell} z^2 d\tau$$

findet man mit

$$d\tau = p_0^2 \pi dz$$

leicht

$$\int_{Ell} z^2 d\tau = 2\pi \int_0^c z^2 p_0^2 dz = 2\pi \frac{a^2}{c^2} \int_0^c z^2 (c^2 - z^2) dz$$

und damit

$$A = B = \frac{4}{15} \pi \rho a^4 c + \frac{4}{15} \pi \rho a^2 c^3. \quad (9)$$

Für die Differenz der Trägheitsmomente und damit für die erste Massefunktion K folgt:

$$(C - A) = KE = \frac{4}{15} \pi \rho [a^4 c - a^2 c^3]$$

und weiter mit $c = a(1 - \alpha)$

$$KE = \frac{4}{15} \pi \rho a^4 c (2\alpha - \alpha^2) = \frac{4}{15} \pi \rho a^5 (2\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3) \quad (10)$$

oder auch

$$\frac{K}{a^2} = \frac{1}{5} (2\alpha - \alpha^2). \quad (11)$$

Aus

$$(C - A) = \frac{1}{5} E a^2 (2\alpha - \alpha^2); \quad C = \frac{2}{5} E a^2$$

folgt aber die dynamische Abplattung

$$d = \frac{C - A}{C} = \alpha - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (11a)$$

Aus (8) und (6) ergibt sich jetzt für das Trägheitsmoment C eines heterogenen Körpers

$$C = \frac{8}{3} \pi \rho_{\max} \int_0^a (1 - \alpha) f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx = \frac{8}{3} \pi (1 - \bar{\alpha}_4) \rho_{\max} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx =$$

$$= 2 \left[\frac{4}{3} \pi a^3 (1 - \alpha) \rho_m \right] \frac{1 - \bar{\alpha}_4}{1 - \alpha} \cdot \frac{\rho_{\max}}{\rho_m} \frac{1}{a^3} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx$$

oder

$$C = \frac{2}{5} E a^2 \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_4}{1 - \alpha} \right) n \frac{5}{a^5} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx. \quad (12)$$

Ganz analog folgt aus (10)

$$KE = \frac{4}{3} \pi (2\bar{\alpha}_4 - 3\bar{\alpha}_4^2 + \bar{\alpha}_4^3) \rho_{\max} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx$$

oder

$$K = \left(\frac{2\bar{\alpha}_4 - 3\bar{\alpha}_4^2 + \bar{\alpha}_4^3}{1 - \alpha} \right) \frac{\rho_{\max}}{\rho_m} \cdot \frac{1}{a^3} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx$$

und nach entsprechender Erweiterung

$$\frac{K}{a^2} = \frac{1}{5} (2\bar{\alpha}_4 - \bar{\alpha}_4^2) \left(\frac{1 - \bar{\alpha}_4}{1 - \alpha} \right) n \frac{5}{a^5} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx. \quad (13)$$

In den beiden letzten Gleichungen ist natürlich $\bar{\alpha}_4$ abermals ein bestimmter Durchschnittswert der Abplattungen der inneren Niveauflächen. Zu seiner Bestimmung bilden wir aus (12) und (13) für den gemeinsamen Faktor

$$\left(\frac{1 - \bar{\alpha}_4}{1 - \alpha} \right) n \frac{5}{a^5} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx = \frac{C}{\frac{2}{5} E a^2} = \frac{K}{\frac{1}{5} (2\bar{\alpha}_4 - \bar{\alpha}_4^2) a^2} = g \quad (14)$$

oder

$$\frac{C - A}{C} = \bar{\alpha}_4 - \frac{\bar{\alpha}_4^2}{2}. \quad (15)$$

Die dynamische Abplattung unserer heterogenen Gleichgewichtsfigur ist also dieselbe wie die eines homogenen Ellipsoides (vgl. 11 a) mit der Abplattung $a_h = \bar{a}_4$. Da wir selbstverständlich die Rotationsgeschwindigkeit festhalten müssen, handelt es sich um die homogene Ausgangsfigur der linearen Reihe (ω, d) . Damit ist offensichtlich eine wichtige Bedingung für die Abplattungsfunktion im Innern der heterogenen Gleichgewichtsfigur gegeben: die aus der Präzessionskonstante mit großer Sicherheit ableitbare dynamische Abplattung definiert den Durchschnittswert \bar{a}_4 der inneren Niveaulächen des Normalsphäroides.

Andererseits ist in (13) die Größe g mit der statischen Abplattung (11) desselben homogenen Ellipsoides multipliziert, das ja auch durch ω und a_h eindeutig gegeben ist. Von diesem Ellipsoid geht demnach sicherlich auch eine Figurenreihe (ω, K_h) aus. Gehört unsere heterogene Figur dieser Reihe an, ist also $K = K_h$, so muß

$$g = (a_h : a)^2 \quad (16)$$

sein, wobei natürlich a_h die Äquatorachse des homogenen Ellipsoides bedeutet. Damit folgt aber aus (12)

$$C = \frac{2}{5} E a^2 (a_h : a)^2 = \frac{2}{5} E a_h^2 = C_h,$$

womit bereits die Identität der Reihen $(\omega, C) \equiv (\omega, K) \equiv (\omega, d)$ bewiesen ist. Denn die Annahme, daß die gegebene Figur nicht der Reihe (ω, K_h) angehört, führt auf einen Widerspruch. Wohl bleibt die dynamische Abplattung auch unverändert, wenn sich die Trägheitsmomente proportional ändern. Dies ist aber nur bei einer völlig gleichförmigen Expansion oder Kontraktion der Figur möglich und daher unweigerlich mit einer Änderung der Rotationsgeschwindigkeit verbunden, wie bereits die homogenen Ellipsoide zeigen.

Man sieht demnach, daß sich die beiden Gleichungen (12) und (13) nur um einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden. Weil die statische Abplattung zu den Stokesschen Konstanten gehört, gebührt sogar der Gleichung (13) der Vorzug vor (12), während man bisher allgemein angenommen hat, daß die Differenz der Trägheitsmomente keine brauchbare Bedingung für die Aufstellung des Dichtegesetzes liefert, weil die Abplattungsfunktion unbekannt ist. Die Gleichungen (7) und (13) liefern also die beiden notwendigen Bedingungen für das gesuchte Dichtegesetz mit zwei Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} [1 - a + \bar{a}_2] &= n \frac{3}{a^3} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx \\ \left(\frac{a_h}{a}\right)^2 (1 - a + \bar{a}_4) &= n \frac{5}{a^5} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Hierin ist $\alpha > \bar{\alpha}_4 > \bar{\alpha}_2$ und $\bar{\alpha}_4$ gleich der Abplattung des homogenen Ausgangsellipsoides der Reihe $(\omega, K) \equiv (\omega, C)$.

Wir prüfen zunächst einige der konventionellen Dichtegesetze am Normalsphäroid. Für dieses haben wir in der in Fußnote 2 zitierten Arbeit gefunden:

$$\alpha = 33\,6267 \cdot 10^{-8}; \alpha_h = 32\,7773 \cdot 10^{-8}; a = 6\,378\,290 \text{ m};$$

$$a_h = 5\,819\,382 \text{ m}; \text{ also } (\alpha_h : a)^2 = 0,832\,425; \rho_m = 5.5168.$$

Die linke Seite der ersten Gleichung läßt sich wegen der Unkenntnis von $\bar{\alpha}_2$ bloß schätzen und wurde mit 0,9995 angenommen. Somit gilt für das Normalsphäroid

$$\left. \begin{aligned} 0.99950 &= n \frac{3}{a^3} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx \\ 0.83236 &= n \frac{5}{a^5} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx. \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Der erste Versuch sei mit dem am häufigsten verwendeten Dichtegesetz von *Roche*⁴ gemacht:

$$\rho = \rho_{\max} \left[1 - k \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

Die Konstante k liegt dabei zwischen den Grenzen 0 und 1. $k = 0$ liefert das homogene Ellipsoid und $k = 1$ für $x = a$ die Oberflächendichte Null. Man findet:

$$0.99950 = n \frac{3}{a^3} \int_0^a \left(x^2 - k \frac{x^4}{a^2} \right) dx = n \left(1 - \frac{3}{5} k \right)$$

$$0.83236 = n \frac{5}{a^5} \int_0^a \left(x^4 - k \frac{x^6}{a^2} \right) dx = n \left(1 - \frac{5}{7} k \right)$$

und daraus

$$k = 0,77916; n = 1,87698; \rho_{\max} = 10,355; \rho_{\min} = 2,287. \quad (18a)$$

⁴ *E. Roche*, Note sur la loi de densité à l'intérieur de la terre. Acad. Paris, C. R. 39, 1854.

Eine Verallgemeinerung des Dichtegesetzes von Roche nahm *R. Lipschitz*⁵ vor, indem er den Exponenten 2 durch λ ersetzte:

$$\rho = \rho_{\max} \left[1 - k \left(\frac{x}{a} \right)^\lambda \right]. \quad (19)$$

Es sei dieses Gesetz noch für $\lambda = 1$ und 3 ausgewertet:

$$\begin{array}{llllll} \lambda = 1 : k = 0,80109; n = 2,50382; \rho_{\max} = 13,813; \rho_{\min} = 2,747 & (19a) \\ \lambda = 3 & 0,80160 & 1,66806 & 9,202 & 1,826 \end{array}$$

Noch allgemeiner ist der Ansatz von *M. Lévy*⁶

$$\rho = \rho_{\max} \left[1 - k \left(\frac{x}{a} \right)^\lambda \right]^\mu \quad (20)$$

Wir wollen ihn versuchsweise für $\lambda = 1, 2, 3$ und $\mu = 2$ auswerten:

$$\begin{array}{llllll} \lambda = 1 : k = 0,56415; n = 2,89938; \rho_{\max} = 15,995; \rho_{\min} = 3,038 & & & & & \\ \lambda = 2 : & 0,50990 & 2,00082 & 11,038 & 2,651 & (20a) \\ \lambda = 3 : & 0,51196 & 1,73704 & 9,583 & 2,282 \end{array}$$

Eine Entscheidung über die Wahl der Parameter λ und μ könnte aus dem Normalsphäroid allein nur auf Grund der resultierenden Oberflächendichte

$$\rho_{\min} = \rho_{\max} (1 - k)^\mu = n (1 - k)^\mu \cdot \rho_m$$

getroffen werden, da diese ja nicht als Bedingung mit angesetzt wurde. Demnach hätte die Wahl $\lambda = 2, \mu = 2$ die größte Wahrscheinlichkeit für sich. Doch könnte dies natürlich auch Zufall sein, solange dieser Ansatz nicht auch theoretisch fundiert ist. Wollte man beliebige andere einparametrische Gleichgewichtsfiguren heranziehen, so bieten diese überhaupt keine Kontrollmöglichkeit, weil wir über ihre zu erwartende Oberflächendichte nichts aussagen können. Anders verhält sich dies mit den Grenzfiguren in der Hüllfläche, für die sich die Oberflächendichte sehr klein ergeben muß, und zwar so, daß die Poincarésche Ungleichung erfüllt ist. Die Grenzfiguren ermöglichen dann gleichzeitig den gewünschten Einblick in das mögliche Maß der Massenkonzentration.

Die Massenkonzentration hat sich am klarsten in der Figurenreihe (ω, a) gezeigt. Wir wählen jene Reihe, der das Normalsphäroid der Erde angehört: $\omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9}$, $a = 6\,378\,290$ m. In dieser Reihe ergab

⁵ *R. Lipschitz*, Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt, aus den gegebenen Beobachtungen. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 62 und 63, 1863.

⁶ *M. Lévy*, Sur la théorie de la terre. *Acad. Paris, C. R.*, Bd. 106, 1888.

sich die Grenzfigur mit folgenden hier allein interessierenden Bestimmungsstücken⁷:

$$\alpha = 23\,8036 \cdot 10^{-8}; \quad \varepsilon = 34\,7128 \cdot 10^{-8}; \quad K/a^2 = 4\,3555 \cdot 10^{-8}$$

$$K = 17\,719,3 \cdot 10^{10}; \quad \rho_m = 5,5113.$$

Für das homogene Ausgangsellipsoid der zugehörigen Reihe (ω , K) finden wir

$$\alpha_h = 18\,9081 \cdot 10^{-8}; \quad a_h = 4\,842\,548 \text{ m}; \quad (\alpha_h : a)^2 = 0,576420$$

und erhalten damit aus (17) die beiden Bedingungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} 0,99930 &= n \frac{3}{a^3} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx \\ 0,57614 &= n \frac{5}{a^5} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx, \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

in denen der linksstehende Wert der ersten Gleichung wieder auf Schätzung beruht, jedoch höchstens um ein bis zwei Einheiten der vierten Dezimale falsch sein kann.

Die Auswertung auf Grund des Ansatzes (19) liefert mit $\lambda = 1, 2, 3$ stets unmögliche Werte von $k > 1$. Dennoch sei das Ergebnis ganz gegeben:

$\lambda = 1 :$	$k = 1,05620;$	$n = 4,80780;$	$\rho_{\max} = 26,497;$	$\rho_{\min} = -1,489$
$\lambda = 2 :$	1,14957	3,22089	17,751	-2,655 (19b)
$\lambda = 3 :$	1,25756	2,69194	14,836	-3,821

Mit diesen gänzlich unmöglichen Resultaten sind die Dichtegesetze von *Roche* und *Lipschitz* vollständig ad absurdum geführt. Hingegen liefert der Ansatz von *Lévy*, abermals für $\lambda = 1, 2, 3$ und $\mu = 2$ der Reihe nach:

$\lambda = 1 :$	$k = 0,90117;$	$n = 7,37431;$	$\rho_{\max} = 40,642;$	$\rho_{\min} = 0,397$
$\lambda = 2 :$	0,96344	4,13486	22,788	0,030 (20b)
$\lambda = 3 :$	1,10120	3,29791	18,176	0,186

Wieder erweist sich die Lösung für $\lambda = 2$ und $\mu = 2$ als sehr plausibel. Die Oberflächendichte ergibt sich, wie es sein muß, sehr gering; außerdem ist die Poincarésche Ungleichung erfüllt:

$$5,3 \cdot 10^{-9} = \omega^2 < 2 \pi k^2 \rho_{\min} = 12,6 \cdot 10^{-9}. \quad (21)$$

⁷ K. Ledersteger, Zur Theorie des Normalsphäroides der Erde. Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission, Reihe A, Heft 36, München 1960.

Es wäre natürlich sehr wünschenswert, das gefundene Dichtegesetz

$$\rho = \rho_{\max} \left[1 - k \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (20b)$$

an weiteren Figuren zu erproben. Nun wissen wir nur beim Normal-sphäroid und bei den Grenzfiguren der Hüllfläche, welche Oberflächendichte wir zu erwarten haben. Bei den Grenzfiguren erweist sich aber die linke Seite der zweiten Gleichung (17b) bis auf eine geringfügige Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit als konstant. Wegen des maximalen Formparameters $|f_4| = 3 a^2/2$ erhalten wir für die Figuren der Hüllfläche die Bedingung

$$\frac{3}{2} a^2 + \frac{5}{4} a\varepsilon - \frac{25}{16} \varepsilon^2 = 0, \quad (22)$$

welche auf die Wurzel

$$a = 0,68573 \varepsilon \quad (22a)$$

führt. Damit kann aber die Gleichung für die statische Abplattung

$$K/a^2 = \frac{1}{3} \left[2a - \varepsilon - a^2 - \frac{1}{14} a\varepsilon + \frac{109}{56} \varepsilon^2 \right]$$

leicht in

$$K/a^2 = 0,12382 \varepsilon + 0,47574 \varepsilon^2 \quad (23)$$

transformiert werden. Andererseits gilt für jedes MacLaurinsche Ellipsoid

$$K/a_h^2 = \frac{1}{5} (2 a_h - a_h^2); \varepsilon_h = \frac{4}{5} a_h + \frac{138}{175} a_h^2$$

und daher

$$K/a_h^2 = 0,50000 \varepsilon_h - 1,54464 \varepsilon_h^2. \quad (24)$$

Durch Division von (23) durch (24) findet man für die Grenzfigur jeder Reihe (ω , K)

$$(a_h : a)^2 = 0,24764 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_h} \left[\frac{1 + 3,84219 \varepsilon}{1 - 3,08928 \varepsilon_h} \right] = 0,24764 \left(\frac{a}{a_h} \right)^3.$$

$$\cdot [1 + 3,84219 \varepsilon + 3,08928 \varepsilon_h] \left[1 - a + \frac{3}{2} \varepsilon + a_h - \frac{3}{2} \varepsilon_h \right]$$

oder

$$(a_h : a)^5 = 0,24764 [1 + 4,65646 \varepsilon + 2,83928 \varepsilon_h]$$

und weiter

$$(a_h : a)^2 = 0,57217 [1 + 1,86258 \varepsilon + 1,13571 \varepsilon_h].$$

Dies ist gemäß (17) noch mit

$$(1 - a + a_h) = (1 - 0,68573 \varepsilon + 1,25 \varepsilon_h)$$

zu multiplizieren, womit folgt

$$(a_h : a)^2 (1 - a + a_h) = 0,57217 (1 + 1,17685 \varepsilon + 2,38571 \varepsilon_h).$$

Hierin darf mit derselben Genauigkeit ε durch $(\omega^2 a^3 / k^2 E)$ ersetzt und dementsprechend $\varepsilon_h = \varepsilon (a_h : a)^3 = 0,43280 \varepsilon$ geschrieben werden und wir erhalten schließlich

$$(a_h : a)^2 (1 - a + a_h) = 0,57217 \left(1 + 2,20939 \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} \right). \quad (25)$$

In der Form (20b) enthält das Dichtegesetz nur zwei Konstanten, nämlich ρ_{\max} und k . In Wahrheit liegen aber selbstverständlich drei Konstanten vor, weil noch die mittlere Dichte ρ_m mit der Bestimmungsgleichung (5) hinzutritt. Es kommt dies auch darin zum Ausdruck, daß in (17) an Stelle von ρ_{\max} das Verhältnis $n = (\rho_{\max} : \rho_m)$ auftritt. Schreibt man also

$$\rho = n \rho_m \left[1 - k \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^2, \quad (20c)$$

so erkennt man deutlich die strenge Individualität der Dichtefunktion: jede der ∞^3 einparametrischen Gleichgewichtsfiguren hat ihr eigenes, durch ein Wertetripel n , ρ_m und k gekennzeichnetes Dichtegesetz. Für die homogenen Ellipsoide ist $n = 1$ und $k = 0$, während in der Hüllfläche n etwas über 4 und k knapp unter 1 liegt. Dies entspricht der Tatsache, daß in der Reihe (ω, a) die beiden Massfunktionen K und D_4 ungefähr auf ein Viertel ihres homogenen Ausgangswertes absinken. Klarerweise bedarf das gefundene Dichtegesetz noch einer streng physikalischen Begründung. Die vorliegende Untersuchung konnte wohl viele der bisherigen Ansätze für das Dichtegesetz widerlegen und für künftige Untersuchungen die Richtung weisen; die definitive Entscheidung bleibt aber noch offen.

So darf zum Beispiel nicht verschwiegen werden, daß auch der Ansatz von Ökinghaus⁸ nicht ganz hoffnungslos erscheint. Mit

$$\rho = \rho_{\max} e^{-k \left(\frac{x}{a} \right)^3} \quad (26)$$

findet man nämlich für das Normalsphäroid

$$k = 1,3395; n = 1,82118; \rho_{\max} = 10,047; \rho_{\min} = \rho_{\max} e^{-k} = 2,606$$

und für dieselbe Grenzfigur wie oben

$$k = 3,9433; n = 4,01852; \rho_{\max} = 22,169; \rho_{\min} = 0,430.$$

⁸ E. Ökinghaus, Eine Hypothese über das Gesetz der Dichtigkeit im Innern der Erde. Archiv für Mathematik und Physik, Bd. 13, 1895, und Akademie Wien, Bd. 107, 1898.

Man sieht deutlich, daß zumindest die Oberflächendichte in der Grenzfigur nicht genügend klein ist. Auch ist der Ansatz wegen der langsamen Konvergenz der Reihenentwicklung praktisch recht unbequem.

Abschließend sei noch die Poincarésche Schranke (21) transformiert. Durch einfache Multiplikation folgt mit (20c)

$$\frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} < \frac{1}{E} 2\pi a^3 \rho_{\min} = \frac{3}{2} \frac{1}{(1-a)} \frac{\rho_{\min}}{\rho_m} = \frac{3}{2} \frac{n(1-k)^2}{(1-a)}. \quad (27)$$

Es ist nun bekannt, daß für die homogenen Ellipsoide der Quotient $\omega^2/2\pi k^2 \rho$ nicht nur kleiner als 1, sondern vielmehr $\leq 0,224666$ ist, daß also die Poincarésche Schranke dort weit unterboten wird. Man zog hieraus vielfach den Schluß, daß diese Schranke eine wesentliche Verschärfung erfordert. Dies erweist sich jetzt aber als Trugschluß. Denn zum Beispiel in der Figurenreihe (a, α) , die man auch als «Vertikalreihe» im Koordinatensystem mit den Achsen a, α, f_4 bezeichnen darf⁹, wächst mit zunehmender Entfernung vom homogenen Ausgangsellipsoid ständig ω , während umgekehrt dank dem Fortschritte in der Massenkonzentration gleichzeitig die Oberflächendichte ständig abnimmt. Mit der Annäherung an die Hüllfläche nähert sich das Verhältnis $\omega^2/2\pi k^2 \rho_{\min}$ der Einheit. Wählt man die Achse und die Abplattung des Normalsphäroides, so ist in der entsprechenden Vertikalreihe ρ_m mit sehr großer Annäherung konstant 5,5168. Für das Ausgangsellipsoid ist $\omega^2 = 4,143 \cdot 10^{-9}$, also $\omega^2/2\pi k^2 \rho \sim 0,0018$. In der Grenzfigur ist demgegenüber $\omega^2 = 7,503 \cdot 10^{-9}$, und es muß daher $\rho_{\min} \geq 0,018$ sein. Während das Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit nur auf das 1,81fache des Ausgangswertes anwächst, sinkt die Oberflächendichte auf den 306. Teil herab.

Wenn auch die Frage des Dichtegesetzes der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren noch nicht definitiv geklärt ist, so haben die vorstehenden Betrachtungen doch fünf wesentliche Erkenntnisse gezeitigt:

1. Das Dichtegesetz der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren ist eine stetige Funktion mit den drei Konstanten ρ_m, n und k , womit die strenge Individualität des Dichtegesetzes nochmals erwiesen ist.

2. Die Identität der Reihen $(\omega, K) \equiv (\omega, C) \equiv (\omega, d)$ konnte exakter nachgewiesen werden.

3. Ein bestimmter Durchschnittswert ($\bar{\alpha}_4$) der Abplattung der inneren Niveaulächen fällt mit der Abplattung des homogenen Ausgangsellipsoides der Reihe (ω, K) zusammen, womit ein wichtiger Anhaltspunkt für die Abplattungsfunktion gegeben ist, der über die Clairautsche Differentialgleichung hinausgeht.

4. Die früher gefundene Hüllfläche der Gleichgewichtsfiguren hat eine klare Bestätigung erfahren. Die Sphäroide der größten Massenkonzentration sind jene heterogenen Gleichgewichtsfiguren, deren freie Oberfläche stets durch den maximalen Absolutbetrag des Formparameters $|f_4| = 3\alpha^2/2$ ausgezeichnet ist, also gleichzeitig eine Niveauläche des mit

⁹ Siehe Fußnote 2.

einer größeren Winkelgeschwindigkeit rotierenden Massenpunktes darstellt. Es sei nochmals betont, daß man früher diese äußeren Niveaulächen des rotierenden Massenpunktes in irreführender Weise mangels besserer Einsicht selbst als Sphäroide der größten Massenkonzentration bezeichnet hat.

5. Die Poincarésche Schranke bedarf keiner Verschärfung. Das wichtige Verhältnis $\omega^2/2\pi k^2 \rho_{\min}$ nähert sich in der Hüllfläche der Gleichgewichtsfiguren der Einheit.

Zusammenfassung:

Es wird gezeigt, daß es ∞^n Gleichgewichtsfiguren mit $(n - 2)$ Formparametern gibt. Für die ∞^3 einparametrischen Gleichgewichtsfiguren ist das streng individuelle Dichtegesetz eine stetige Funktion mit drei Konstanten. Für die Bestimmung dieser Konstanten liegen drei Gleichungen vor, und zwar eine Doppelgleichung für die Erdmasse sowie eine Bestimmungsgleichung für das Hauptträgheitsmoment C oder, besser, eine hierzu streng proportionale Gleichung für die statische Abplattung. Hieraus kann die Identität der heterogenen Figurenreihen (ω, C) und (ω, K) erwiesen werden. Ein bestimmter Durchschnittswert der Abplattung der inneren Niveaulächen fällt mit der Abplattung des homogenen Ausgangs-ellipsoides der Reihe (ω, K) zusammen. Die meisten der klassischen Annahmen für das Dichtegesetz erweisen sich in der Hüllfläche der Gleichgewichtsfiguren als gänzlich unmöglich. Hingegen paßt das Gesetz von Lévy mit $\lambda = \mu = 2$ vorzüglich. Gleichzeitig erfährt damit die Hüllfläche der Gleichgewichtsfiguren, welche aus dem Maximum des Absolutbetrages des Formparameters $|f_4| = 3a^2/2$ definiert wurde, eine einwandfreie Bestätigung. Die «Sphäroide der größten Massenkonzentration» fallen jeweils mit einer äußeren Niveauläche des mit einer größeren Winkelgeschwindigkeit rotierenden Massenpunktes zusammen. Die Poincarésche Schranke $\omega^2 < 2\pi k^2 \rho_{\min}$ bedarf keiner Verschärfung; das Verhältnis $\omega^2/2\pi k^2 \rho_{\min}$ nähert sich in der Hüllfläche der Einheit.

Summary:

It is shown that ∞^n equilibrium figures with $(n-2)$ form-parameters exist. The strictly individual density-law of the α^3 figures with one form-parameter is a continuous function with three constants. For the determination of these constants three equations are at hand: one dual equation for the earth's mass as well as an equation for the principal moment of inertia C , or better a strictly proportional equation for the static flattening. It follows that the series of inhomogeneous figures (ω, C) and (ω, K) are identical and that a certain average value of the flattenings of the inner level surfaces coincides with the flattening of the homogeneous original ellipsoid of the series (ω, K) . Most of the classical assumptions for the density-law prove to be impossible in the envelope of the equilibrium figures. On the other hand the law of Lévy with $\lambda = \mu = 2$ seems

to fit excellently. Simultaneously the envelope of the equipotential surfaces, defined by the maximum of the absolute value of the form-parameter $|f_4| = 3\alpha^2/2$, is verified beyond question. The "spheroids of greatest mass-concentration" coincide with the outer level surfaces of the mass-point, which rotates with greater angular velocity. Poincaré's barrier $\omega^2 < 2\pi k^2 \rho_{\min}$ needs no improvement; in the envelope the ratio $\omega^2/2\pi k^2 \rho_{\min}$ approaches unity.

Optimale Dimensionierung von Planplattenmikrometern

Von E. Jänich, Heerbrugg

Die Parallelversetzung e eines Lichtstrahls, der durch eine planparallele Glasplatte hindurchgeht, ist abhängig vom Einfallswinkel α des Strahls, der Brechzahl n des Glases und der Dicke d der Glasplatte.

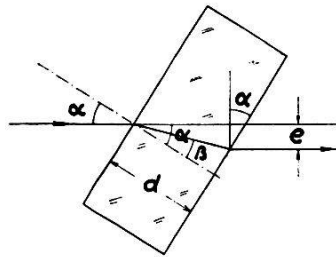


Abb. 1

Aus Abb. 1 erhält man $e = d (\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta)$ oder, wenn β unter Verwendung des Brechungsgesetzes $n = \sin \alpha / \sin \beta$ durch n und α ausgedrückt wird,

$$e = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \quad (1)$$

Läßt man die Plattendicke d zunehmen, so wird der Einfallswinkel α , der auch als Kippwinkel der Planplatte aufgefaßt werden kann, bei konstanter Parallelversetzung e immer kleiner, so daß man statt (1)

$$e = d \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (2)$$

setzen kann. Da jedoch der Klammerausdruck von (1) bei wieder zunehmendem α ebenfalls zunimmt, hat man in (2) zum Ausgleich statt des Sinus den Tangens des Kippwinkels gesetzt, womit eine sehr brauchbare Näherungsgleichung für die Praxis gefunden worden war:

$$e = d \tan \alpha \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (3)$$