Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 58 (1960)

Heft: 1

Artikel: Zu den Beweisen des Theorems von Lichtenstein und der Unmöglichkeit ähnlicher Schichtung

Autor: Ledersteger, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-216075

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des Ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 1 • LVIII. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Januar 1960

Zu den Beweisen des Theorems von Lichtenstein und der Unmöglichkeit ähnlicher Schichtung

Von K. Ledersteger, Wien

Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten enthält eine Reihe grundlegender, wichtiger Sätze, deren Beweise jedoch nicht ganz einfach sind, so daß sie nur schrittweise mit der nötigen Schärfe erbracht werden konnten. In der folgenden Untersuchung sollen zwei von diesen Beweisen kritisch betrachtet werden. Es soll gezeigt werden, daß der schwierigste, dritte Teil des Beweises des Theorems von Lichtenstein wesentlich vereinfacht werden kann und daß Wavre beim Beweis der Unmöglichkeit ähnlicher Schichtung ein sinnstörender Vorzeichenfehler unterlaufen ist. Des klaren Verständnisses wegen müssen die Beweise jedoch zur Gänze entwickelt werden, wobei sich übrigens beim Beweis des ersten Satzes für den Geodäten, für den naturgemäß das Clairautsche Problem der heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren im Vordergrund des Interesses steht, dank einer entsprechenden Beschränkung der Voraussetzungen weitere Vereinfachungen ergeben.

1.

Das Theorem von Lichtenstein besagt, daß die durch den Schwerpunkt senkrecht zur Rotationsachse gelegte Ebene eine Symmetrieebene jeder Gleichgewichtsfigur ist. Der heterogene Körper sei aus homogenen Schichten mit der Dichte ρ_n zwischen den Niveauflächen S_n und S_{n+1} aufgebaut gedacht. Hiermit ist bereits die notwendige und hinreichende Bedingung für das relative Gleichgewicht eingeführt, derzufolge die Flächen gleicher Dichte mit den inneren Niveauflächen der Figur zusammenfallen müssen. T_n oder allgemein T_ρ sei das von der Niveaufläche S_n oder allgemein S_ρ eingeschlossene Volumen (Abb. 1). Aus Gründen der Stabilität fordern wir noch, daß die Dichte nach innen niemals abnehmen darf. Bedeutet dann ρ_1 die Oberflächendichte und ρ_x das Dichtemaxi-

mum im Schwerpunkt und geht man mit den Schichten zur Grenze Null über, so wird:

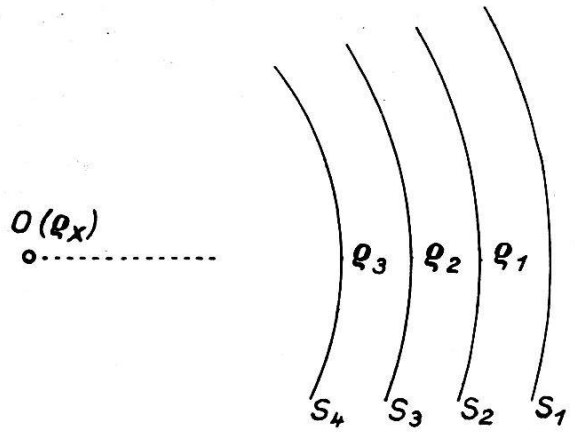

Abb. 1

$$V = \int_T \frac{\rho}{r}\, d\tau = \rho_1 \int_{T_1} \frac{1}{r}\, d\tau + (\rho_2 - \rho_1) \int_{T_2} \frac{1}{r}\, d\tau +$$

$$+ (\rho_3 - \rho_2) \int_{T_3} \frac{1}{r}\, d\tau + \ldots = \rho_1 \int_T \frac{1}{r}\, d\tau + \int_{\rho_1}^{\rho_x} d\rho \int_T \frac{1}{r}\, d\tau. \tag{1}$$

Wir wählen den Schwerpunkt zum Koordinatenursprung und die Rotationsachse zur z-Achse. Durch jeden Punkt kann eine zur z-Achse parallele Sehne gelegt werden, welche die Oberfläche in den Punkten z' und z'' durchstößt. Liegen die Mittelpunkte z_m dieser Sehnen nicht in der Äquatorebene ($z = 0$), so bilden sie eine Fläche $F_1(z_m) = 0$, deren Ordinaten eine obere Grenze z_1 haben: $z_m \leqq z_1$. Dieselbe Überlegung gilt für alle inneren Niveauflächen, deren jede durch eine bestimmte Dichte ρ ausgezeichnet ist. Jede innere Niveaufläche schneidet aus einem Teil der Sehnen gewisse Abschnitte $z' - \bar{z}''$ aus, deren Mittelpunkte $\bar{z}_m$ eine Fläche $F_\rho(\bar{z}_m) = 0$ bilden mit dem Ordinatenmaximum z_ρ. Ist dann z_0 die obere Grenze aller z_ρ, so gibt es in T oder auf S mindestens einen Punkt Q (x_0, y_0, z_0) derart, daß für sämtliche Sehnen und Sehnenabschnitte die Differenzen $h = (z_0 - z_m) \geqq 0$ und $\bar{h} = (z_0 - \bar{z}_m) \geqq 0$. Auf jeder Sehne gibt es also eine Menge derartiger Mittelpunkte, unter denen zwei ausgezeichnet sind, nämlich der Mittelpunkt der ganzen Sehne, welcher der Oberflächendichte ρ_1 zugeordnet ist, und ein Grenzpunkt mit dem Sehnenabschnitt Null, in welchem also die Sehne eine Niveaufläche mit der maximalen Dichte $\rho_{\max}$ gerade noch berührt. Soll gezeigt werden, daß die Annahme einer asymmetrischen Schichtung auf einen Widerspruch führt, so hat man demnach drei Fälle zu unterscheiden.

Im ersten Falle ist Q der Mittelpunkt der ganzen Sehne (x_0, y_0), gehört also der Fläche F_1 an. Die Sehnenendpunkte P' (x_0, y_0, z') und

P'' (x_0, y_0, z'') haben als Punkte der freien Oberfläche dasselbe Potential. Bezeichnet man die Projektionen der Oberfläche S und der inneren Niveauflächen S_ρ auf die (x,y)-Ebene mit D und D_ρ und sind r_1 und r_2 die Abstände des laufenden Punktes einer Sehne (x,y) von P' und P'', so folgt

$$V(P') - V(P'') = \rho_1 \int\limits_D dx\,dy \int\limits_{z''}^{z'} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) dz + \tag{2}$$
$$+ \int\limits_{\rho_1}^{\rho_x} d\rho \int\limits_{D_\rho} dx\,dy \int\limits_{\bar{z}''}^{\bar{z}'} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) dz.$$

Aus Abbildung 2 erkennt man sofort, daß das erste Integral negativ sein muß. Liegt nämlich der Mittelpunkt einer beliebigen Sehne (x,y) um die Strecke h tiefer als der Punkt Q, so entspricht jeder Distanz r_1 des

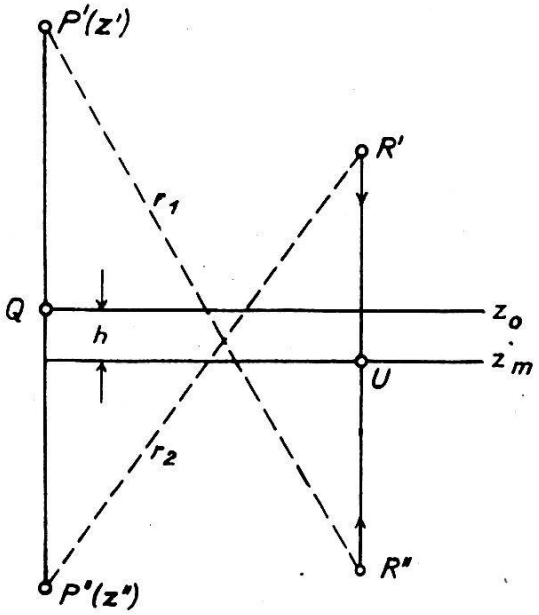

Abb. 2

laufenden Punktes von P' eine kleinere Distanz r_2 eines symmetrisch zum Sehnenmittelpunkt gelegenen Punktes von P''. Mithin ist

$$\int\limits_{z''}^{z'} \frac{1}{r_1}\, dz \leqq \int\limits_{z''}^{z'} \frac{1}{r_2}\, dz,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn h verschwindet. Da aber gewiß für ein zweidimensionales Kontinuum von Wertepaaren das Ungleichheitszeichen gilt, ist das erste Integral sicherlich negativ. Für

das zweite Integral, das jeweils über den von der Niveaufläche S_ρ eingeschlossenen Raum T_ρ, das heißt nur über einen Sehnenabschnitt von $\bar{z}''$ bis $\bar{z}'$, zu erstrecken ist, gilt wegen $\bar{h} \geqq 0$ unverändert dieselbe Argumentation. Es würde also die Potentialdifferenz $[V(P') - V(P'')] < 0$ sein, was unmöglich ist. Mithin muß durchwegs $h = \bar{h} = 0$ sein, das heißt, die Mittelpunkte aller Sehnen und Sehnenabschnitte müssen in der Äquatorebene liegen ($z_0 = z_m = \bar{z}_m = 0$), welche somit zur Symmetrieebene wird. Denn eine andere Parallelebene $z = \text{const}$ kommt offensichtlich nicht in Frage, weil die Symmetrieebene den Schwerpunkt enthalten muß.

Wir betrachten den zweiten Fall. Die Sehne (x_0, y_0) berühre im Punkte Q gerade die Niveaufläche S_ρ mit dem für diese Sehne geltenden Dichtemaximum. Im Grenzfall kann jetzt Q auch auf S liegen. Für die Beweisführung ist es aber einerlei, ob Q in T oder auf S oder, anders ausgedrückt, auf einer inneren Niveaufläche $S\rho$ oder auf der freien Oberfläche S liegt. Aus (1) folgt für den Punkt Q sofort:

$$\frac{\partial}{\partial z_0} V(x_0, y_0, z_0) = \rho_1 \int\limits_{T_1} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau + \int\limits_{\rho_1}^{\rho_x} d\rho \int\limits_{T_\rho} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau \tag{3}$$

mit

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 .$$

Ersetzt man in den beiden Raumintegralen die Ableitung nach z_0 durch die entgegengesetzt gleiche Ableitung nach z, so gilt

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_T \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau &= -\int\limits_D dx\, dy \int\limits_{z''}^{z'} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dz = +\int\limits_D dx\, dy \left[\frac{1}{r(z_0 z'')} - \frac{1}{r(z_0 z')}\right] \\ \int\limits_{T_\rho} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau &= -\int\limits_{D_\rho} dx\, dy \int\limits_{\bar{z}''}^{\bar{z}'} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dz = +\int\limits_{D_\rho} dx\, dy \left[\frac{1}{r(z_0 \bar{z}'')} - \frac{1}{r(z_0 \bar{z}')}\right] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und man liest an Abbildung 3 ab, daß die eckigen Klammern $\leqq 0$ sind, je nachdem h beziehungsweise $\bar{h} \geqq 0$ ist. Gibt es also Sehnen oder Sehnenabschnitte, für welche h oder $\bar{h}$ positiv ausfällt, so sind die Integrale (4) sicher negativ. Andererseits ist im Punkte Q die Schwerkraft g gleich oder ungleich Null. Ist $g = 0$, so ist auch $(\partial W/\partial z) = (\partial V/\partial z) = 0$. Ist aber $g \neq 0$, hat mithin die zugehörige Niveaufläche S_ρ in Q und einer Umgebung von Q eine stetige Normale, so muß die Gerade (x_0, y_0) diese Niveaufläche in Q berühren, woraus wieder $(\partial V/\partial z) = 0$ folgt. Mithin muß stets $(\partial V/\partial z) = 0$ sein, was nur möglich ist, wenn wieder alle h und $\bar{h}$ verschwinden.

Der dritte Fall, bei welchem Q der Mittelpunkt eines Sehnenabschnittes der Niveaufläche $S_{\bar{\rho}}$ ist, kann leicht auf den ersten Fall zurückgeführt werden. Man braucht ja bloß die über der Niveaufläche $S_{\bar{\rho}}$ liegenden Massen wegzunehmen, wodurch eine neue Gleichgewichtsfigur mit dem Raume $T_{\bar{\rho}}$ und entsprechend verminderter Masse entsteht. Ist dann wie im ersten Falle bewiesen, daß alle Flächen F_ρ ($\rho_x \geqq \rho \geqq \bar{\rho}$) mit der Äquatorebene zusammenfallen, so tritt für die darüberliegenden Niveauflächen nachträglich wieder einer der drei Fälle auf, usf. Damit ist der Beweis abgeschlossen. Aus der Symmetrie der Figur ist ferner offensichtlich, daß die Rotationsachse Hauptträgheitsachse des Flüssigkeitskörpers ist.

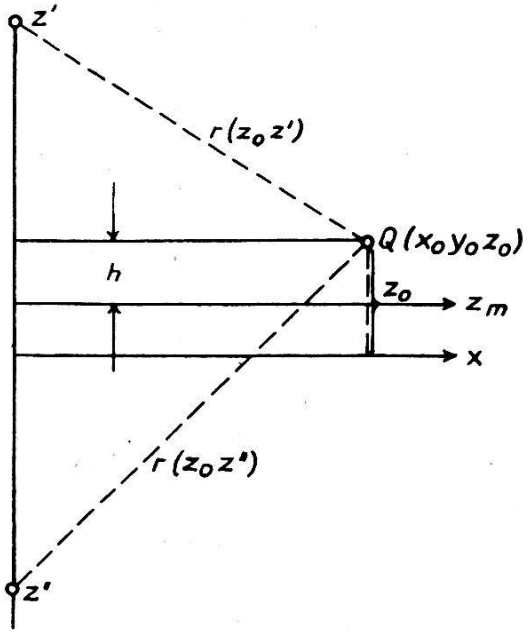

Abb. 3

Da sich übrigens die Niveauflächen der Gleichgewichtsfigur schalenartig umschließen und gegen einen singulären Punkt konvergieren, der als degenerierte Niveaufläche aufgefaßt werden kann und mit dem Schwerpunkt identisch ist, besagt die Möglichkeit der Bildung kleinerer Gleichgewichtsfiguren aus einer gegebenen Gleichgewichtsfigur, daß jede Niveaufläche als Fläche gleicher Dichte denselben Schwerpunkt besitzt. Hieraus folgt sofort für jeden Meridianschnitt einer beliebigen Niveaufläche zentrische Symmetrie bezüglich des Schwerpunktes und zusammen mit der soeben bewiesenen Symmetrie bezüglich der Äquatorebene auch Symmetrie zur Rotationsachse. Dies bedeutet jedoch noch nicht volle Rotationssymmetrie, wiewohl natürlich dieser wichtige Fall mit eingeschlossen ist.

Zum vorstehenden Theorem vergleiche man die erste[1] und zweite[2] Beweisführung von Lichtenstein sowie die Ausdehnung des Theorems auf

[1] *L. Lichtenstein*, Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung, Leipzig 1923, S. 69–72.

[2] *L. Lichtenstein*, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin 1933, S. 12–14 und 22–26.

barotrope Rotationen bei Wavre[3]. Unter barotropen Rotationen versteht man bekanntlich Rotationen, bei denen die Winkelgeschwindigkeit nicht mehr konstant, sondern eine Funktion des Abstandes von der Rotationsachse ist.

2.

Als Schichtung einer heterogenen Gleichgewichtsfigur wird die rein geometrisch betrachtete Verteilung der Flächen gleicher Dichte bezeichnet. Um ganz allgemein die Möglichkeit einer ähnlichen Schichtung zu untersuchen, setzen wir die freie Oberfläche der Figur als geschlossen und regulär voraus und gehen mit Wavre[4] von der Brunsschen Formel für die mittlere Krümmung H der Niveaufläche in einem Punkte P aus:

$$2\,gH = -(W_{11} + W_{22}), \tag{5}$$

welche unter Benützung der Poissonschen Gleichung

$$\Delta W = W_{11} + W_{22} + W_{33} = -4\,\pi k^2 \rho + 2\,\omega^2 \tag{6}$$

sofort in die Form

$$\frac{dg}{dn} - 2\,gH = -4\,\pi k^2 \rho + 2\,\omega^2 = \sigma \tag{7}$$

gebracht werden kann, wobei n die innere Normale bedeutet. Den rechts stehenden Ausdruck nennt Wavre die «transformierte Dichte». Sie ist ebenso wie das Potential W eine reine Funktion des Parameters t, der die Flächen gleicher Dichte oder die Niveauflächen kennzeichnen soll.

Da wir es mit Gleichgewichtsfiguren zu tun haben, welche sich an die homogenen MacLaurinschen Ellipsoide anschließen, und andererseits die Jacobischen Ellipsoide sehr stark abgeplattet sind, müssen wir selbstverständlich Rotationssymmetrie voraussetzen. Dann aber liegen die Lotlinien in den Meridianebenen und hängen daher nur von einem Parameter Θ ab. Wächst der Parameter t mit zunehmender Dichte, also nach innen, so ist die durch

$$\frac{dn}{dt} = N(t, \Theta) \tag{8}$$

definierte Funktion N niemals negativ. Schreibt man die Schwere

$$g = \frac{dW}{dt}\,\frac{dt}{dn} = W'\,\frac{dt}{dn},$$

so folgt sofort

$$W' = gN, \tag{9}$$

was mit der bekannten Beziehung $dW = g\,dn$ identisch ist und besagt,

[3] *R. Wavre*, Figures Planétaires et Géodésie, Paris 1932, S. 35–39.

[4] *R. Wavre*, Figures Planétaires et Géodésie, Paris 1932, S. 49–60.

daß die Schwerkraft verkehrt proportional dem Abstand der Niveauflächen ist. Aus

$$(gN)_{\Theta'} = (gN)_{\Theta''} \tag{10}$$

ergibt sich durch Differentiation

$$\left(\frac{dg}{dt} N + g \frac{dN}{dt}\right)_{\Theta'} = \left(\frac{dg}{dt} N + g \frac{dN}{dt}\right)_{\Theta''}. \tag{10a}$$

Bringt man mit (9) die Brunssche Formel (7) in die Gestalt

$$\frac{dg}{dt} = 2\,HW' + \sigma\,N \tag{11}$$

und setzt diese in (10a) ein, so findet man leicht:

$$\Phi\,(t) = \frac{\sigma\,(t)}{W'(t)} = -$$

$$- \frac{\left[2\,HN + \frac{d}{dt}(\mathrm{Log}\,N)\right]_{\Theta'} - \left[2\,HN + \frac{d}{dt}(\mathrm{Log}\,N)\right]_{\Theta''}}{(N^2)_{\Theta'} - (N^2)_{\Theta''}}, \tag{12}$$

worin Log den natürlichen Logarithmus bedeutet. Die neu eingeführte Funktion Φ hängt also einerseits nur von t, andererseits aber nur von der Schichtung in der Umgebung eines Punktes ab, da man ja die beiden Lotlinien beliebig nahe beieinander wählen kann. Ersetzt man in (11) σ durch $\Phi\,W'$ oder durch $\Phi\,gN$, so erhält man

$$\frac{dg}{dt} = W'\,(2\,H + \Phi N); \qquad \frac{1}{g}\frac{dg}{dt} = 2\,HN + \Phi\,N^2 = \frac{d}{dt}(\mathrm{Log}\,g). \tag{13}$$

Wir wählen eine spezielle Kraftlinie $\Theta = 0$ und in ihr den durch $t = 0$ bestimmten Punkt zum Ausgangspunkt. Die Schwerebeschleunigung in dieser Lotlinie werde allgemein mit g_0, speziell im Ausgangspunkt mit g_{00} bezeichnet. Integration der zweiten Gleichung (13) liefert dann

$$g_0 = g_{00}\, e^{\int_0^t (2\,HN + \Phi N^2)_0\, dt}. \tag{14}$$

Damit findet man in einem beliebigen Punkt gemäß $(\sigma/g) = \Phi\,N$ und (10)

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \Phi\,(gN) = \Phi\,(gN)_0 = g_{00}\,\Phi\,N_0\, e^{\int_0^t (2\,HN + \Phi N^2)_0\, dt} \\ g &= \frac{(gN)}{N} = \frac{(gN)_0}{N} = g_{00}\,N_0\,N^{-1}\, e^{\int_0^t (2\,HN + \Phi N^2)_0\, dt}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

In diesen beiden Formeln ist g_{00} die Schwere in einem bestimmten Punkt, während alle übrigen Größen nur von der Schichtung abhängen. Die Formeln werden hinfällig, wenn das Verhältnis Φ unbestimmt wird. Dies tritt ein, wenn sich in einem Intervall $\alpha < t < \beta$ die rechte Seite von (12) in der Form 0 : 0 darstellt, das heißt, wenn $N_{\Theta'} = N_{\Theta''}$ und damit auch $H_{\Theta'} = H_{\Theta''}$ ist. Die Niveauflächen müssen also in dem Intervall von konstanter mittlerer Krümmung, mithin parallel und überdies geschlossen sein, was nur für konzentrische Kugeln möglich ist.

Nach diesen Vorbereitungen können wir an die eigentliche Aufgabe herantreten. Gemäß der schalenartigen Anordnung der Niveauflächen fällt bei vorausgesetzter Ähnlichkeit das Ähnlichkeitszentrum mit dem Schwerpunkt zusammen. Wählt man einen beliebigen Radiusvektor r' zur Einheit und ordnet der freien Oberfläche den Parameterwert $t = 0$ zu, so hat jener Punkt von r', dem der Parameterwert t zukommt, die Distanz $(1 - t)$ vom Zentrum. Aus der Ähnlichkeit der Flächen gleicher Dichte folgt dann unmittelbar, daß entlang r' der Differentialquotient N gleich einer Konstanten λ' und analog entlang eines beliebigen anderen Radiusvektors r'' gleich einer anderen Konstanten λ'' ist, so daß sich für das Verhältnis Φ der vereinfachte Ausdruck

$$\Phi(t) = -2 \frac{\lambda' H' - \lambda'' H''}{\lambda'^2 - \lambda''^2} \tag{12a}$$

ergibt. Die mittleren Krümmungen ändern sich verkehrt proportional zur Distanz vom Zentrum. Sind H'_0 und H''_0 die Werte auf der freien Oberfläche, so findet man auf der Niveaufläche t in den entsprechenden Punkten der beiden Radien r' und r''

$$H' = \frac{H'_0}{1 - t}; \quad H'' = \frac{H''_0}{1 - t}$$

und daher

$$\Phi(t) = (1 - t)^{-1} \Phi(0). \tag{16}$$

Wegen der bewiesenen Symmetrieeigenschaft der Äquatorebene wird der in ihr liegende längste Radiusvektor — es sei dies r' — die ganze Schar der Niveauflächen senkrecht durchsetzen und daher eine Lotlinie sein. Im Endpunkt dieses Radiusvektors an der Oberfläche sei die Schwere g'_0. Da jetzt überdies $\lambda' = 1$ sein muß, kann man die erste Gleichung (15) unter Verwendung von (16) in die Form bringen:

$$\sigma(t) = g'_0 \Phi(0) (1 - t)^{-1} e^{\int_0^t [2 H'_0 + \Phi(0)] (1 - t)^{-1} dt}, \tag{17}$$

was wesentlich vereinfacht werden kann:

$$\sigma(t) = g'_0 \Phi(0) (1 - t)^{-1-m}, \tag{17a}$$

wenn man abkürzend die Konstante $[2 H'_0 + \Phi(0)] = m$ setzt. Wegen der bekannten Poincaréschen Ungleichung

$$\omega^2 < 2 \pi k^2 \rho_{\min} \tag{18}$$

sind in der ganzen Flüssigkeit σ und damit auch Φ negativ. Die Konstante m ist im Hinblick auf $(\sigma/g) = \Phi N$ und auf (7) identisch mit $(dg/dn)_0/g'_0$.

Wir nehmen zuerst $m = -1$ an. In diesem Falle wird σ eine Konstante und die Masse ist homogen. Für eine homogene Gleichgewichtsfigur ist also eine ähnliche (homothetische) Schichtung möglich. Wir betrachten das MacLaurinsche Ellipsoid. Ganz allgemein sind die inneren Niveauflächen eines beliebigen homogenen Ellipsoides selbst homothetische Ellipsoide. Im Falle des Gleichgewichtes gehört die freie Oberfläche dieser Schar ähnlicher Niveauflächen an, welche dann mit den Flächen gleichen Druckes identisch sind. Für die Schwere in einem inneren Punkt gilt:

$$g = 4\,\psi(\eta)\,\pi k^2 \rho a_i \sqrt{\frac{1+\eta^2}{1+\eta^2\cos^2\varphi}} \tag{19}$$

mit

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\eta^3}(\eta - \operatorname{arctg}\eta).$$

Hierin ist a_i der Äquatorradius einer beliebigen inneren Niveaufläche und η die zweite numerische Exzentrizität der ähnlichen Meridianellipsen. Wir finden also für die Äquatorschwere auf der freien Oberfläche $g'_0 = 4\,\psi(\eta)\,\pi k^2 \rho a_0$ und wegen $dn = -da$ und $a_0 = r' = 1$ tatsächlich $m = -1$.

Mit zunehmender Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt wächst bei den heterogenen Gleichgewichtsfiguren an der Oberfläche (dg/dn) allmählich an $(m > -1)$. Ist der Fall $m = 0$ überschritten, so rückt das Schweremaximum in zunehmende Tiefe, wie dies zum Beispiel bei der Erde bereits der Fall ist. Allerdings ist die Tiefe des Schweremaximums in der Erde noch ziemlich ungewiß; sie hängt von dem hypothetischen Dichtegesetz ab und beträgt je nach Annahme 637 km (Bullen-Bullard), 1062 km (Legendre) oder 1547 km (Wiechert), um nur die wichtigsten Resultate zu nennen. Eine vollständige Massenkonzentration im Schwerpunkt ist bei den heterogenen Gleichgewichtsfiguren unmöglich. Denn dann würde an Stelle der freien Oberfläche eine äußere Niveaufläche des «rotierenden Massenpunktes» treten. Doch darf der obere Grenzwert von m aus dem entsprechenden «Sphäroid der größten Massenkonzentration» berechnet werden. Für diese Sphäroide ist die Äquatorschwere $g'_0 = (k^2E/a^2_0)\,(1 - 2\mathfrak{a})$, woraus sich wie oben durch Differentiation unter Beachtung der Beziehung $a(d\mathfrak{a}/da) = \frac{5}{2}\varepsilon - 2\mathfrak{a} = 3\mathfrak{a}$ schließlich $m = +2(1 + 3\mathfrak{a})$ ergibt, wenn man wieder $a_0 = 1$ setzt.

Man sieht jetzt auch unmittelbar, daß der Fall $m < -1$ unmöglich ist; er würde nämlich eine Abnahme der Dichte nach innen erfordern. Nach dieser Diskussion von m ist der gewünschte Beweis leicht zu erbringen. Für alle m zwischen den Grenzen $-1 < m < +2\,(1 + 3\mathfrak{a})$ wird nämlich der Exponent von $(1 - t)$ in (17 a) negativ sein, womit wir bereits

einen Widerspruch aufgedeckt haben. Denn bei Annäherung an das Zentrum ($t \rightarrow 1$) würde die Dichte gegen ∞ streben, was physikalisch unmöglich ist. Damit ist die Möglichkeit einer ähnlichen Schichtung für die heterogenen Gleichgewichtsfiguren widerlegt.

Allerdings haben wir noch den Sonderfall der Kugel zu betrachten. Wir nehmen an, daß $\Phi(t)$ unbestimmt wird. Dies ist, wie wir bereits wissen, nur möglich, wenn die Schichtung eine Kugel enthält. Bei vorausgesetzter Ähnlichkeit folgt daraus aber, daß die Schichtung vollständig kugelförmig ist, was nur im Ruhezustand möglich ist. Eine ähnliche Schichtung ist mithin nur bei homogenen Figuren und bei der Kugel möglich.

Abschließend sei noch bemerkt, daß Wavre den Exponenten in (17 a) irrtümlich mit $(-1 + m)$ berechnet hat. Bei ihm ist also der homogene Fall fälschlich durch $m = +1$ charakterisiert, und es entgeht ihm vermutlich aus diesem Grunde auch die absolute Unmöglichkeit eines homogenen Durchgangsstadiums; ein homogenes MacLaurinsches Ellipsoid kann niemals inmitten einer linearen Reihe heterogener Gleichgewichtsfiguren liegen, sondern immer nur die Ausgangsfigur einer solchen Reihe bilden.

Die Messung der Basis und des Basisvergrößerungsnetzes von Heerbrugg im Jahre 1959

Von Prof. Dr. F. Kobold

Nach einem Vortrag vom 4. September 1959 vor der Schweizerischen Geodätischen Kommission und der Konferenz der eidgenössischen und kantonalen Vermessungsaufsichtsbeamten in Heerbrugg.

I.

Wenn in diesem Jahr in der Schweiz eine neue Basis mit Basisvergrößerungsnetz gemessen wird, so werden die meisten Vermessungsfachleute unseres Landes sich fragen, ob eine derartige geodätische Operation, die mit einem beträchtlichen Aufwand an Feld- und Rechenarbeit verbunden ist, notwendig sei. Sie sind zu dieser Fragestellung berechtigt, weil seit Jahrzehnten der Maßstab unserer Landestriangulation nie diskutiert wurde. In der Tat sind seit Fertigstellung der Landestriangulation keine Fälle bekannt geworden, bei denen genaue direkte Distanzmessungen nicht in genügendem Maße mit den Distanzen übereinstimmten, welche sich aus den Koordinaten y und x nach Anbringung der Projektionskorrektur und der Korrektur für die Meereshöhen ergeben.

So sind es keineswegs Bedürfnisse der schweizerischen Landesvermessung, welche die zuständigen Instanzen Deutschlands, Österreichs und der Schweiz veranlaßt haben, eine Basis bei Heerbrugg im Rheintal mit zugehörigem Basisvergrößerungsnetz zu messen. Selbst für den Fall, daß