Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 57 (1959)

Heft: 11

Artikel: A propos d'une forme générale de compensation par la méthode des moindres carrés

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-215263

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le procédé indiqué ci-dessus pour l'orientation relative est basé sur la mesure des parallaxes aux points 5 et 6 seulement, après qu'on a éliminé la parallaxe aux points 1, 2, 3 et 4 facilement par les éléments κ', κ'', φ' et φ''. La mesure des parallaxes se fait par estimation en la comparant au diamètre apparent de l'index repère.

On constate aussi qu'il n'est pas nécessaire d'introduire dans l'appareil les corrections calculées pour κ' et κ'', parce qu'il est toujours possible d'éliminer ces parallaxes par une observation directe dans le restituteur.

A propos d'une forme générale de compensation par la méthode des moindres carrés

Par A. Ansermet

Remarques préliminaires

Jusqu'à une date assez récente, on considérait comme forme générale de compensation ([1], p. 209) celle basée sur le système ci-après d'équations que nous appellerons initiales:

$$\begin{aligned} E_a &= [av] + F_a\,(x, y, z \ldots) + w_a = 0 \\ E_b &= [bv] + F_b\,(x, y, z \ldots) + w_b = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_r &= [rv] + F_r\,(x, y, z \ldots) + w_r = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

où les fonctions F sont linéaires

$$a_a + [aL] = w_a;\ b_0 + [bL] = w_b \ldots\ldots r_0 + [rL] = w_r \tag{2}$$

sont les équations dites aux discordances.

Le système d'équations normales résulte de la condition:

$$[pvv] - 2\,k_a.E_a - 2\,k_b.E_b \ldots\ldots - 2\,k_r.E_r = \text{minimum} \tag{3}$$

(voir n° juin 1959, p. 216–224).

Il y a $(r + m)$ équations normales, m inconnues x, y, z ..... tandis que les L_i sont les éléments mesurés, $(L_i + v_i)$ les valeurs compensées, $(L_i + f_i)$ des valeurs provisoires et p_i les poids $(i = 1,2 \ldots\ldots n)$. Les k_a, k_b ..... k_r sont les corrélatifs. Posons de plus $L'_i = L_i + f_i$.

Dans le numéro de juin dernier a donc paru un article fort intéressant avec lequel cette très courte note n'est pas sans une certaine corrélation. L'auteur donne au problème de l'extension en liant encore les inconnues par des relations telles que:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + A_2y + A_3z + A_0 &= 0 \\ B_1x + B_2y + B_3z + B_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mais au lieu d'éliminer au préalable deux des inconnues dans ce groupe (4), ce qui paraîtrait judicieux à certains égards, il développe une solution *non* fractionnée, donc d'un seul jet (aus einem Guß) et calcule le poids d'une fonction contenant les $(L_i + v_i)$ et les x, y, z ainsi que l'erreur quadratique moyenne de cette fonction.

Cette solution est au premier abord bien séduisante, et il convient de féliciter l'auteur, mais il n'est pas certain cependant qu'une telle façon de traiter le problème donnera toujours entière satisfaction aux praticiens pour la raison suivante: au moment de l'établissement des systèmes d'équations (1), (2), (3) le calculateur ignore parfois qu'il sera mis en présence, ultérieurement, de nouvelles conditions (4). Il effectue donc la compensation avant l'adjonction de ces équations ([4], p. 107). Il est alors amené à fractionner le calcul.

C'est le but de ces lignes de rechercher une solution, qui ne sera pas nécessairement la seule, en traitant deux cas concrets mais fictifs et de caractère plutôt didactique. Il n'est pas facile de trouver dans la pratique courante un exemple revêtant vraiment cette forme très générale de compensation.

Faisons donc momentanément abstraction des équations de condition (4), lesquelles peuvent résulter de mesures de contrôle effectuées bien après le calcul de la compensation basée sur les systèmes (1) à (3) et déterminons le poids d'une fonction:

$$F\,(x, y, z \ldots (L_1 + v_1), (L_2 + v_2) \ldots\ldots) \text{ ou } L_i = L'_i - f_i$$

à cet effet posons:

$$x = x_0 + dx, \quad y = y_0 + dy, \quad z = z_0 + dz$$

où les valeurs provisoires x_0, y_0, z_0 sont arbitraires moyennant cette réserve que les accroissements dx, dy, dz, nouvelles inconnues, soient suffisamment petits. En d'autres termes ces x_0, y_0, z_0 sont des éléments auxiliaires du calcul. Dans la solution par calcul non fractionné la loi de Gauss est appliquée aux x_0, y_0, z_0 en leur attribuant les erreurs quadratiques moyennes $\pm m_x$, $\pm m_y$, $\pm m_z$. Ce groupe de termes a du reste été éliminé par la suite (p. 221, n° de juin[1]).

En ce qui concerne la fonction, on peut envisager deux cas:

1° les inconnues x, y, z ou plutôt dx, dy, dz sont éliminées par la méthode usuelle des coefficients indéterminés.

2° Si cette élimination n'a pas lieu, on retrouve une forme connue, mais, en général, il y a corrélation entre les inconnues, ce qui exclut l'application de la loi de Gauss.

---

[1] Cette application de la loi de Gauss aux x_0, y_0, z_0 a certainement surpris les lecteurs.

Dieser grundlegende Fehler ist leider bei der Durchsicht durch den Redaktor nicht bemerkt worden. – Herrn Prof. Ansermet gebührt Dank für die Richtigstellung.

Dans les deux éventualités, la fonction F sera finalement exprimée linéairement au moyen des L ou plutôt des f ([1], p. 154–156) en passant par les k et les w.

La première phase de la compensation étant terminée on se trouve en présence, *ultérieurement,* des conditions (4).

La seconde phase comporte le fractionnement du calcul des poids qui nous intéresse spécialement ici: de plus, aux corrections dx, dy, dz, il faut ajouter des surcorrections (dx), (dy), (dz). Enfin aux v_i viendront s'ajouter des v'_i:

$$V_i = v_i + v'_i \quad \text{et} \quad [pVV] = [pvv] + [pv'v']$$

Le problème n'est donc plus nouveau dès que les équations initiales ont été transformées en vue d'isoler mutuellement les v_1, v_2, ... v_n (formes (5′) et (8′)).

Deux exemples le montreront, où les w sont exprimés en fonction des f.

Première application

1. Considérons le système conçu pour faciliter l'élimination des v:

$$\left.\begin{array}{l}
-1.693\,dx + 1.907\,dy = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w_1 \\
-1.693\,dx + 0.493\,dy = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_6 + w_2 \\
-0.386\,dx + 0.400\,dy = v_1 + v_2 + v_3 + v_5 + v_6 + w_3 \\
-0.186\,dx + 1.800\,dy = v_1 + v_2 + v_4 + v_5 + v_6 + w_4 \\
-0.986\,dx + 0.200\,dy = v_1 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + w_5 \\
+0.014\,dx + 1.200\,dy = + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + w_6
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

avec les poids ci-après:

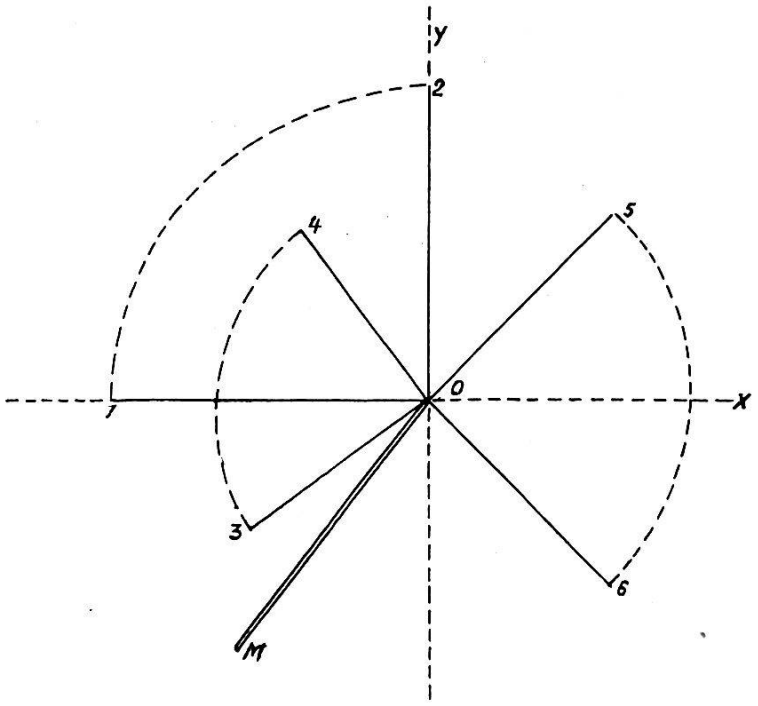
$$p_1 = p_2 = 1; \quad p_3 = p_4 = 1.5; \quad p_5 = p_6 = 1.25$$

On obtient sans peine un nouveau système de forme générale:

$$-f + v = adx + bdy \quad \text{où} \quad a^2 + b^2 = 1 \qquad (5')$$

que l'on rencontre en télémétrie; il y a 12 coefficients

	a	b		
1	-1.00	0.00	$p_1 = 1$	
2	0.00	$+1.00$	$p_2 = 1$	$[pab] = 0;\ Q_{12} = 0$
3	-0.8	-0.6	$p_3 = 1.5$	$[paa] = [pbb] = 3.75$
4	-0.6	$+0.8$	$p_4 = 1.5$	
5	$+0.707$	$+0.707$	$p_5 = 1.25$	$Q_{11} = Q_{22} = \dfrac{1}{3.75}$
6	$+0.707$	-0.707	$p_6 = 1.25$	



avec le contrôle

$$[p:P] = 2 \times \frac{1}{3.75} + 2 \times \frac{1.5}{3.75} + 2 \times \frac{1.25}{3.75} = 2$$

où les P sont les poids amplifiés grâce à la compensation.

Les côtés télémétrés sont deux à deux mutuellement égaux et perpendiculaires.

Seconde phase des calculs. Elle résulte de la mesure, à titre de contrôle, d'une 7e distance MO que l'on admet exempte d'erreur (trait double sur la figure) d'où la condition nouvelle:

$$-0{,}6\,(dx) - 0{,}8\,(dy) + A'_0 = 0 \qquad (6)$$

relation facile à interpréter géométriquement. L'ellipse d'erreur pour le point calculé devient complètement aplatie.

Poids de fonctions. Considérons comme fonctions les six distances 1–0, 2–0, ... 6–0 déterminées en tenant compte de (6); soient P' les poids nouveaux

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{P} - \frac{[(A)\,f']^2}{[A\,(A)]} \qquad ([3], \text{ p. } 317\text{–}321) \qquad (7)$$

où les A sont les coefficients dans (6) et les f' les 12 coefficients a et b pris deux à deux.

$$(A_1) = A_1 Q_{11} + A_2 Q_{12} \qquad (A_2) = A_1 Q_{21} + A_2 Q_{22}$$

d'où les résultats:

$$
\text{Calcul des } (p:P') \left\{ \begin{array}{c|l}
1 & \dfrac{1}{3.75} - 0.096 \times 1 = 0.171 \\
2 & \dfrac{1}{3.75} - 0.171 \times 1 = 0.096 \\
3 & \dfrac{1.5}{3.75} - 0.246 \times 1.5 = 0.031 \\
4 & \dfrac{1.5}{3.75} - 0.021 \times 1.5 = 0.369 \\
5 & \dfrac{1.25}{3.75} - 0.261 \times 1.25 = 0.007 \\
6 & \dfrac{1.25}{3.75} - 0.0053 \times 1.25 = \underline{0.326} \\
 & [p:P'] = 1.000
\end{array} \right.
$$

La répartition des poids est bouleversée par l'équation de condition (6) ce que l'on pouvait présumer. Les valeurs 0.007 et 0.326 ci-dessus par exemple prouvent: la première que le poids P' y relatif est très grand tandis que pour la seconde le poids a été très peu influencé par la relation (6). Il suffit d'examiner la figure pour interpréter ces résultats.

Seconde application

2. Cet exemple présente quelques particularités d'où son intérêt. Ici encore les données numériques sont simples, et le groupe des équations initiales reçoit une structure permettant l'élimination rapide des v_1, v_2, v_3 ..... On a encore $n = r$

$$
\left. \begin{array}{l}
w_1 + [v]^7{}_1 - v_1 = + \quad dx + 1.00 \; dy + 2.00 \; dz \\
w_2 + [v] - v_2 = + \quad dx + 0.057 \; dy + 0.667 \; dz \\
w_3 + [v] - v_3 = + 1.816 \; dx + 1.4714 \; dy + 0.667 \; dz \\
w_4 + [v] - v_4 = + 0.184 \; dx + 1.4714 \; dy + 0.667 \; dz \\
w_5 + [v] - v_5 = + 0.00 \; dx + 1.00 \; dy + 1.00 \; dz \\
w_6 + [v] - v_6 = + \quad dx + 0.00 \; dy + 1.00 \; dz \\
w_7 + [v] - v_7 = + \quad dx + 1.00 \; dy + 0.00 \; dz
\end{array} \right\} \qquad (8)
$$

système transformable sous la forme générale

$$
-f + v = adx + bdy + cdz \quad \text{où} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad (8')
$$

rentrant encore dans le domaine de la télémétrie et donnant lieu à 21 coefficients:

	a	b	c	
1	0	0	— 1	$p_1 = 1$
2	0	+ 0.943	+ 0.333	$p_2 = 1$
3	— 0.816	— 0.4714	+ 0.333	$p_3 = 1$
4	+ 0.816	— 0.4714	+ 0.333	$p_4 = 1$
5	+ 1	0	0	$p_5 = 1.5$
6	0	+ 1	0	$p_6 = 1.5$
7	0	0	+ 1	$p_7 = 1.5$

$$[pab] = [pac] = [pbc] = 0$$
$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = 0$$
$$[paa] = [pbb] = [pcc] = 17/6$$
$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 6/17$$

avec le contrôle:

$$[p:P] = 4 \times \frac{6}{17} + 3 \times 1{,}5 \frac{6}{17} = 3$$

les P étant les poids des sept distances après compensation.

Seconde phase des calculs. Résulte de nouvelles mesures de distances effectuées ultérieurement et admises exemptes d'erreurs d'où les conditions:

$$\left.\begin{aligned} + 0.577\,(dx) + 0.577\,(dy) + 0.577\,(dz) + A_0 &= 0 \\ - 0.408\,(dx) - 0.408\,(dy) + 0.816\,(dz) + B_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

où les inconnues sont encore les surcorrections à ajouter aux corrections déterminées au cours de la première phase des calculs. Les coefficients des inconnues dans les équations (9) sont A_1, A_2, A_3 respectivement B_1, B_2, B_3.

$$(A_1) = (A_2) = (A_3) = + 0.577 \frac{6}{17} \quad \text{et}$$

$$(B_1) = (B_2) = - 0.408 \frac{6}{17}; \; (B_3) = + 0.816 \frac{6}{17}$$

$$[A(A)] = 6/17 = [B(B)]; \; [A(B)] = [B(A)] = 0 \qquad ([3], \text{p. } 317\text{–}321)$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{P'} = \frac{1}{P} - \frac{[(A)f']^2}{[A(A)]} - \frac{[(B)f']^2}{[B(B)]}$$

où les f' sont les 21 coefficients, groupés trois par trois, permettant de calculer les poids de sept fonctions, c'est-à-dire les poids P' des sept distances en tenant compte des équations (9). Ce même calcul peut être étendu à d'autres fonctions sans difficulté.

Calcul des $(p:P')$	1	6/17	— 2/17		— 4/17		= 0.00	
	2	6/17	— 3,26/17		— 0.076/17		= 2.664/17	
	3	6/17	— 1,82/17	6/17	— 3.62/17	4/17	= 0.36/17	8/17
	4	6/17	— 0.92/17		— 0.104/17		= 4.976/17	
	5	9/17	— 3/17		— 1.5/17		= 4.5/17	
	6	9/17	— 3/17		— 1.5/17		= 4.5/17	
	7	9/17	— 3/17		— 6/17		= 0.00	
Sommes:		3	— 1		— 1		= 1 = $[p:P']$	

Ces deux valeurs 0,00 ($P' = \infty$), sous chiffres 1 et 7, peuvent au premier abord surprendre, mais l'interprétation géométrique des équations (9) est immédiate. Dans un domaine spatial très restreint, on a le point provisoire (x_0, y_0, z_0), puis les points calculés (première et deuxième phases), et on voit que les équations (9) sont celles de portions très petites de plans dont la droite d'intersection est parallèle au plan $x - y$. Ces équations (9) suffisent pour fixer la coordonnée z indépendamment de la compensation (deuxième phase).

Cas où $n < r$. Admettons par exemple $n = 6$ et $r = 7$.

Dans une des sept équations, on peut, en s'aidant des six autres équations, éliminer les v; on est ramené au cas où $n = 6$ et $r = 6$ avec, en plus, une équation de condition entre les inconnues.

Cas où $n > r$. Emettons l'hypothèse: $n = 8$ et $r = 7$.

On assimilera alors une des valeurs v à une inconnue ([2], p. 286). En *résumé*, il faut reconnaître l'intérêt que présente la solution publiée en juin dernier (p. 216–224). Toutefois, si le calculateur est mis en présence initialement et simultanément des systèmes d'équations (1) à (4), il faut prendre aussi en considération la méthode consistant à éliminer autant d'inconnues qu'il y a d'équations (4) ce qui ramène le problème à une forme connue. Dans de nombreux cas la solution par fractionnement du calcul est également à considérer. Le but de ces lignes était de formuler quelques suggestions et nullement d'épuiser le sujet.

Littérature

[1] *W. Großmann*, Ausgleichungsrechnung (Springer, Berlin).

[2] *R. Helmert*, Ausgleichungsrechnung (Teubner, Leipzig 1924).

[3] *O. Koll*, Methode der kleinsten Quadrate (Springer, Berlin).

[4] *R. Marchant*, Compensation des mesures (Bruxelles 1956).