

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 55 (1957)

Heft: 11

Artikel: Zur Fehlerrechnung bei geringer Anzahl von Beobachtungen [Schluss]

Autor: Matthias, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-213598>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 11 • LV. Jahrgang

Erscheint monatlich

12. November 1957

Zur Fehlerrechnung bei geringer Anzahl von Beobachtungen

Von dipl. Ing. H. Matthias

(Schluß)

Der häufigste Wert v_W und der Mittelwert v_M sind Funktionen des Scharparameters n

$$v_W = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}}$$

$$v_M = \frac{\left[\left(\frac{m}{\mu}\right)_1\right]^N}{N}$$

wo für gerades n

$$v_M = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-3)}$$

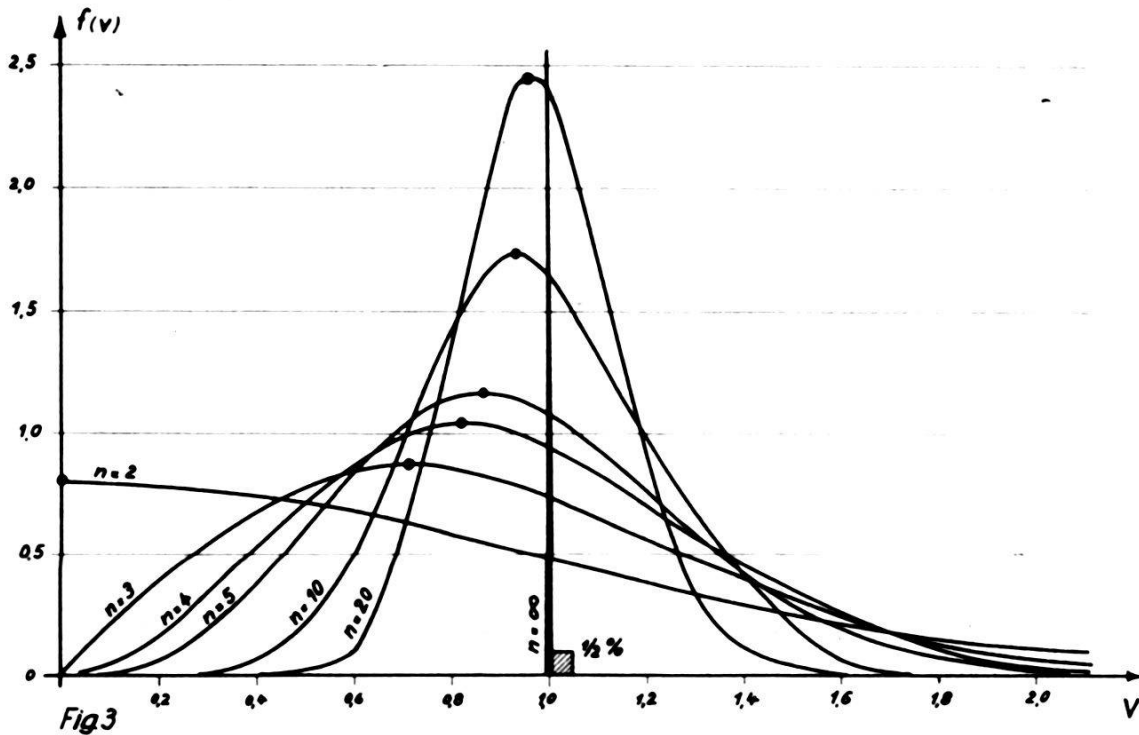
und für ungerades n

$$v_M = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2)}$$

Figur 3 zeigt eine Auswahl von Verteilungskurven. Der kleinste Parameter ist $n = 2$. Diese Verteilungskurve ist von einer Normalverteilung ganz verschieden. Entsprechend der Tatsache, daß der wahrscheinlichste Wert der Differenz von zwei Beobachtungen gleich Null ist, ist der häufigste Wert des mittleren Fehlers m auch Null. Ein nur aus zwei Messungen gerechneter mittlerer Fehler ist also sehr unsicher.

Für wachsende n nähert sich die Verteilung immer mehr einer normalen. Der häufigste Wert v_W nähert sich immer mehr dem tatsächlichen Wert $v_\mu = 1.0$.

Wird n sehr groß, so kann nicht mehr von einer Verteilung gesprochen werden; tatsächlicher Wert v_μ , häufigster Wert v_W und Mittelwert



n	v_M tatsächl. Wert	v_w häufigster Wert	v_M Mittel- wert	w % ($v < 1.0$)	F_n	$f(v)$									
						$v=0$	$v=0.2$	$v=0.4$	$v=0.6$	$v=0.8$	$v=1.0$	$v=1.2$	$v=1.6$	$v=2.0$	v_w
2	1.0	0	0.80	68.3	0.80	0.80	0.78	0.74	0.68	0.58	0.49	0.39	0.22	0.11	0.00
3	1.0	0.71	0.89	63.2	2.0	~0	0.38	0.68	0.84	0.85	0.74	0.57	0.25	0.07	0.06
4	1.0	0.82	0.92	61.2	4.15	~0	0.16	0.53	0.87	1.03	0.94	0.70	0.23	0.04	0.03
5	1.0	0.87	0.94	59.3	8.0	~0	0.06	0.38	0.84	1.14	1.08	0.78	0.20	0.02	0.16
10	1.0	0.94	0.97	56.4	150	~0	~0	0.05	0.50	1.41	1.67	0.98	0.06	~0	0.12
20	1.0	0.97	0.99	54.3	326.10*	~0	~0	~0	0.10	1.35	2.45	0.96	~0	~0	2.46
∞	1.0	1.0	1.0	50.0	∞	0	0	0	0	0	∞	0	0	0	∞

Tab. 4

v_M fallen zusammen. Die Häufigkeitsfunktion hat bei $v = 1.0$ einen Pol, im übrigen ist ihr Wert für alle v aber gleich Null.

Von großer Bedeutung ist die Tatsache, daß für alle n die Fläche, die von der Verteilungskurve, der Abszissenachse und der Ordinate bei $v = 1.0$ eingeschlossen wird, 50% übersteigt. Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Stichprobe für den mittleren Fehler m einen zu kleinen Wert zu berechnen, ist also

$$W(v < 1.0) = \int_0^{1.0} f(v) dv > 50\%$$

Das bedeutet, daß in der Mehrzahl der Fälle, insbesondere bei kleinen n , die Meßgenauigkeit zu günstig beurteilt wird.

D. Die t -Verteilung von « Student »

Die unter A und B dargestellten Verhältnisse, wie sie üblicherweise den Fehlerbetrachtungen zugrunde gelegt werden, haben nur Gültigkeit, wenn der wahre Wert L und der tatsächliche mittlere Fehler μ einer Beobachtung l bekannt sind. Die dort ermittelten Wahrscheinlichkeiten gelten für das Auftreten einer Beobachtung l oder eines Stichprobenmittels S innerhalb von Grenzen, die mit dem tatsächlichen mittleren Fehler μ einer Messung beiderseits des wahren Wertes L definiert sind.

Da in der Regel aber nur aus einer Stichprobe das Stichprobenmittel S und der mittlere Fehler m zur Verfügung stehen, muß die Frage nach den Wahrscheinlichkeiten anders gestellt werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der wahre Wert L innerhalb von Grenzen liegt, die mit dem mittleren Fehler m beiderseits des Stichprobenmittels S definiert sind.

Diese Aufgabe löst die t -Verteilung. Die Funktion

$$f(t) = \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-3}{2}\right)! \sqrt{(n-1)\pi} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

mit der Anzahl n der Beobachtungen in einer Stichprobe als Parameter und der freien Variablen t definiert eine Schar von Häufigkeitsfunktionen so, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, daß der wahre Wert L innerhalb der Grenzen $\left(S \pm t \cdot \frac{m}{\sqrt{n}}\right)$ liegt, sich aus

$$W\left(S \pm t \frac{m}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-t}^{+t} f(t) dt$$

berechnen läßt.

Die t -Verteilung ist symmetrisch. Sie verläuft flacher als die Normalverteilung. Für große n wird die t -Verteilung zu einer Normalverteilung. Figur 4 und Tabelle 5 zeigen diese Eigenschaften deutlich. Die Kurve für $n = \infty$ ist mit der Normalverteilung in Figur 1 identisch.

Ein Beispiel entnehmen wir aus Tabelle 5 der Zeile für $n = 4$ Beobachtungen. Soll mit den für den mittleren Fehler beziehungsweise Maximalfehler üblichen Wahrscheinlichkeiten von 68.2% beziehungsweise 99.7% gerechnet werden können, so sind die Grenzen mit $\left(S \pm 1.2 \frac{m}{\sqrt{n}}\right)$

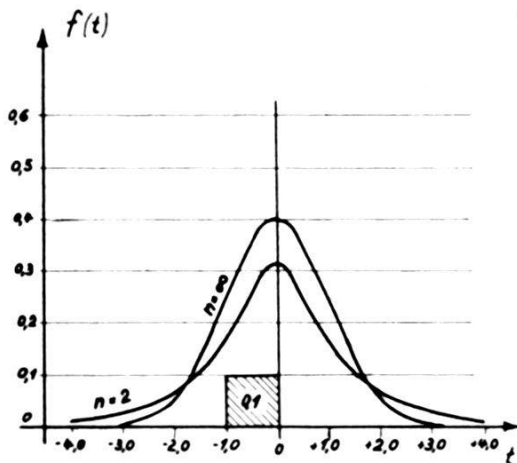


Fig 4

n	$w(S \pm t \frac{m}{\sqrt{n}})$		t		f(t)								
	68.2%	99.7%	1.0	3.0	t = ±0	t = ±0.5	t = ±1.0	t = ±1.5	t = ±2.0	t = ±2.5	t = ±3.0	t = ±3.5	t = ±4.0
2	1.85	236	50	80	0.32	0.25	0.16	0.10	0.06	0.04	0.03	0.02	0.02
3	1.3	26	57	90	0.35	0.29	0.19	0.11	0.07	0.04	0.03	0.02	0.01
4	1.2	11	61	94	0.37	0.31	0.21	0.12	0.07	0.04	0.02	0.01	0.01
5	1.15	7.5	62	96	0.38	0.32	0.22	0.13	0.07	0.04	0.02	0.01	0.01
10	1.05	4.4	65	98	0.39	0.34	0.23	0.13	0.06	0.03	0.01	0.01	0
20	1.03	3.6	67	99	0.39	0.34	0.24	0.13	0.06	0.02	0.01	~0	~0
∞	1.0	3.0	68.2	99.7	0.40	0.35	0.24	0.13	0.05	0.02	~0	~0	~0

Tab 5

beziehungsweise $\left(S \pm 11 \cdot \frac{m}{\sqrt{n}}\right)$ anzusetzen. Werden die Grenzen jedoch nur mit $\left(S \pm \frac{m}{\sqrt{n}}\right)$ und $\left(S \pm 3 \cdot \frac{m}{\sqrt{n}}\right)$ angesetzt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie den wahren Wert L enthalten, nur 61 % beziehungsweise 94 %.

E. Beispiel

Das Beispiel bezieht sich auf die im Abschnitt C behandelte Verteilung der mittleren Fehler m .

In einem unter Leitung von Herrn Prof. Dr. F. Kobold durchgeführten Vermessungskurs der ETH wurden bei umfangreichen Rutschvermessungen Polygonzüge hoher Genauigkeit mit einer durchschnittlichen Seitenlänge von 50 m angelegt.

Die Messungen wurden von drei Studentengruppen zu 2 bis 3 Mann mit Kern-Ausrüstungen, bestehend aus DKM-2-Theodolit, Zentrierstativ und Basislatte, ausgeführt. Die geforderte Genauigkeit der Parallaxwinkel war ± 3 cc mittlerer Fehler am Mittel.

Die Ansetzung dieses Fehlermaßes hat sich sehr bewährt. Nach kurzer Übung erreichten die Studenten die geforderte Genauigkeit in der Regel bei viermaliger Messung in einer Lage; das heißt in 78 % aller Fälle war eine 4malige Messung, in 17 % aller Fälle eine 8malige Messung und in 5 % aller Fälle eine 12malige Messung notwendig.

Für die innere Genauigkeit der Parallaxwinkel sind die Stabilität der Stativaufstellung, die Teilungs- und Mikrometerfehler einerseits und der Ziel- und Ablesefehler in Abhängigkeit von Beobachter, Zielmarke und atmosphärischen Verhältnissen andererseits maßgebend.

Unter der für die vorliegenden Verhältnisse durchaus vertretbaren Voraussetzung, daß die äußeren Verhältnisse – Stativaufstellung, atmosphärische Verhältnisse und Distanz – im Durchschnitt recht ähnlich

waren, liegt die Vermutung nahe, daß auch die tatsächliche innere Genauigkeit einer Parallaxwinkelmessung für ein und denselben Beobachter für alle Stationen dieselbe war. Abgesehen von der Größe des Winkels, können also die Beobachtungen aller Stationen im Sinne von Tabelle 1 als Stichprobenmessungen für dieselbe Größe betrachtet werden. Die

Beob. <i>N</i>	<i>m</i>	$v = \frac{m}{\mu}$	Bemerkungen
*	±6,1	1,49	$[m^2] = 336,3$ $\mu = \pm 4,10$
I	2,4	0,59	
	4,5	1,10	
<i>N</i> =20	5,4	1,32	
	5,5	1,34	
	3,2	0,78	
	1,8	0,44	
	5,8	1,41	
	2,9	0,71	
	3,2	0,78	
	4,4	1,07	
	3,8	0,93	
	4,9	1,19	
	3,8	0,93	
	3,0	0,73	
	2,2	0,54	
	4,2	1,02	
	2,3	0,56	
	1,7	0,41	
	6,0	1,46	

Tab. 6

verschiedenen Ergebnisse für die mittleren Fehler *m* der einzelnen Stationen – und damit die Notwendigkeit einer nicht immer gleichen Anzahl von Beobachtungen zur Erreichung der geforderten Genauigkeit – wären in diesem Falle nur der theoretischen Streuung gemäß Abschnitt C zuzuschreiben.

Im Folgenden wird die Häufigkeitsverteilung der mittleren Fehler *m* im Beispiel untersucht. Zur Verfügung stehen die Messungen von 8 Beobachtern I–VIII auf zusammen 172 Stationen. Die Messungen jedes Beob-

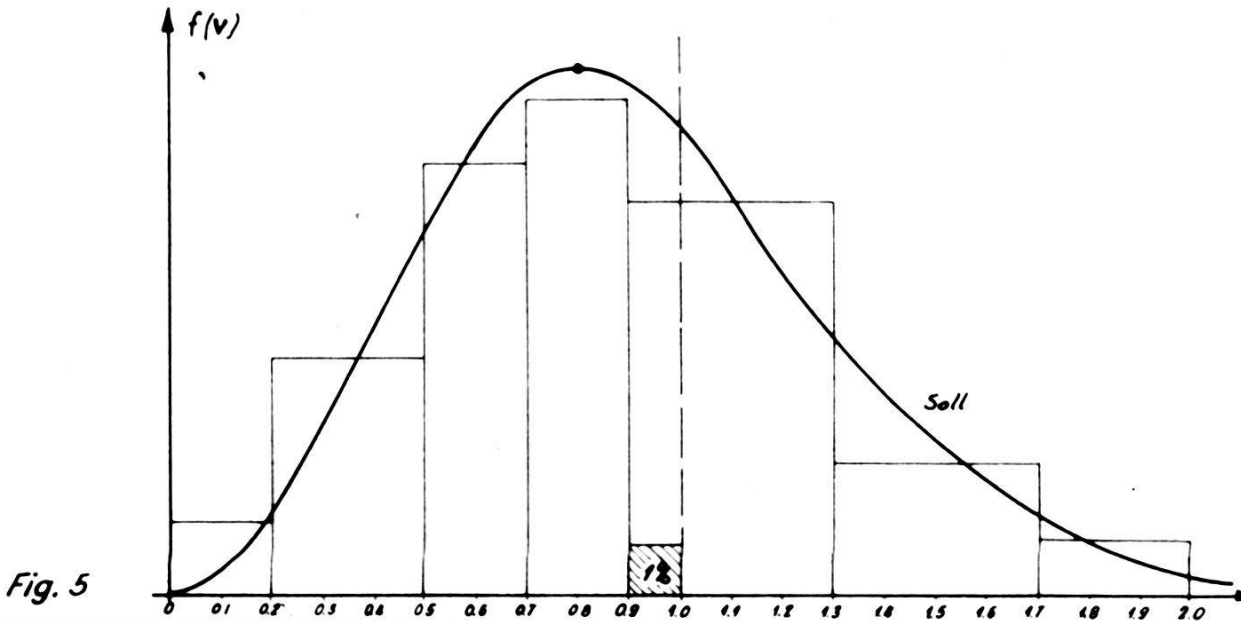


Fig. 5

N_i %	3%	14%	17%	19.5%	31%	10.5%	5%
Soll	1%	12.5%	16.5%	20.5%	33%	13%	35%
$W (v < 1.0)$	61.4 %				Tatsächlicher Beob. cc		
Soll	61.2 %				m. F. μ		
Häufigster Wert	Mittelwert						
$v_M \sim 0.8$ (aus Fig.)	$v_M = 0.90$ (gerech.)						
Soll = 0.82	Soll = 0.92						
					I ± 4.1	II ± 6.9	
					III ± 5.0	IV ± 5.3	
					V ± 6.6	VI ± 6.4	
					VII ± 6.2	VIII ± 6.4	

Tab. 7

achters werden wie hier für den Beobachter I ausgewertet. Dieser hat auf 20 Stationen gemessen. Der mittlere Fehler m eines einmal bestimmten Parallaxwinkels ist in Tabelle 6, Kolonne 2, für jede Station aus den 4 Messungen (für Stationen mit mehr als 4 Messungen aus den 4 ersten) berechnet. Diese mittleren Fehler m stellen im Sinne von Tabelle 1 Stichprobenwerte dar. Der tatsächliche mittlere Fehler μ ergibt sich für großes

$$n \text{ aus } \mu = \pm \sqrt{\frac{[m^2]}{N}}.$$

Die Verhältniszahlen $v = \frac{m}{\mu}$ sind in Kolonne 3 gebildet. Diese

Werte v aller Beobachter können nun zusammengefaßt werden; deren Häufigkeitsverteilung ist in Figur 5 dargestellt. Tabelle 7 und Figur 5 geben den Vergleich zwischen der Streuung der mittleren Fehler m im Beispiel und der theoretisch zu erwartenden. Die Übereinstimmung ist recht gut, und die oben angenommene Voraussetzung kann als erfüllt betrachtet werden.

Bei der Durchführung ähnlicher Aufgaben könnte also in dem Sinne verfahren werden, daß jeder Beobachter bei den normalen Verhältnissen aus einer großen Zahl von Probemessungen seine Beobachtungsgenauigkeit vorgängig bestimmt und damit die für sich geltende Anzahl Einzel-

messungen pro Parallaxwinkel entsprechend dem geforderten mittleren Fehler festlegt.

Gemäß Tabelle 7 wäre diese Anzahl für die Beobachter I, II, VI die 4malige, für die Beobachter II, IV, VII, VIII die 5malige und für den Beobachter V die 6malige Einzelwinkelmessung. Einerseits hätten sich die Beobachter also alle Messungen, die mehr als 4- beziehungsweise 5- beziehungsweise 6mal wiederholt wurden, ersparen können, andererseits erreichten aber die Beobachter III, IV, VII, VIII, V auf allen Stationen mit nur 4maliger Wiederholung die geforderte Genauigkeit nicht.

Literatur:

Becker: Anwendungen der mathematischen Statistik auf Probleme der Massenfabrikation.

Linder: Statistische Methoden.

Student: The probable error of a mean.

Über die Zweckmäßigkeit der Winkelermittlung durch Längenmessung

Von Dipl.-Ing. Ivan Tomkiewicz, Aarau

Fast in jedem Buche, in dem von Kurvenabsteckungen die Rede ist, werden auch die Methoden behandelt, wie die Eckwinkel β (bzw. $\alpha = \pi - \beta$) eines Trassenpolygones durch Längenmessung ermittelt werden können. Als ich mit der Straßenlinienführung zu tun hatte und mich mit ihren Problemen befassen mußte, stellte sich mir sofort die Frage über die Zweckmäßigkeit der Anwendung dieser Methoden in der Praxis. Ich untersuchte daher diese Methoden, und die Ergebnisse will ich in diesem Aufsätze kurz zusammenfassen.

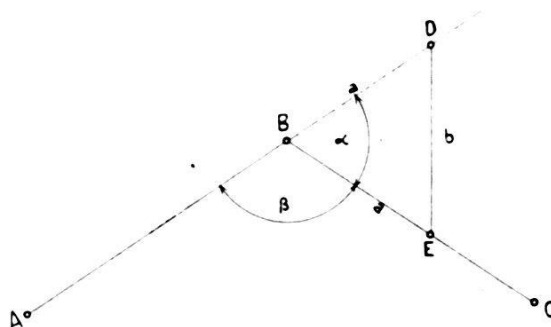


Abb. 1

Ich beabsichtige, zwei Methoden zu behandeln. Auf dem Scheitelpunkt B des Absteckungspolygones soll der Brechungswinkel β (bzw. $\alpha = \pi - \beta$) durch die Messung der Längen a und b bei der ersten (Abb. 1) und der Längen e , c und d bei der zweiten Methode (Abb. 2) ermittelt