**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und

Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du

génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik =

Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 55 (1957)

**Heft:** 10

Artikel: Über einen besonderen Fall der Kreisausgleichung nach der Methode

der kleinsten Quadrate [Schluss]

**Autor:** apanov, Christo

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-213595

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$f(v) = F_n \cdot e^{-\frac{n-1}{2}v^2}$$

wo für gerades 
$$n$$
 
$$F_n = \frac{2^{\frac{n}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}}{\sqrt{\pi\cdot(n-3)\ (n-5)\ \dots\ 3\cdot 1}}$$

$$\text{und für ungerades } n \mid F_n = \frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}$$

Die Verteilungskurven sind nicht symmetrisch; tatsächlicher Wert  $v_{\mu}$ , häufigster Wert  $v_W$  und Mittelwert  $v_M$  fallen nicht zusammen. Der tatsächliche Wert v ist konstant. Es ist

$$v_{\mu} = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right]_1^N}{N}} = 1.0$$

Daraus ergibt sich, daß der tatsächliche mittlere Fehler  $\mu$  aus den Stichprobenwerten m nach

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[m^2]_1^N}{N}}$$

berechnet werden kann.

(Schluß folgt.)

# Über einen besonderen Fall der Kreisausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Von Dipl.-Ing. Christo Čapanov, Haskovo, Bulgarien

(Schluß)

Zahlenbeispiel:

Es ist der wahrscheinlichste Kreis zwischen den Punkten (Tafel 1) unter folgenden Bedingungen zu finden: der ausgeglichene Kreis muß

- 1. durch den Punkt M führen  $(Xm \pm o Ym \pm o)$ ,
- 2. die Ordinatenachse Y = t berühren.
- I. Methode: Ausgleichung nach Beobachtungen mit Unbekannten mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten.

Es werden angenommen:

$$p_x = p_y = 1;$$
  
 $a_0 = 127,00 \text{ m}, \beta_0 = -23,00 \text{ m} \text{ und } R_0 = 127,00 \text{ m}$  (40)

Nach (6) und (9) stellen wir Tafel 2 auf. Mit den Koeffizienten aus Tafel 2 berechnen wir die Koeffizienten der Normalgleichungen (19), die, in Zahlen ausgedrückt, folgendes ergeben:

$$2,5784 \ \Delta \alpha - 1,3318 \ \Delta \beta - 3,5682 \ \Delta R + 2,4980 \ k' - - 1,0000 \ k'' - 0,3630 = \Phi$$

$$- 1,3318 \ \Delta \alpha + 0,7921 \ \Delta \beta + 1,5758 \ \Delta R - 0,4600 \ k' + + \Phi k'' + 0,1025 = \Phi$$

$$- 3,5682 \ \Delta \alpha + 1,5758 \ \Delta \beta + 4,0056 \ \Delta R - 2,5400 \ k' + + + 1,0000 \ k'' + 0,3759 = \Phi$$

$$2,4980 \ \Delta \alpha - 0,4600 \ \Delta \beta - 2,5400 \ \Delta R + \Phi k' + + \Phi k'' + 0,0010 = \Phi$$

$$- 1,0000 \ \Delta \alpha + \Phi \Delta \beta + 1,0000 \ \Delta R + \Phi k' + + + \Phi k'' + \Phi = \Phi$$

Aus der Auflösung von (41) nach dem Gaußschen Algorithmus finden wir  $\Delta\beta = -0,0006$   $\Delta R = -0,0059$  k' = +0,2248 k'' = +0,1936 (42) und berechnen nach den Formeln (3):

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha = 127,0060$$
  
 $\beta = \beta_0 + \Delta \beta = -23,0006$  und  $R = R_0 + \Delta R = 127,0059$  (43)

Die Korrelaten k werden nach Formeln (17) und die Verbesserungen  $v_x$  und  $v_y$  nach Formeln (15) berechnet. Hieraus berechnen wir wiederum [kW] und  $[v_x^2] + [v_y^2]$  (Tafel 3). Es wird die zweite Kontrolle (21) durchgeführt; zu diesem Zweck berechnen wir nach Formeln (2):

$$X = x + v_y$$
 und  $Y = y + v_y$  (Tafel 4).

II. Nach dem Verfahren der Vorelimination von Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten:

Es werden angenommen:  $a_0 = R_0 = 127,00$  m. Aus (17) berechnen wir  $\beta_0 = \sqrt{R^2 - (\alpha - Xm)^2} = -22,9998$  und nach (31) die Koeffizienten A, D, E, H und den Widerspruch W (Tafel 5).

Mit den Koeffizienten aus Tafel 5 berechnen wir die Koeffizienten der Normalgleichung (37), die, in Zahlen ausgedrückt, folgendes Bild zeigt:

$$2602,7753 \Delta a + 229,0359 = \Phi$$

Aus der Auflösung der letzteren finden wir  $\Delta a = -0.0880$  und berechnen nach Formel (3)  $a = a_0 + \Delta a = 126.9039$  und nach Formel (7)  $\beta = \sqrt{R^2 - (a - Xm)^2} = -22.9910$ . Die Korrelate k werden nach Formel (35) und die Verbesserungen  $v_x$  und  $v_y$  nach Formel (33) berechnet (Tafel 6). Es wird die zweite Kontrolle (39) durchgeführt und zu diesem Zweck berechnet:  $X = x + v_x$  und  $Y = y + v_y$  (Tafel 7).

Schlußfolgerung. Aus der Gegenüberstellung dieser beiden Verfahren lassen sich folgende Schlüsse über die Genauigkeit, Berechnungsdauer und den Umfang der Rechenarbeit ziehen:

1. Beide Verfahren sind gleich genau, denn beide ergeben:

$$[v_{x^2}] + [v_{y^2}] = 0,2274;$$

- 2. Bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten erhöht jede Zwangsbedingung die Anzahl der Normalgleichungen um eins;
- 3. Bei der Vorelimination der Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten vermindert jede Zwangsbedingung die Anzahl der Normalgleichungen um eins;
- 4. Bei beiden Methoden wird angenommen, daß alle beobachteten Größen (Abszissen und Ordinaten von Punkten) mit Fehlern belastet sind;
- 5. Angenommen, daß wir in (22) anstatt zwei beobachtete Größen (X und Y) nur eine beobachtete Größe haben, so führt diese Annahme schon zu einer mittelbaren Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten. Folglich kann die Methode der Vorelimination von Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten auch bei der mittelbaren Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten angewandt werden.

#### Literatur:

C. F. Baeschlin, Schweizerische Zeitschrift für Vermessungskunde und Kulturtechnik, 1929, Heft 2.

T 1 1

i	$\boldsymbol{x}$	y
1	0.82	8·10
2	$5 \cdot 15$	$11 \cdot 20$
3	$23 \cdot 52$	$50 \cdot 43$
4	$26 \cdot 13$	$54 \cdot 37$
M	$2 \cdot 10$	

Tafel 2

i	A	B	C	W	$Q = \Sigma$	Н
1	$252 \cdot 36$	<b>—</b> 29·80	$-254\cdot00$	$+ 14 \cdot 402$	- 17·038	64 574
2	$243 \cdot 70$	$-68 \cdot 40$	$-254\cdot00$	-111.938	$-190 \cdot 638$	$64\ 068$
3	$206 \cdot 96$	$-146 \cdot 86$	$-254\cdot00$	$-28 \cdot 925$	$-222 \cdot 825$	64 400
4	$201 \cdot 74$	$154 \cdot 74$	$-254\cdot00$	+ 31.874	$175 \cdot 125$	64 643
M	$249\cdot 80$	$-46 \cdot 00$	$254\cdot00$	+ 0.010		

Tafel 3

i	$-rac{A}{H}\Delta a$	$-\frac{B}{H}\Delta\beta$	$-\frac{C}{H}\Delta R$	$-\frac{W}{H}$
1 2 3 4 []	$ \begin{array}{l} - 0.00002345 \\ - 0.00002282 \\ - 0.00001928 \\ - 0.00001873 \end{array} $	$ \begin{array}{l}0.0000002796 \\0.0000006404 \\0.0000013682 \\0.000001436 \end{array} $	0.00002321 0.00002339 0.00002327 0.00002318	$egin{array}{l} -0.0002230 \ +0.00174717 \ +0.00044914 \ -0.00049308 \end{array}$

0.0002235		$+\ 0.0564$	-0.0067	585
$+\ 0.0017472$		0.4258	$+\ 0 \cdot 1195$	
$+\ 0.0004517$		-0.0935	+0.0663	
0.0004900		+0.0989	0.0758	
	$0 \cdot 2275$			$0 \cdot 2275$
	$+\ 0.0004517$	+ 0.0017472  + 0.0004517  - 0.0004900	$egin{array}{lll} &+ \ 0.0017472 & - \ 0.4258 \\ &+ \ 0.0004517 & - \ 0.0935 \\ &- \ 0.0004900 & + \ 0.0989 \end{array}$	$egin{array}{lll} + \ 0 \cdot 0017472 & -0 \cdot 4258 & +0 \cdot 1195 \\ + \ 0 \cdot 0004517 & -0 \cdot 0935 & +0 \cdot 0663 \\ -0 \cdot 0004900 & +0 \cdot 0989 & -0 \cdot 0758 \\ \hline \end{array}$

Tafel 4

i	x	y	a—x	β—y	$R^2$	R
1	0.8764	<b>—8·1067</b>	126 · 1296	14.8939	16 130 · 50	127.006
2	$4 \cdot 7242$	$11 \cdot 3195$	$122 \cdot 2818$	$34 \cdot 3201$	$16\ 130 \cdot 65$	$127 \cdot 006$
3	$23 \cdot 4265$	$50 \cdot 4963$	$103 \cdot 5795$	$73 \cdot 4969$	$16\ 130 \cdot 52$	$127 \cdot 006$
4	$26 \cdot 2289$	$54 \cdot 2942$	100.7771	$77 \cdot 2948$	16 130 · 48	$127 \cdot 006$
M	$2 \cdot 70$		$124\cdot 9060$	$23 \cdot 0006$	$16\ 130 \cdot 53$	$127 \cdot 006$

Tafel 5

i	A	W	$Q = \Sigma$	Н
1	+ 1.0807	+ 14.40	+ 15.4807	64 574
<b>2</b>	-4.0551	-111.95	$-116 \cdot 0051$	64 068
3	$-33 \cdot 6317$	-28.95	-62.5817	64 400
4	$-38 \cdot 1323$	+ 31.84	$-6 \cdot 2923$	64 643
[]				

Tafel 6

i	$-rac{A}{H}\Delta l$	$-\frac{W}{H}$	K	— KW
1	$+\ 0.00000161$	0.0002230	- 0.0002214	0.003181
2	0.00000608	$+\ 0\cdot0017474$	$+\ 0.0017413$	0.194936
3	0.00005096	$+\ 0 \cdot 0004495$	$+\ 0\!\cdot\!0003986$	0.011539
4	0.00005667	-0.0004975	0.0005542	0.017645
[]				$0\cdot 2273$

i	$v_x$	$v_{m{y}}$	$v_{x^2} + v_{y^2}$
1	$+\ 0 \cdot 0559$	0.0066	
<b>2</b>	0.4243	+0.1191	
3	0.0825	$+\ 0 \cdot 0585$	
4	+0.1118	0.0858	
[]			$0\cdot 2275$

Tafel 7

i	x	y	a-x	$\beta$ — $y$	$R^2$	R
1	0.8759	8·1066	126.0280	14·8844	16 104 · 60	126 · 904
2	4.7257	11.3191	$122 \cdot 1782$	$-34 \cdot 3101$	16 104 · 69	$126 \cdot 904$
3	$23 \cdot 4375$	$50 \cdot 4885$	$103 \cdot 4664$	$73 \cdot 4795$	$16\ 104 \cdot 53$	$126 \cdot 904$
4	$26 \cdot 2418$	$54 \cdot 2842$	$100 \cdot 6621$	$77 \cdot 2752$	16 104 · 31	$126 \cdot 903$
M	$2 \cdot 10$		$124 \cdot 8039$	$-22 \cdot 9910$	16 104 · 60	$126 \cdot 904$

## Feinmessungen mit der Schlauchwaage

Von dipl. Ing. Georg Zahel, Berlin

### 1. Einführung

Höhendifferenzen auf größere Entfernungen mit einer «Genauigkeit» von 0,1 mm und einem noch geringeren mittleren Fehler zu bestimmen vermag kein Nivelliergerät, da hier die Ablesemöglichkeit bei 0,05 mm endet. Solche kleine Höhenunterschiede werden nur noch durch die Schlauchwaage genau registriert, die nachweisbar mindestens bis auf 50 m Entfernung der Höhenpunkte einsatzfähig ist.

Neben der hohen Meßgenauigkeit besitzt die Schlauchwaage den wesentlichen Vorzug, auch bei noch so beschränkten Raumverhältnissen verwendungsfähig und unabhängig von auftretenden Bodenerschütterun-