

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural
<b>Band:</b>	55 (1957)
<b>Heft:</b>	9
<b>Artikel:</b>	Über einen besonderen Fall der Kreisausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate
<b>Autor:</b>	apanov, Christo
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-213591">https://doi.org/10.5169/seals-213591</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Über einen besonderen Fall der Kreisausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate**

(Ausgleichung nach den bedingten Beobachtungen mit Unbekannten:

1. mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten;
2. durch Vorelimination der Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten.)

*Von Dipl.-Ing. Christo Čapanov, Haskovo, Bulgarien*

Die Kurve und besonders der Kreis finden in den städtebaulichen Entwürfen immer größere Anwendung. Vom verkehrstechnischen Standpunkt aus ist die Kurve ein unerlässliches Element zum sanften Übergang von einem geraden Straßenabschnitt zum andern. Aber auch in städtebaulicher Beziehung ist die Kurve ein erwünschtes Element, denn der konkav Teil der Straße in einer Kurve, mit der entsprechenden architektonisch-künstlerischen Ausgestaltung, ist von verhältnismäßig größerer ästhetischer Wirkung als die Straße in der Geraden.

Eine charakteristische Besonderheit der Straßenbauplanung ist, daß bei der Festlegung der Straßenlinie unbedingt auf die bestehenden massiven Bauwerke, wie Gebäude, Brücken, Strebemauern, Flußregulierungen usw., Rücksicht zu nehmen ist; andernfalls würden sich unerwünschte Folgen ergeben, die entweder die architektonisch-künstlerische Gestaltung und die Silhouette des Straßenbildes beziehungsweise die Fassadenfront beeinträchtigen oder aber die neuen Bauvorhaben in ein ungünstiges, nicht harmonisches, ja sogar unmögliches Verhältnis zu den bereits vorhandenen Bauwerken bringen würden.

Um eine maximale Annäherung der trassierten Kurve an die im Straßenbauplan vorgesehene Krümmung zu erreichen, darf die Absteckung der Kurve nicht nach den Werten der sich aus dem Plan ergebenen Elemente vorgenommen werden (denn die erzielten Ergebnisse würden infolge von Meß- und Ablesefehlern erheblich vom Plan abweichen), sondern es muß die Absteckung der Krümmungen nach jenen Werten erfolgen, die man nach dem Ausgleichungsverfahren erhält. Dies sind die wahrscheinlichsten Werte der notwendigen Trassierungselemente und ergeben sich aus den für die beobachteten Größen – Abszissen und Ordinaten der Kurvenpunkte – gemessenen Werten. In diesen Fällen sprechen wir von wahrscheinlichster oder ausgeglichener Kurve. Wenn aber die ausgeglichene Kurve einige zwingende Nebenbedingungen zu erfüllen hat, die wegen etwa vorhandener massiver Bauwerke von vornherein bestanden haben, so haben wir es mit einem ausgeglichenen Kreis mit Nebenbedingungen, das heißt mit einem eigenen (besonderen) Fall der Kreisausgleichung, zu tun.

Die in der Praxis am häufigsten vorkommenden besonderen Fälle der Kreisausgleichung (oder zwingenden Bedingungen, die der ausgeglichene Kreis zu erfüllen hat) sind:

I. der ausgeglichene Kreis soll durch einen gegebenen Punkt  $M$  führen;

II. der ausgeglichene Kreis soll durch zwei gegebene Punkte  $M$  und  $N$  führen, deren Abstand  $2d$  beträgt;

III. der ausgeglichene Kreis soll eine gegebene Gerade  $t$  berühren;

IV. der ausgeglichene Kreis soll

a) zwei gegebene Geraden, die einen Winkel  $S$  einschließen,

b) zwei gegebene parallele Geraden, deren Abstand  $2d$  beträgt,

berühren;

V. der ausgeglichene Kreis soll eine gegebene Gerade  $t$  berühren und durch einen gegebenen Punkt  $M$  führen, wobei

a)  $M$  auf der Geraden  $t$ ,

b)  $M$  nicht auf der Geraden  $t$

liegen soll;

VI. der ausgeglichene Kreis soll einen gegebenen Radius  $R$  haben.

Jede Zwangsbedingung erfordert eine Nebengleichung, die die mathematische Form der Nebenbedingung darstellt. Nachdem zur Definition eines Kreises drei Elemente gehören, muß gefolgert werden:

1. die Anzahl der Zwangsbedingungen kann nicht  $> 3$  sein;

2. bei drei Zwangsbedingungen erhalten wir einen eindeutig definierten Kreis;

3. um einen ausgeglichenen Kreis mit Nebenbedingungen zu erhalten, muß die Anzahl der Zwangsbedingungen  $\leq 2$  sein.

Im nachstehenden soll Fall Vb eingehender behandelt und dessen Arbeitsformeln abgeleitet werden. Für die übrigen Fälle geschieht die Ableitung der Arbeitsformeln in analoger Weise.

Einen Kreis trassieren bedeutet, wenigstens drei Punkte des Kreises auf dem Terrain zu ermitteln, deren Lage durch die bestehenden Triangulations- oder Polygonpunkte oder aber durch die bestehenden Bauwerke bestimmt wird. Ist der wahrscheinlichste Kreis zu suchen, so muß die Punkteanzahl mehr als drei betragen. Infolge Ablese- und Absteckfehler definieren die trassierten Punkte nicht einen Kreis, das heißt, sie liegen nicht auf dem Kreis, sondern in einer gewissen Entfernung vom Kreis, was den Fehler darstellt. Diese Abweichung  $ds$  ist nach Richtung und Größe unbekannt, das heißt ein Zufallsfehler. Es muß die wahrscheinlichste Lage des Kreises gefunden werden, wobei die Summe der Quadrate dieser Entfernungen (Fehler) ein Minimum sein soll:

$$[ds^2] = \text{Min.} \quad (1)$$

Je nachdem, wie diese Fehler angenommen werden, können zwei Fälle vorliegen:

a) die Fehlerrichtung liegt parallel oder senkrecht zu einer beliebig angenommenen Richtung;

b) die Fehlerrichtung liegt in Richtung der Normalen eines gegebenen Kurvenpunkts.

Es soll nur der zweite Fall hier behandelt werden, der verhältnismäßig viel genauer ist, weil die Fehler in Richtung der Normalen eines

Kurvenpunktes angenommen werden. In dieser Richtung liegt bekanntlich die kürzeste Entfernung zwischen dem beobachteten Punkt und der beobachteten Krümmung (Kreis).

Es werden angenommen:

1. die gegebene Gerade (Achslinie, Straßenachse) als Ordinatenachse  $t = Y$  und die Abszissenachse, als durch den gegebenen Punkt  $M$  verlaufend;

2. die Abszissen und Ordinaten der trassierten Kreispunkte als beobachtete Größen, wobei folgende Bezeichnungen gelten:

für wahrscheinlichste Werte:

$X \quad Y$

für Näherungswerte:

$x \quad y$

für wahrscheinlichste Verbesserungen:

$v_x \quad v_y$ ;

es bedeuten:  $X = x + v_x$  und  $Y = y + v_y$ ; (2)

3. die Koordinaten des Kreismittelpunktes  $\alpha$  und  $\beta$  und der Kreisradius  $R$  als erforderliche, den wahrscheinlichsten Kreis definierende Elemente, wobei folgende Bezeichnungen gelten:

für die wahrscheinlichsten Werte:

$\alpha, \beta, R$ ;

für die Näherungswerte:

$\alpha_0, \beta_0, R_0$ ;

für die wahrscheinlichsten Verbesserungen:  $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta R$ ;

es bedeuten:  $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \beta = \beta_0 + \Delta\beta, R = R_0 + \Delta R$  (3)

Es werden die Beobachtungsgleichungen (Bedingungsgleichungen) aufgestellt, die in allgemeiner Form die Kreisgleichung darstellen:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha X - 2\beta Y + X^2 + Y^2 - R^2 = \Phi \quad (4)$$

Letztere ist eine nichtlineare Gleichung, aus der durch Taylorsche Reihenentwicklung nach (2) und (3) folgende lineare Gleichung erhalten wird:

$$Dv_x + Ev_y + A\Delta\alpha + B\Delta\beta + C\Delta R + W = \Phi, \quad (5)$$

wobei

$$A = 2(\alpha_0 - x) \quad D = -A$$

$$B = 2(\beta_0 - y) \quad E = -B \quad R_i^2 = (\alpha_0 - x)^2 + (\beta_0 - y)^2 \quad (6)$$

$$C = -2R_0 \quad W = R_i^2 - R_0^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - C^2)$$

Die Gleichungen (5), deren Anzahl sich mit der Anzahl der beobachteten Punkte deckt, stellen in Wirklichkeit das allgemeine Bild der Fehlergleichungen (Verbesserungsgleichungen) dar. Diesen sind die beiden Gleichungen der für den Fall Vb zwingenden Bedingungen hinzuzufügen, wonach der Kreis eine gegebene Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt  $M$  führen soll, dessen mathematische Formen nach Ziffer 1 der obigen Annahme wie folgt aussehen:

$$R = \alpha \text{ und } \beta = \sqrt{R^2 - (\alpha - Xm)^2} \quad (7)$$

Die Gleichungen (7) sind nichtlinear; durch Taylorsche Reihenentwicklung nach (3) erhalten wir folgende lineare Gleichungen:

$$A''\Delta a + C''\Delta R + W'' = \Phi \text{ und } A'\Delta a + B'\Delta \beta + C'\Delta R + W' = \Phi' \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } A'' &= -1 & C'' &= +1 & W'' &= R_0 - a_0 \\ A' &= 2(a_0 - Xm) & B' &= 2\beta_0 & C' &= -2R_0 & W' &= R_i^2 - R_0^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Die Aufgabe wird gelöst, wenn wir aus den Gleichungen (5)<sup>1</sup> und (8)<sup>2</sup> die Unbekannten  $\Delta a$ ,  $\Delta \beta$  und  $\Delta R$  unter der Bedingung (1) finden. Zu diesem Zweck bedienen wir uns der

*Ausgleichung nach den bedingten Beobachtungen mit Unbekannten mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten*

Zunächst wird (1) umgeformt. Es ist leicht zu beweisen, daß

$$ds^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (10)$$

Gleichung (1) erhält gemäß (10) folgendes Aussehen:

$$[v_x^2] + [v_y^2] = \text{Min},$$

oder bei Einführung der Gewichte  $p_x$  auf  $x$  und  $p_y$  auf  $y$ ,

$$[p_x v_x^2] + [p_y v_y^2] = \text{Min}. \quad (12)$$

Wir bilden die sogenannte «Hauptfunktion»:

$$F = F(v_x, v_y, \Delta a, \Delta \beta, \Delta R) \quad (13)$$

Letztere ist ein Minimum bei:

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} = \Phi, \frac{\partial F}{\partial v_y} = \Phi, \frac{\partial F}{\partial \Delta a} = \Phi, \frac{\partial F}{\partial \Delta \beta} = \Phi \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \Delta R} = \Phi \quad (14)$$

Hieraus finden wir:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{D}{p_x} K & -[Ak] + A'k' + A''k'' &= \Phi \\ v_y &= \frac{E}{p_y} K & -[Bk] + B'k' + B''k'' &= \Phi \\ & & -[Ck] + C'k' + C''k'' &= \Phi \end{aligned} \quad (15) \quad (16)$$

Hierbei sind  $K$ ,  $K'$  und  $K''$  Korrelate. Die Verbesserungen  $v_x$  und  $v_y$  aus (15) substituieren wir in (5):

<sup>1</sup> Bedingungsgleichungen mit Unbekannten.

<sup>2</sup> Bedingungsgleichungen zwischen Unbekannten.

$$\left( \frac{DD}{p_x} + \frac{EE}{p_y} \right) k + A\Delta\alpha + B\Delta\beta + C\Delta R + W = \Phi$$

oder  $-k = \frac{A}{H}\Delta\alpha + \frac{B}{H}\Delta\beta + \frac{C}{H}\Delta R + \frac{W}{H}$

(17)

wobei:

$$H = \frac{DD}{p_x} + \frac{EE}{p_y}$$
(18)

Die Gleichungen (16) erhalten nach (17) folgende Form:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{AA}{H} \right] \Delta\alpha + \left[ \frac{AB}{H} \right] \Delta\beta + \left[ \frac{AC}{H} \right] \Delta R + A'k' + A''k'' + \left[ \frac{AW}{H} \right] = \Phi \\ \left[ \frac{AB}{H} \right] \Delta\alpha + \left[ \frac{BB}{H} \right] \Delta\beta + \left[ \frac{BC}{H} \right] \Delta R + B'k' + \Phi k'' + \left[ \frac{BW}{H} \right] = \Phi \quad (19) \\ \left[ \frac{AC}{H} \right] \Delta\alpha + \left[ \frac{BC}{H} \right] \Delta\beta + \left[ \frac{CC}{H} \right] \Delta R + C'k' + C''k'' + \left[ \frac{CW}{H} \right] = \Phi \\ A' \Delta\alpha + B' \Delta\beta + C' \Delta R + \Phi k' + \Phi k'' + W' = \Phi \\ A'' \Delta\alpha + \Phi \Delta\beta + C'' \Delta R + \Phi k' + \Phi k'' + W'' = \Phi \end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichungen sind die Gleichungen (8). Die Gleichungen (19) haben vollkommen den Charakter normaler Gleichungen; deren Lösung kann nach dem Gaußschen Algorithmus erfolgen.

Arbeitsformeln: (6), (9), (18) und (19).

$$\text{Kontrollen: } -[kW] = [p_x v_x^2] + [p_y v_y^2]$$
(20)

$$\begin{aligned} \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2} &= R \\ \sqrt{(\alpha - x_m)^2 + \beta^2} &= R \quad (21) \\ \alpha &= R \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (19) kann der Schluß gezogen werden, daß jede Zwangsbedingung die Anzahl der Normalgleichungen um eins erhöht; dies hat aber eine umfangreiche Rechenarbeit zur Folge. Daher ist das Gegenteil anzustreben: jede Zwangsbedingung soll die Anzahl der Normalgleichungen um eins ermäßigen, was die Rechenarbeit kürzt. Dies kann erreicht werden durch

### *Vorelimination der Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten*

Allgemeines Bild der Gleichungen:

$$(4) — F = F(X Y \alpha \beta R)$$
(22)

$$(7) — R = R(\alpha) \text{ und } \beta = \beta(\alpha R)$$
(23)

Aus (22) und (23), die in Wirklichkeit die Beobachtungsgleichungen darstellen, geht hervor, daß wir eine zusammengesetzte Funktion vorliegen haben. Aus der Differenzierung der letzteren ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial x} v_x + \frac{\partial F}{\partial y} v_y + \left[ \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \left( \frac{\partial \beta}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial R} \right) + \frac{\partial F}{\partial R} \right] \Delta a + \\ + F_o(x, y, a_o, \beta_o, R_o) = \Phi \quad (24)$$

wobei  $R_o$  und  $\beta_o$  nach (7) berechnet werden.

Setzen wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = D, \frac{\partial F}{\partial y} = E, \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \left( \frac{\partial \beta}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial R} \right) + \frac{\partial F}{\partial R} = A \\ \text{und } F_o(x, y, a_o, \beta_o, R_o) = W, \quad (25)$$

so erhält (24) folgendes Aussehen:

$$D v_x + E v_y + A \Delta a + W = \Phi \quad (26)$$

Die partiellen Differentiale der Gleichung (4) zeigen nach (7) folgendes Bild:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2(a_o - x); \frac{\partial F}{\partial a} = 2(a_o - x); \frac{\partial \beta}{\partial a} = -\frac{a_o X m}{\beta_o}; \frac{\partial F}{\partial R} = -2R_o; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -2(\beta_o - y); \frac{\partial F}{\partial \beta} = 2(\beta_o - y); \frac{\partial \beta}{\partial R} = \frac{R_o}{\beta_o} \quad (27)$$

Hieraus lassen sich nach Formeln (25) berechnen:

$$D = -2(a_o - x) \quad A = -2x + 2(\beta_o - y) \frac{Xm}{\beta_o} \\ E = -2(\beta_o - y) \quad (28)$$

Das gleiche Ergebnis kann aber auch erreicht werden, wenn aus jeder Bedingungsgleichung zwischen den Unbekannten je eine Unbekannte gefunden und in (4) substituiert wird. Im Fall (7) finden wir  $R$  und  $\beta$ , die wir in (4) substituieren, und erhalten:

$$2aXm - 2aX - 2Y \sqrt{2aXm - Xm^2 + X^2 + Y^2 - Xm^2} = \Phi \quad (29)$$

was das allgemeine Bild der Beobachtungsgleichungen darstellt. Letztere sind nichtlineare Gleichungen. Aus ihnen lassen sich durch Taylorsche Reihenentwicklung nach (2) und (3) folgende lineare Gleichungen bilden, die in Wirklichkeit die Verbesserungsgleichung (Fehlergleichung)

$$Dv_x + Ev_y + A\Delta a + W = \Phi \quad (30)$$

darstellen, wobei

$$D = -2(a_o - x); \quad A = -2x + 2(\beta_o - y) \frac{Xm}{\beta_o}; \\ E = -2(\beta_o - y) \quad (31)$$

Ein Vergleich von (31) mit (28) zeigt, daß die entsprechenden Ergebnisse vollkommen gleich sind, ohne Rücksicht darauf, ob mit einer zusammengesetzten Funktion operiert oder die Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten im voraus eliminiert wurden (die Anzahl der eliminierten Unbekannten ist der Anzahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten gleich). Die Wahl der einen oder andern Methode bleibt jedem überlassen.

Aus den Lösungen von (26) und (30), die mit den beobachteten Punkten unter Bedingung (1) beziehungsweise (11) gleich an der Zahl sind, ergeben sich die gesuchten Unbekannten. Zu diesem Zweck stellen wir die sogenannte «Hauptfunktion» auf:

$$F = F(v_x, v_y, \Delta a). \quad (32)$$

Letztere ist ein Minimum bei  $\frac{\partial F}{\partial v_x} = \Phi; \frac{\partial F}{\partial v_y} = \Phi; \frac{\partial F}{\partial \Delta a} = \Phi$ .

Hieraus finden wir:

$$v_x = \frac{D}{p_x} k \quad (33) \quad -[kA] = \Phi \quad (34)$$

$$v_y = \frac{E}{p_y} k \quad (34)$$

( $k$  ist das Korrelat).

Die Verbesserungen  $v_x$  und  $v_y$  aus (33) substituieren wir in (26) und erhalten:

$$\left( \frac{DD}{p_x} + \frac{EE}{p_y} \right) k + A \Delta a + W = \Phi \text{ oder } -k = \frac{A}{H} + \frac{W}{H}, \quad (35)$$

wobei

$$H = \frac{DD}{p_x} + \frac{EE}{p_y} \quad (36)$$

Aus (35) erhalten wir nach (34):

$$\left[ \frac{AA}{H} \right] \Delta a + \left[ \frac{AW}{H} \right] = \Phi, \quad (37)$$

was eine Normalgleichung darstellt, aus deren Lösung die Unbekannte  $\Delta a$  gefunden wird.

Beim Vergleich von (19) mit (37) läßt sich feststellen, daß durch Vorelimination von Unbekannten aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten jede Zwangsbedingung die Anzahl der Normalgleichungen um eins vermindert.

Arbeitsformeln: (31) und (37),

$$\text{Kontrollen: } -[kW] = [p_x v_x^2] + [p_y v_y^2] \quad (38)$$

$$\text{und } \sqrt{(a-x)^2 + (\beta-y)^2} = \Phi \quad (39)$$

(Schluß folgt)