

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 55 (1957)

Heft: 6

Artikel: Neigungsbestimmungen mit Berücksichtigung systematischer Libellenfehler

Autor: Wyss, N.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-213573>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungs-
wesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein;
Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations
foncières; Société suisse des Ingénieurs du
Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 6 • LV. Jahrgang

Erscheint monatlich

11. Juni 1957

Neigungsbestimmungen mit Berücksichtigung systematischer Libellenfehler

Von N. Wyss, Dipl.-Ing.,
Forschungsassistent am Geodätischen Institut der ETH

1. Einleitung

Bei einer guten Libelle soll der Parswert über die ganze Länge der Teilung praktisch konstant bleiben, und die Blase darf nirgends hängenbleiben. Neigungsänderungen N können dann wie folgt berechnet werden:

(1)

$$N = p (l_2 - l_1)$$

l_1 und l_2 bedeuten den Ort der Blasenmitte vor und nach der Neigungsänderung, und p bedeutet den Parswert.

Man erkennt leicht, daß der mittlere Fehler der Neigung infolge des mittleren Fehlers des Parswertes – sofern man von einem solchen sprechen darf – proportional der Neigung selbst zunimmt. Darum müssen die zu bestimmenden Neigungen bei der praktischen Messung möglichst klein gehalten werden.

Im folgenden soll eine Methode gezeigt werden, mit der man auch bei nicht einwandfrei geschliffenen Libellen zuverlässige Neigungsbestimmungen erhält. Da selbst die besten Libellen theoretisch nie einwandfrei sind, kann die Methode auch bei diesen die Resultate verbessern.

2. Allgemeine Untersuchungen

Auf dem Libellenprüfer des Geodätischen Institutes der ETH wurden in den letzten Jahren verschiedene Libellen untersucht. Dabei wurde jede Meßreihe mehrere Male wiederholt. Die Bearbeitung des gesamten Materials ergab, in Übereinstimmung mit der Literatur, folgende Resultate:

1. Der Parswert ist eine Funktion der Blasenlänge und des Blasenortes.
2. Die Abweichungen des örtlichen Parswertes von seinem Mittelwert sind reell.
3. Ausgeprägte Unregelmäßigkeiten bei Neigungsbestimmungen treten dann auf, wenn ein Blasenende eine fehlerhafte Stelle des Schliffes erreicht.

Um diesen Unvollkommenheiten der Libellen Rechnung zu tragen, wird bei allen Untersuchungen des Geodätischen Institutes seit mehreren Jahren die Summenlinie verwendet.

3. Die Summenlinie

Da der Parswert eine Funktion des Ortes ist, gilt die Formel (1) nur noch für differentielle Blasenverschiebungen:

$$dN = p(l) dl$$

und

$$(2) \quad N = \int_{l_1}^{l_2} p(l) dl$$

Den von einem beliebigen Nullpunkt aus gezählten Wert des unbestimmten Integrals

$$\int p(l) dl$$

nennen wir die Summenlinie S :

(3)

$$S(l) = \int p(l) dl + c$$

Aus (2) und (3) erhalten wir die einfache Beziehung:

(4)

$$N = S(l_2) - S(l_1)$$

Die Auswertung erfolgt vorteilhaft graphisch.

Mit der Summenlinie verwandte Größen werden in der Literatur recht häufig angegeben. So verwendet R. Brein¹ den Begriff der Eichkurve, der mit der Summenlinie praktisch identisch ist. In dieser Arbeit wird zudem auf ältere Publikationen verwiesen, in denen ähnliche Größen verwendet werden. Doch werden diese Eichkurven nur zur Bestimmung der Güte einer Libelle verwendet; die praktische Neigungsmessung erfolgte wohl immer nach der Formel (1).

¹ R. Brein, Beitrag zur Libellenprüfung. Institut für angewandte Geodäsie, Frankfurt am Main 1955.

4. Die Bestimmung der Summenlinie

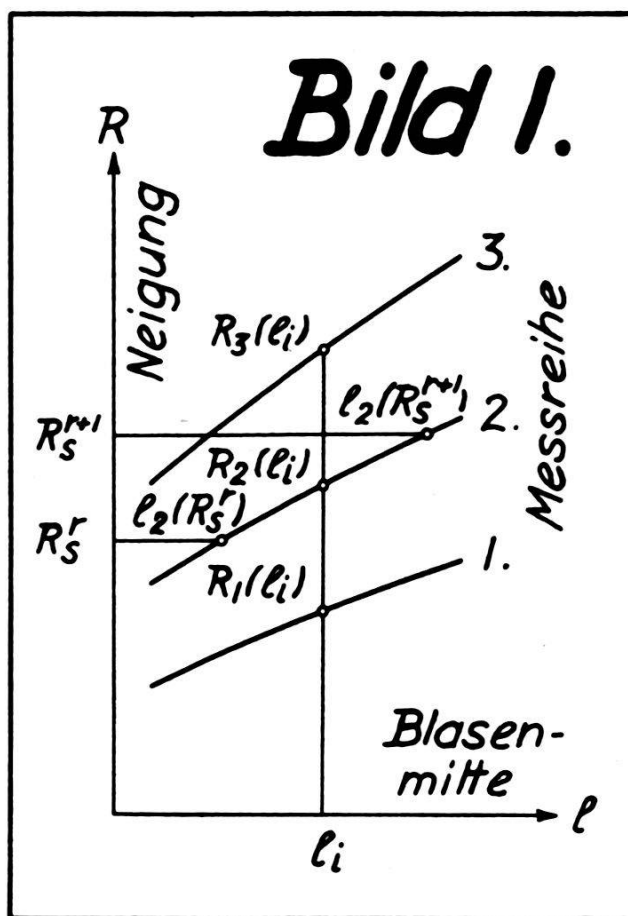
Bei modernen, sehr genauen Libellenprüfern kann die Libelle bis auf $\frac{1}{100}$ Pars genau abgelesen werden. Da aber im Felde bis heute « von Auge » beobachtet wird, genügt für die Bestimmung der Summenlinie ein normaler Libellenprüfer. Zudem können auf diese Weise zuverlässige Werte der im Felde erreichbaren Genauigkeit bestimmt werden.

An Stelle der Berechnung des Parswertes und anschließender Integration werden direkt die an der Schraube eingestellten Neigungen R auf der Ordinate, die Mittel l der Ablesungen beider Blasenenden auf der Abszisse aufgetragen. Durch Wiederholungen der Meßreihe (bei konstanter Blasenlänge) erhält man eine Kurvenschar. Das Mittel aller Kurven ist die gesuchte Summenlinie. Wird die Messung zwischen zwei Meßreihen einige Zeit unterbrochen, kann sich die Lagerung des Libellenprüfers ändern. Daher wird jede Meßreihe unabhängig ausgewertet.

Für die numerische Rechnung müssen die Mittelwerte für gleiche l gebildet werden, weil S als Funktion von l gesucht wird (Bild 1).

$$(5) \quad S(l_i) = \frac{[R_k(l_i)]_{k=1}^{k=q}}{q}$$

q = Anzahl der Meßreihen R_k .



Die Neigung wird als Sollwert R_s an der Schraube eingestellt und das sich ergebende $l(R_s)$ abgelesen. Die Werte der $R(l_i)$ werden durch lineare Interpolation zwischen zwei aufeinanderfolgenden R_s^r und R_s^{r+1} mit dem Rechenschieber oder einem Nomogramm gefunden.

Die Fehlerrechnung wird analog derjenigen für die Ausgleichung vollständiger Richtungssätze durchgeführt. Dabei setzt man eine Normalverteilung der Verbesserungen $S-R$ voraus, die sicher nicht vorhanden ist. Trotz aller Bedenken, hier die klassische Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden, darf nicht übersehen werden, daß es eine andere Methode nicht gibt, um Anhaltspunkte für die Genauigkeit der Messungen zu erhalten.

Für die unreduzierten Verbesserungen \bar{v}_i , die reduzierten Verbesserungen v_i und die mittleren Fehler erhält man

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_i^k = S(l_i) - R_k(l_i) \\ v_i^k = \bar{v}_i^k - \frac{[\bar{v}_i^k]_{i=1}^{i=n}}{n} \\ n = \text{Anzahl der } l_i. \\ m = \sqrt{\frac{[vv]}{(k-1)(q-1)}} \quad \text{mittlerer Fehler an } R \\ M = \frac{m}{\sqrt{q}} \quad \text{mittlerer Fehler an } S \end{array} \right.$$

Selbstverständlich werden bei der Prüfung die Meßreihen gleichmäßig auf den Hin- und Rückweg der Blase verteilt. Es erweist sich zudem als vorteilhaft, die Neigung in Sprüngen entsprechend dem durchschnittlichen Parswert zu ändern und für die l_i aufeinanderfolgende ganze Partes zu wählen.

Sofern man den Fehler der Einstellung der Neigung an der Schraube sowie Schraubenfehler vernachlässigen kann, stellt der Wert m nach (6) den mittleren Fehler einer Ablesung der Blasenmitte (Ablesefehler + übrig bleibende Libellenfehler) dar. Bezeichnet man eine zu messende Achsenschiefe mit

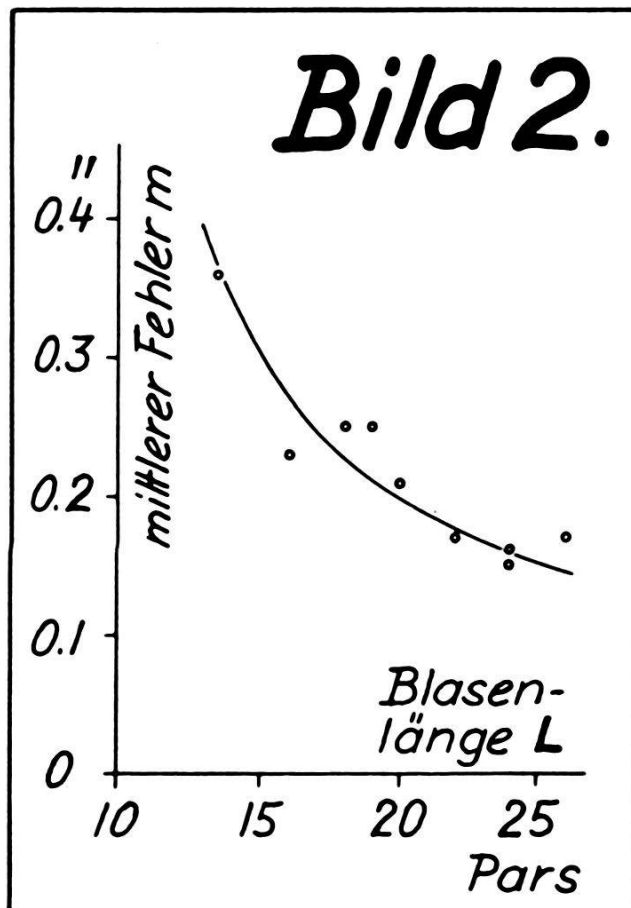
$$a = \frac{N}{2} = \frac{1}{2} [S(l_2) - S(l_1)],$$

wird deren mittlerer Fehler m_a bei gleichen Beobachtungsverhältnissen wie am Libellenprüfer:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + M^2) + (m^2 + M^2)},$$

und mit (6)

$$(7) \quad m_a = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{q+1}{q}}$$



Der mittlere Fehler einer Schiefe ist daher nicht abhängig von deren Größe, im Gegensatz zu der Auswertung nach der Formel (1).

Der mittlere Fehler m einer Ablesung ist von der Libelle und von der Blasenlänge abhängig (Bild 2). Je größer die Blase ist, desto kleiner wird m . Der Faktor

$$\sqrt{\frac{q+1}{q}}$$

strebt mit zunehmenden q gegen 1. Es ist daher sinnlos, zu viele Wiederholungen einer Meßreihe zur Bestimmung der Summenlinie vorzunehmen, da der mittlere Fehler einer Achsenschiefe kaum mehr abnimmt. Praktisch genügen 4 Meßreihen (zweimal hin und zurück); der Wert des Faktors wird 1,12.

Eine so gefundene *Summenlinie* gilt nur für eine ganz bestimmte *Blasenlänge*. Man muß daher mit anderen Längen die Prüfung wiederholen. Bei der praktischen Anwendung wird man zwischen beobachteten Blasenlängen interpolieren müssen.

Die Interpolation ist sehr mühsam und unbefriedigend, weil die Summenlinien verschiedener Blasenlängen nicht ähnlich verlaufen, denn – wie schon bemerkt – die Unregelmäßigkeiten treten als Funktionen der Blasenenden und nicht der als Argument verwendeten Blasenmitten auf.

Bild 3.

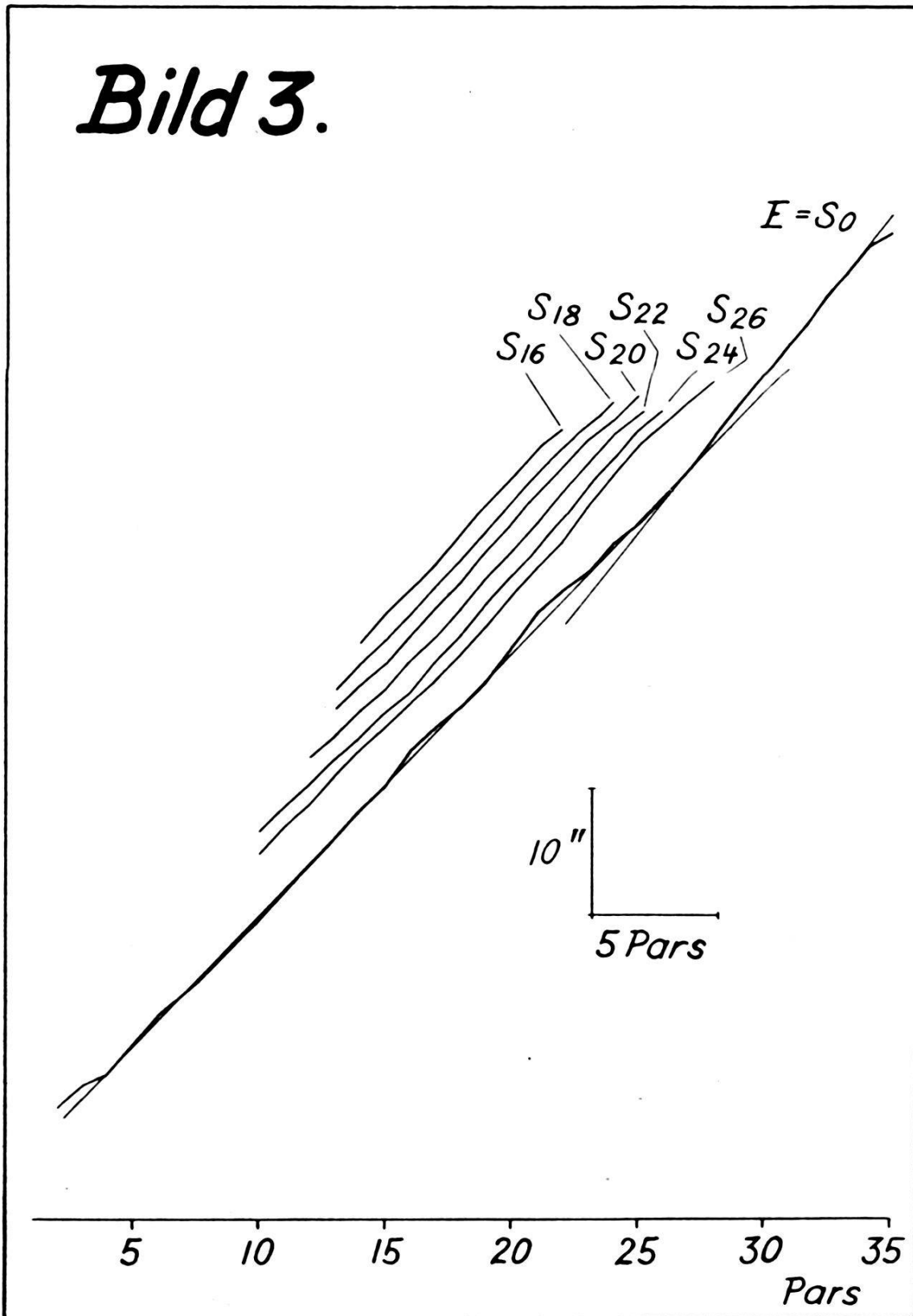
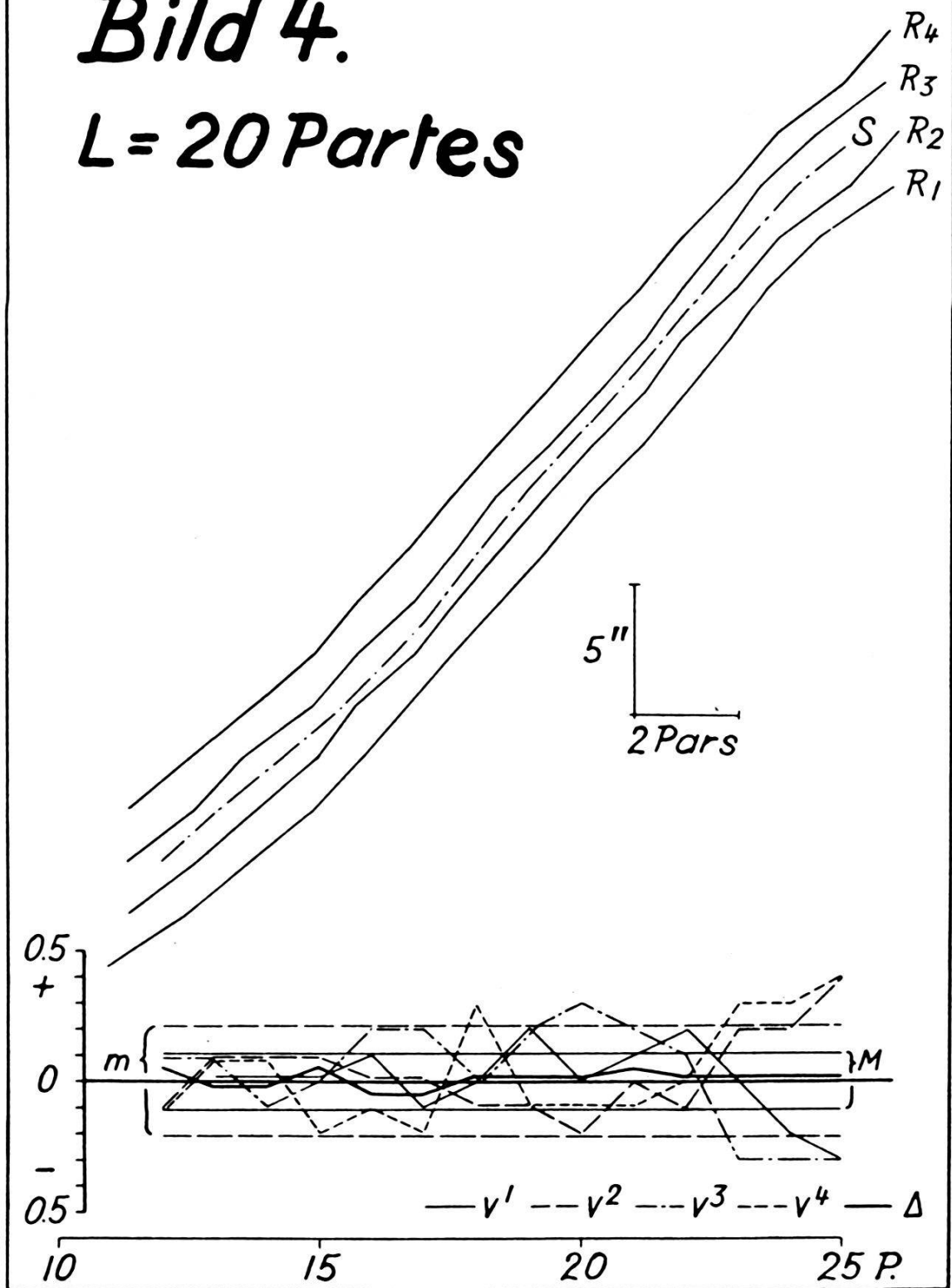


Bild 4.

$L = 20 \text{ Partes}$



5. Die natürliche Summenlinie

Um die Schwierigkeiten der Interpolation zwischen Summenlinien verschiedener Blasenlängen zu umgehen, wurde versucht, die *Summenlinie eines Blasenendes* (= Summenlinie der Blasenlänge 0), die die natürliche Summenlinie E genannt werden soll, zu konstruieren.

Die Ablesung der Blasenmitte wird im folgenden mit l_m , die des Blasenendes mit dem kleineren Wert l_k und diejenige des größeren Wertes mit l_g bezeichnet.

Die Summenlinie E wird durch den Ansatz definiert:

$$(8) \quad \boxed{S(l_m) = \frac{1}{2} [E(l_k) + E(l_g)]}$$

mit

$$(9) \quad l_k = l_m - \frac{L}{2} \quad \text{und} \quad l_g = l_m + \frac{L}{2},$$

sofern L die Blasenlänge

$$(9a) \quad L = l_g - l_k \quad \text{bedeutet.}$$

Der besonders im Hinblick auf die physikalische Interpretation zu einfach erscheinende Ansatz (8) wurde in ähnlicher Form auch von B. Wanach² benutzt, um aus theoretisch angenommenen Schliff Fehlern das Verhalten des Parswertes zu studieren.

Die Formel (4) für die Auswertung wird mit (8), wenn der Index 1 wieder die Ablesungen vor und 2 nach der Neigungsänderung bezeichnet:

$$(10) \quad N = \frac{1}{2} [E(l^2_k) + E(l^2_g) - E(l^1_k) - E(l^1_g)].$$

Die Genauigkeit von N , deren Größenordnung an Hand der Formeln (6) und (7) abgeschätzt wird, ändert in der ersten Näherung durch dieses Verfahren, mit dem nur die Interpolation umgangen wird, nicht.

Die natürliche Summenlinie $E(l)$ wird aus mindestens 3 gemessenen Summenlinien S_L verschiedener Blasenlängen L durch ein Iterationsverfahren gefunden. Für diese Iteration müssen die Argumente l_k und l_g von E ganze Zahlen und nach (9) die Werte der verwendeten Blasenlängen gerade Zahlen sein. Diese Bedingung erschwert die Prüfung der Libelle, doch können bei einiger Geschicklichkeit die geforderten Blasenlängen bei einer Kammerlibelle bis auf 0,2 Pars genau eingehalten werden.

Das Prinzip der Iteration ist kurz folgendes: Aus einem Wert $E(l_k)$ können nach (8) mit 3 Summenlinien $S_L(l_m)$ 3 Werte $E(l_g)$ verschiedener l_g berechnet werden. Mit einer angenommenen Reihe der $E(l_k)$ (vom

² B. Wanach, Untersuchungen von Sekundenlibellen. Zeitschrift für Instrumentenkunde 1926, S. 221.

Libellenende bis zur Libellenmitte) erhält man 3 verschiedene Reihen der $E(l_g)$. Die Werte mit den gleichen l_g werden gemittelt, und mit dieser verbesserten Reihe der $E'(l_g)$ wird umgekehrt 3 Reihen der $E'(l_k)$ gerechnet, usw. Wenn die Blasenlängen L kleiner als die halbe Libellenteilung sind, überschneiden sich die Reihen der $E(l_g)$ und $E(l_k)$, was bei der Mittelung berücksichtigt werden muß.

6. Praktisches Beispiel

Auf den Bildern 2 bis 6 sind einige Resultate einer derartigen Libellenprüfung für eine 2"-Libelle dargestellt. Die Libellenteilung befindet sich jeweils am untern Rand der Bilder. Die ganze Länge beträgt 37 Partes.

Bild 2 zeigt die Abhängigkeit des mittleren Fehlers m von der Blasenlänge nach Formel (6).

Im Bild 3 sind die Summenlinien S_L der Blasenlängen $L = 16, 18, 20, 22, 24$ und 26 Partes aufgetragen. Die natürliche Summenlinie E wurde aus der Iteration der 3 Summenlinien mit den Blasenlängen $L = 16, 20$ und 24 Partes gefunden. Sie kann als Bild der Schliffkurve angesehen werden. Man erkennt sofort, daß die untersuchte Libelle aus 2 verschiedenen Schliffen besteht; der erste geht von 2 bis 27 Partes mit dem Parswert 2".0, der zweite von 27 bis 35 Partes mit dem Parswert 2".5. Dazu sind noch einige Schlifffehler vorhanden. Der Maßstab dieser Darstellung ist so klein, daß die Abweichungen der Messungen voneinander von der Größenordnung der Strichdicke sind, das heißt, die erkennbaren Unregelmäßigkeiten sind reell. Die untersuchte Libelle kann somit kaum als «gut» bezeichnet werden.

Um die Brauchbarkeit der Methode zu prüfen, wurde die Iteration über einen großen Bereich der Blasenlängen ($L = 16-24$ Partes) ausgedehnt. Für den praktischen Gebrauch würde zum Beispiel der Bereich 18–22 Partes genügen, da bei einer Feldmessung sich die Blasenlänge innerhalb einer Beobachtungsserie in der Regel nicht mehr als ± 2 Partes ändern wird.

Die erreichte Genauigkeit wurde untersucht, indem aus den Werten E rückwärts verschiedene Summenlinien S^E gerechnet und mit den gemessenen Werten S verglichen wurden. In den Bildern 4–6 sind 3 solche Prüfungen dargestellt. Oben sind die 4 Meßreihen R (R_1 und $R_3 =$ Hinweg, R_2 und $R_4 =$ Rückweg) um beliebige Konstanten verschoben aufgetragen mit der daraus bestimmten Summenlinie S . Die v nach (6) mit den mittleren Fehlern sind darunter dargestellt, gemäß der Legende auf Bild 4. Dazu ist die Differenz

$$(11) \quad \Delta = S^E - S,$$

das heißt der Fehler des Ansatzes (8), eingezeichnet.

Bild 4 zeigt eine zur Iteration verwendete, Bild 5 eine interpolierte und Bild 6 eine extrapolierte Summenlinie.

Bild 5.

$L = 22 \text{ Pars}$

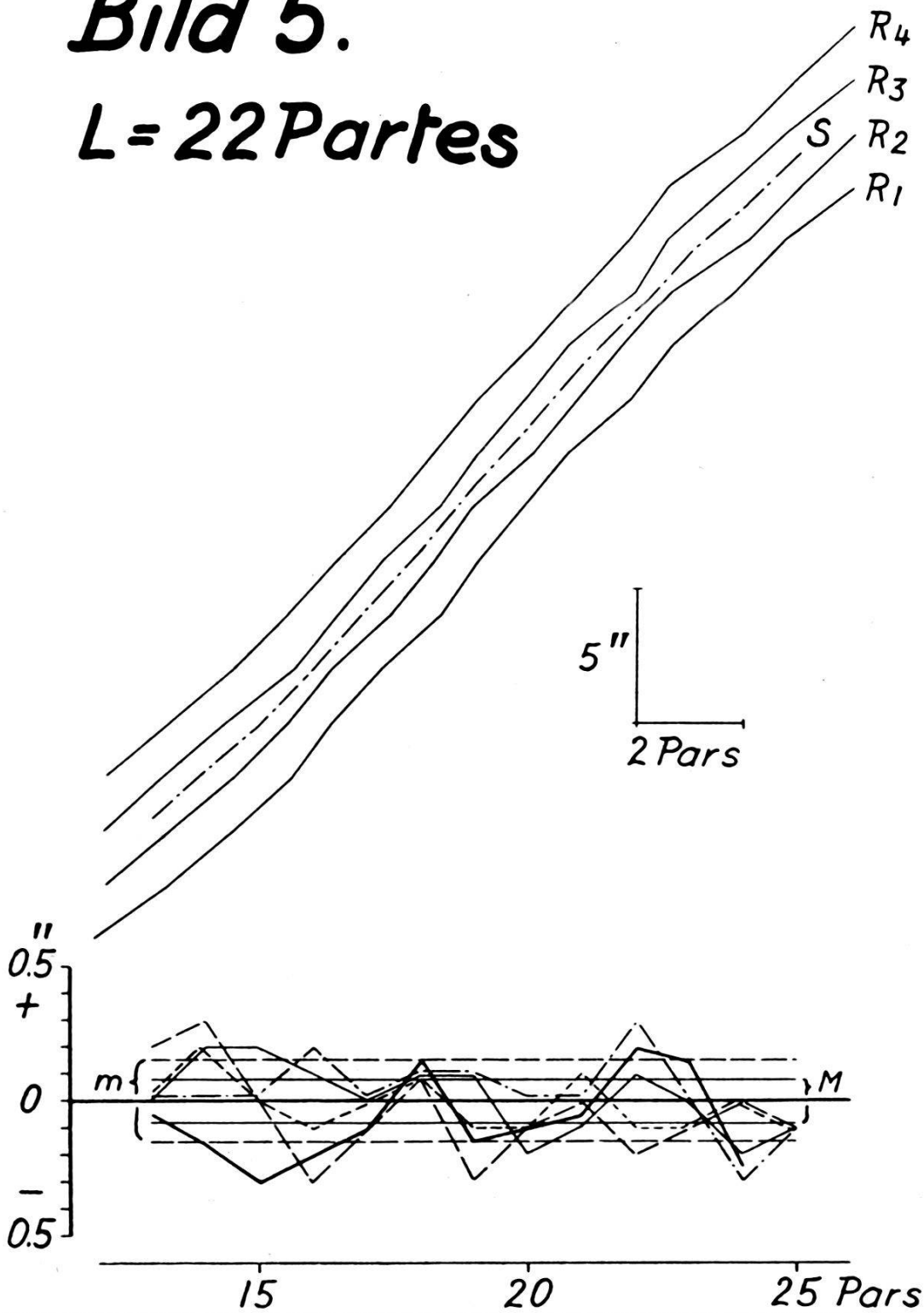
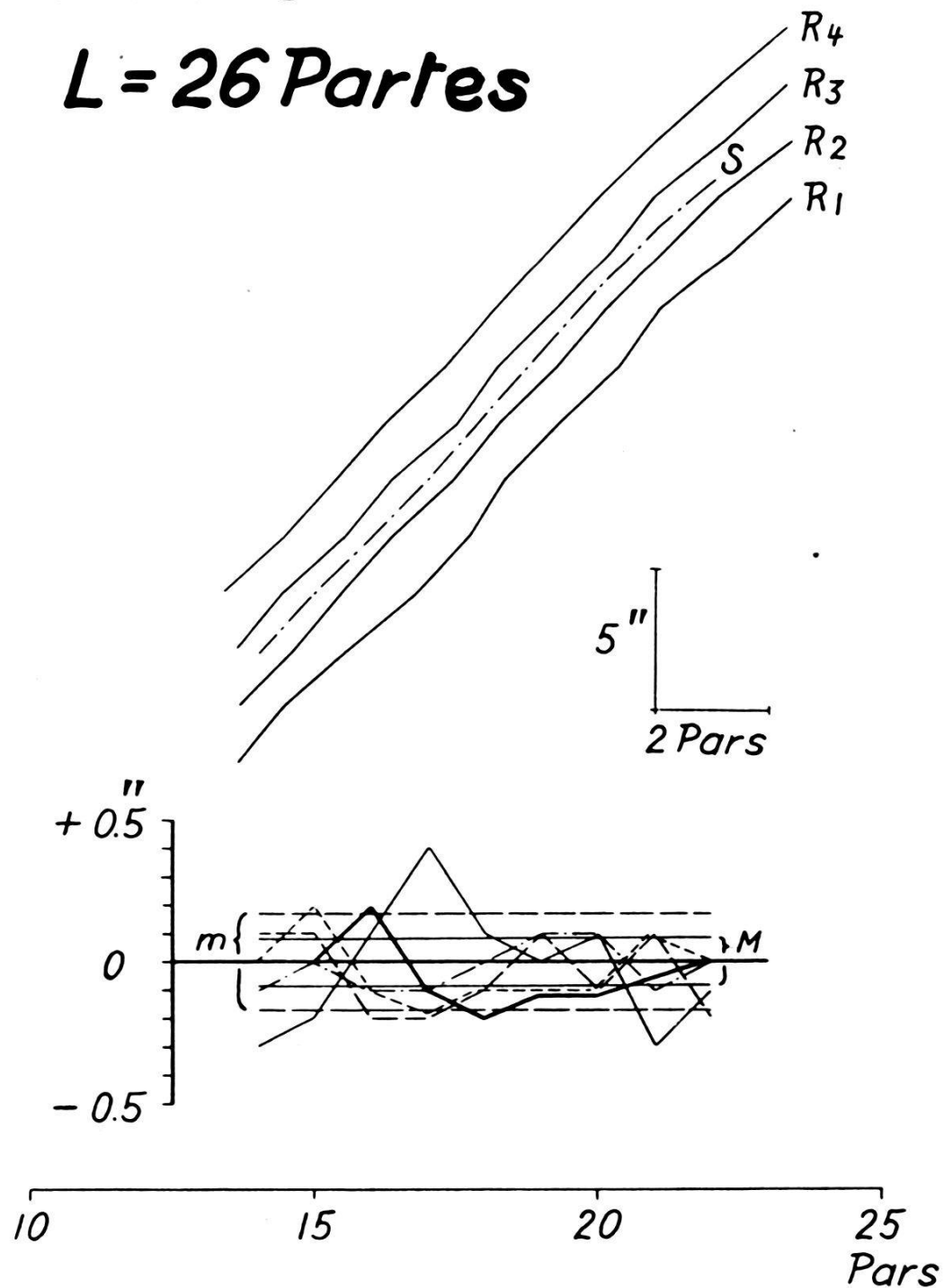


Bild 6.

$L = 26 \text{ Pars}$



Der Vergleich der Δ mit den v zeigt, daß beide von der gleichen Größenordnung sind. Naturgemäß sind die Δ für $L = 20$ Partes am kleinsten, da diese Werte zur Iteration verwendet wurden. Die interpolierten Werte für $L = 22$ Partes zeigen etwas größere Abweichungen, die aber im Vergleich mit den v nicht unwahrscheinlich sind. Auffallend ist die gleich gute Übereinstimmung der extrapolierten Werte für $L = 26$ Partes. Alle weiteren Kontrollen ergaben ähnliche Resultate.

Diese Ergebnisse zeigen, daß trotz der nicht einwandfreien Libelle, deren Blase bei kleinen Längen hängenbleibt, der Ansatz (8) zu einer natürlichen Summenlinie führt, mit der unter Umgehung jeder Interpolation Neigungen genügend genau bestimmt werden können.

Les projections géodésiques conformes à variables non dissociées

Par A. Ansermet

En géodésie les systèmes conformes sont en général du type à variables dissociées en ce sens que, dans les séries exprimant les déformations linéaires, les variables sont séparées, d'où plus de simplicité dans les calculs. Il n'est cependant pas toujours possible, suivant l'orientation et la configuration du territoire considéré, d'avoir recours à ce genre de projection. Il a paru opportun de consacrer quelques lignes à ce problème en faisant abstraction tout d'abord des cas où l'étendue du territoire nécessite le fractionnement de celui-ci en zones juxtaposées. La présente note constitue, à certains égards, un complément à la note publiée en août dernier.

Equations initiales

Considérons encore celles développées par G. Darboux ([4] p. 228); elles ont ceci de particulier que les termes indépendants des paramètres A et B ne sont pas incorporés dans les autres termes mais mis en évidence:

$$(1) \quad \begin{cases} X = x + \frac{x^3 + 3xy^2}{4R^2} + \frac{A}{3}(x^3 - 3xy^2) + \frac{B}{3}(3x^2y - y^3) + \dots \\ Y = y + \frac{y^3 + 3x^2y}{4R^2} - \frac{A}{3}(y^3 - 3yx^2) + \frac{B}{3}(3y^2x - x^3) + \dots, \end{cases}$$

où X, Y sont les coordonnées planes conformes, et x, y des coordonnées orthogonales sur la sphère de référence de rayon R . De plus:

$$(2) \quad m - 1 \cong \frac{X^2 + Y^2}{4R^2} + A(X^2 - Y^2) + 2BXY$$

($m =$ coefficient de déformation linéaire)