Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 54 (1956)

Heft: 9

Artikel: Das mittlere Fehlerellipsoid : die Berechnung seiner Achsen und die Richtungen derselben

Autor: Holsen, Jon

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-212715

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Der Eintritt in eine Vermessungstechnikerschule (zum Beispiel Gewerbeschule von 2 Semestern) sollte *frühestens nach vierjähriger Tätigkeit als Vermessungszeichner* erfolgen. Als Aufnahmebedingung wäre überdies die Note «gut» in Zeichnen und Beschriften durch Prüfung nachzuweisen.

Die abgelegte theoretische Prüfung würde, wie heute beim Geometerkandidaten, die Berechtigung einschließen, sich bei einem Grundbuchgeometer während zweier Jahre auf das praktische Examen als Techniker vorzubereiten. Wichtig ist ferner, daß nur noch *ein* Vermessungstechniker ausgebildet wird, das heißt alle 7 heutigen Fachausweise zusammengefaßt werden. Die bisherige extreme Spezialisierung ist unsinnig.

Zweifellos verlangt diese Lösung gewisse finanzielle Opfer. Der Preis besteht aber im Technikerausweis. Es gibt kaum technische Berufe, die mit weniger Ausbildungszeit auskommen und dabei sofort eine ähnlich gute Bezahlung erhalten.

Für die rein bautechnischen Arbeiten stehen Tiefbauzeichner und Tiefbautechniker zur Verfügung.

Das mittlere Fehlerellipsoid

Die Berechnung seiner Achsen und die Richtungen derselben.

Von Jon Holsen

Wir denken uns die Lage eines Punktes P im Raume durch Beobachtungen bestimmt. Durch eine Ausgleichung zum Beispiel finden wir den wahrscheinlichsten Ort, $P\ (X,\ Y,\ Z)$, des Punktes in einem orthogonalen Raumkoordinatensystem und weiterhin die mittleren Koordinatenfehler m_x, m_y und m_z längs der drei Achsenrichtungen. Wir fragen nun aber nach dem mittleren Fehler in einer von P ausgehenden, willkürlich gewählten Richtung, deren Richtungswinkel α, β und γ sein mögen. Sei nun $P_1\ (X_1 Y_1 Z_1)$ ein in dieser Richtung fest gelegener aber frei gewählter Punkt, so ist es klar, daß der mittlere Fehler in dieser Richtung gleich dem mittleren Fehler der Strecke $\overline{PP}$, $M_{pp1} = M_r = m \cdot \sqrt{Q_{rr}}$ ist. m ist der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, und $\frac{1}{Q_{rr}}$ ist das Funktionsgewicht der Strecke $\overline{PP_1} = r$.

Wir suchen zunächst Q_{rr}:

$$r^2 = (X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2$$

$$dr = \frac{(X_1 - X)}{r}\, dX + \frac{(Y_1 - Y)}{r}\, dY + \frac{(Z_1 - Z)}{r}\, dZ$$

$$\left.\frac{X_1 - X}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{Y_1 - Y}{r} = \cos\beta, \quad \frac{Z_1 - Z}{r} = \cos\gamma \right\} \tag{1}$$

$$dr = \cos\alpha\, dX + \cos\beta\, dY + \cos\gamma\, dZ \tag{2}$$

Nach der Tienstraschen Regel [2] folgt:

$$Q_r = \cos\alpha\, Q_x + \cos\beta\, Q_y + \cos\gamma\, Q_z$$

$$\left.\begin{aligned} M^2_r = m^2 Q_{rr} = m^2 (Q_{xx} \cdot \cos^2\alpha + 2Q_{xy} \cos\alpha \cos\beta + 2Q_{xz} \cos\alpha \cos\gamma \\ Q_{yy} \cos^2\beta + 2Q_{yz} \cos\beta \cos\gamma \\ + Q_{zz} \cos^2\gamma \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Um den Ausdruck (3) zu deuten, betrachte man nun den Punkt P als Ursprung eines xyz-Systems, dessen Achsen bzw. der X-, Y- und Z-Achse parallell sind. Dann ist:

$$M_r \cdot \cos\alpha = x \qquad M_r \cdot \cos\beta = y \qquad M_r \cdot \cos\gamma = z$$

$$M^2_r = x^2 + y^2 + z^2$$

(3) mit M^2_r multipliziert gibt:

$$\left.\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^2 = m^2 (Q_{xx} \cdot x^2 + 2Q_{xy} \cdot xy + 2Q_{xz} \cdot xz \\ Q_{yy} \cdot y^2 + 2Q_{yz} \cdot yz \\ Q_{zz} \cdot z^2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Durch eine orthogonale Koordinatentransformation können wir die gemischten Glieder auf der rechten Seite eliminieren. Die Gleichung (4) erhält durch diese Transformation eine quadratische Form im $\xi\eta\zeta$-System:

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 - m^2 (Q_{\xi\xi}\, \xi^2 + Q_{\eta\eta}\, \eta^2 + Q_{\zeta\zeta}\, \zeta^2) = 0 \tag{5}$$

Im $\xi\eta\zeta$-System sind also: $Q_{\xi\eta} = 0$, $Q_{\xi\zeta} = 0$, $Q_{\eta\zeta} = 0$ (6)

Abkürzungen: $Q_{\xi\xi} \cdot m^2 = A^2 \quad Q_{\eta\eta} \cdot m^2 = B^2 \quad Q_{\zeta\zeta} \cdot m^2 = C^2$

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 - (A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2) = 0 \tag{7}$$

Das ist die Gleichung der Fußpunktfläche eines Ellipsoids mit den Halbachsen A, B und C im $\xi\eta\zeta$-System. Die Fußpunktfläche ist der Ort der Fußpunkte aller vom Ursprung auf die Tangentialebenen des Ellipsoids gefällten Lote. Die Gleichung (7) ist von der Gleichung des Ellipsoids, $\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C} = 1$, ausgehend, einfach herzuleiten.

Der gesuchte mittlere Fehler in irgendeiner Richtung ist also gleich dem Radiusvektor der Fußpunktfläche in der gleichen Richtung.

Die Fußpunktfläche und das „zugehörige" Ellipsoid haben im $\xi\eta\zeta$-System die gleichen Achsenabschnitte: $\pm A$, $\pm B$ und $\pm C$.

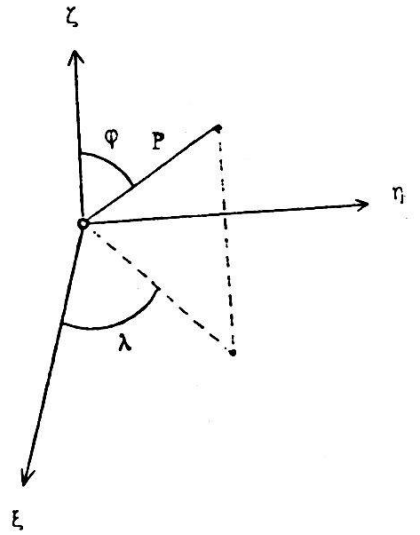
(5) ist die Gleichung der Fußpunktfläche im xyz-System.

Das Ellipsoid mit den Halbachsen $A = m\sqrt{Q_{\xi\xi}}$, $B = m\sqrt{Q_{\eta\eta}}$ und $C = m\sqrt{Q_{\zeta\zeta}}$ wird das mittlere Fehlerellipsoid genannt. ([3] Seite 400).

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Halbachsen des mittleren Fehlerellipsoids und die Richtungen der Halbachsen im Raume zu berechnen.

Hierbei setzen wir voraus, daß die Gewichtsreziproken Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{zz}, Q_{xy}, Q_{xz} und Q_{yz} schon bekannt sind, die man zum Beispiel bei einer Ausgleichung berechnet hat.

Es läßt sich leicht beweisen, daß die Extremwerte des Radiusvektors der Fußpunktfläche eben die gesuchten Achsen des Fehlerellipsoids sind. Der Vollständigkeit wegen nehmen wir diesen Beweis mit und führen im $\xi\eta\zeta$-System Raumpolarkoordinaten (p, φ, λ) ein.



Figur 1

$$\left.\begin{aligned} \xi &= p \sin\varphi \cos\lambda \\ \eta &= p \sin\varphi \sin\lambda \\ \zeta &= p \cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Die Werte von ξ, η und ζ nach (8) in (7) eingesetzt:

$$p^2 = (B^2 - A^2) \sin^2\varphi \sin^2\lambda + (A^2 - C^2) \sin^2\varphi + C^2 \qquad (9)$$

wo $p = M_r$ ist.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta p}{\delta\varphi} &= \frac{1}{p}(B^2 - A^2)\, 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\lambda + \frac{1}{p}(A^2 - C^2)\, 2 \sin\varphi \cos\varphi = 0 \\ \frac{\delta p}{\delta\lambda} &= \frac{1}{p}(B^2 - A^2) \sin^2\varphi \cdot 2 \sin\lambda \cos\lambda = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} ([B^2 - C^2] - [B^2 - A^2]\cos^2\lambda)\sin 2\varphi &= 0 \\ [B^2 - A^2]\sin^2\varphi \sin 2\lambda &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Das heißt:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ \varphi = 0 \quad \lambda \gtreqless 0 \quad \rightarrow p = \pm C \\ &\text{b)}\ \varphi = 100^g \begin{cases} \lambda = 0 \quad \rightarrow p = \pm A \\ \lambda = 100 \rightarrow p = \pm B \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad \text{Aus (9)} \qquad (9a)$$

was zu beweisen war.

Um nun A, B und C zu bestimmen, gehen wir auf die Gleichung (3) zurück und sehen, daß es sich lediglich darum handelt, die Extremwerte von Q_{rr} zu finden, wenn wir $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$, unter der Nebenbedingung, daß $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ bleibt, variieren lassen.

Wir bilden die Funktion H:

$$H = \left.\begin{aligned} &(Q_{xx}\cos^2\alpha + 2Q_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2Q_{xz}\cos\alpha\cos\gamma \\ &\qquad Q_{xy}\cos^2\beta + 2Q_{yz}\cos\beta\cos\gamma \\ &\qquad\qquad Q_{zz}\cos^2\gamma \end{aligned}\right\} - K(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1) \qquad (10)$$

wo $-K$ einen Lagrangeschen Multiplikator bedeutet.

H ist also gleich $Q_{rr} - K(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1)$.

Durch Differentiation von (10) erhalten wir, wenn wir gleichzeitig die partiellen Ableitungen von H gleich Null setzen.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta\alpha} &= 0 = [(Q_{xx} - K)\cdot\cos\alpha + Q_{xy}\cos\beta + Q_{xz}\cos\gamma]\cdot\sin\alpha &= 0 \\ \frac{\delta H}{\delta\beta} &= 0 = [\quad Q_{xy}\cdot\cos\alpha + (Q_{yy} - K)\cdot\cos\beta + Q_{yz}\cdot\cos\gamma]\cdot\sin\beta &= 0 \\ \frac{\delta H}{\delta\gamma} &= 0 = [\quad Q_{xz}\cdot\cos\alpha + Q_{yz}\cdot\cos\beta + (Q_{zz} - K)\cdot\cos\gamma]\cdot\sin\gamma &= 0 \\ \frac{\delta H}{\delta K} &= 0 = \quad \cos^2\alpha + \quad \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Das heißt: Für die erste Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \text{oder}\ (Q_{xx} - K)\cdot\cos\alpha + Q_{xy}\cdot\cos\beta + Q_{xz}\cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12a)$$

Für die zweite Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \text{oder}\ Q_{xy}\cos\alpha + (Q_{yy} - K)\cdot\cos\beta + Q_{yz}\cdot\cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12b)$$

Für die dritte Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= 0 \\ \text{oder } Q_{xz} \cdot \cos\alpha + Q_{yz} \cdot \cos\beta + (Q_{zz} - K) \cdot \cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12c)$$

Durch Kombination einer Gleichung von 12a, einer von 12b und einer von 12c können wir Lösungen von α, β und γ finden, die aber der Bedingung unterworfen sind, daß sie die vierte Gleichung (11) befriedigen müssen.

Wir betrachten zuerst den Fall:

$$\left.\begin{aligned} (Q_{xx} - K)\cos\alpha + Q_{xy} \cdot \cos\beta + Q_{xz} \cdot \cos\gamma &= 0 \\ Q_{xy} \cdot \cos\alpha + (Q_{yy} - K) \cdot \cos\beta + Q_{yz} \cdot \cos\gamma &= 0 \\ Q_{xz} \cdot \cos\alpha + Q_{yz} \cdot \cos\beta + (Q_{zz} - K) \cdot \cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Multipliziert man jetzt die erste Gleichung (13) mit $\cos\alpha$, die zweite Gleichung mit $\cos\beta$ und die dritte Gleichung mit $\cos\gamma$ und summiert man die drei auf diese Weise erhaltenen Gleichungen, bekommt man eine Gleichung, aus der man folgenden Ausdruck für K herleiten kann:

$$\left.\begin{aligned} K = (Q_{xx} \cdot \cos^2\alpha + 2Q_{xy}\cos\alpha\cos\beta &+ 2Q_{xz}\cos\alpha\cos\gamma \\ Q_{yy}\cos^2\beta &+ 2Q_{yz}\cos\beta\cos\gamma \\ &+ Q_{zz}\cos^2\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Das heißt: Die Lösungen von K sind eben die gesuchten Extremwerte von Q_{rr}. (Vergleiche (14) mit (3))

Die Gleichungen (13) bilden ein homogenes Gleichungssystem für die Unbekannten $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$. Dieses homogene Gleichungssystem muß eine nichttriviale Lösung haben, da wegen der vierten Gleichung (11) nicht alle drei Unbekannten Null sein können. Daher muß die Determinante des Gleichungssystems (13) verschwinden.

$$\begin{vmatrix} (Q_{xx} - K) & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & (Q_{yy} - K) & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & (Q_{zz} - K) \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

Durch die Entwicklung dieser Determinante erhält man eine kubische Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} K^3 - (Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz})\,K^2 + (Q_{xx} \cdot Q_{yy} + Q_{xx} \cdot Q_{zz} + \\ + Q_{yy} \cdot Q_{zz} - Q_{xy}^2 - Q_{xz}^2 - Q_{yz}^2) \cdot K \\ (-Q_{xx}\,Q_{yy}\,Q_{zz} - 2Q_{xy}\,Q_{yz}\,Q_{xz} + Q_{xz}^2\,Q_{yy} + \\ + Q^2_{xy}\,Q_{zz} + Q^2_{yz}\,Q_{xx}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Aus dieser Gleichung berechnet man K und nachher α, β und γ aus den Gleichungen (13) unter der Nebenbedingung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Diskussion der Gleichung (16)

Infolge (14) sind die drei Lösungen von (16) eben die gesuchten Extremwerte von Q_{rr}. Das bedeutet, daß das Quadrat der Halbachsen des mittleren Fehlerellipsoids den Lösungen der kubischen Gleichung proportional sind. Es seien die drei Lösungen der kubischen Gleichung K_1, K_2 und K_3. Dann ist: $A^2 = m^2K_1$ $B^2 = m^2 \cdot K_2$ $C^2 = m^2K_3$. Das heißt: Die kubische Gleichung (16) hat immer drei reelle Lösungen. (Siehe auch die Gleichungen (9a.)

Aus (16) folgt:

$$K_1 + K_2 + K_3 = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}$$

$$m^2K_1 + m^2K_2 + m^2K_3 = m^2Q_{xx} + m^2Q_{yy} + m^2Q_{zz}$$

$$\underline{A^2 + B^2 + C^2} = \underline{m^2{}_x + m^2{}_y + m^2{}_z}$$

Wenn man den mittleren Punktfehler im Raume entsprechend wie in der Ebene definiert, so heißt das, daß der mittlere Punktfehler eine Invariante ist und gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen des mittleren Fehlerellipsoids.

Das Ellipsoid geht in eine Kugel über, wenn $A = B = C$ wird. Das heißt, daß die drei Lösungen der Gleichung (16) zusammenfallen. Also $K_1 = K_2 = K_3 = Q$. Aber da die Fußpunktfläche einer Kugel, die Kugel selbst ist, so muß $Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = Q$ sein. (18)

Die Gleichung (16) lautet dann:

$$K^3 - 3\,Q\,K^2 + 3\,Q^2\,K - Q^3 = 0.$$

Diese Gleichung, verglichen mit (16) unter Berücksichtigung von (18), gibt uns die Bedingung an, daß das Ellipsoid in eine Kugel übergeht, nämlich:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = Q$$

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0.$$

Man könnte auch die Bedingung herleiten, daß das Ellipsoid ein Umdrehungsellipsoid wird. Zwei der Lösungen der Gleichung (16) müssen dann zusammenfallen. Das gibt uns drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Aus zwei Gleichungen findet man die Unbekannten. Die dritte Gleichung gibt eben die erwähnte Bedingung an.

Wir betrachten nun ein Paar Sonderfälle.

1. $Q_{xy} = Q_{zx} = Q_{yz} = 0$ $\quad Q_{xx} \geqq 0$ $\quad Q_{yy} \geqq 0$ $\quad Q_{zz} \geqq 0$

d. h. $K^3 - (Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz})\,K^2 + (Q_{xx}Q_{yy} + Q_{xx}Q_{zz} + Q_{zz}Q_{yy})\,K - Q_{xx}Q_{yy}Q_{zz} = 0$

$$K_1 + K_2 + K_3 = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}$$

$$K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3 = Q_{xx}\,Q_{yy} + Q_{yy}\,Q_{zz} + Q_{xx}\,Q_{zz}$$

$$K_1 K_2 K_3 = Q_{xx} Q_{yy} Q_{zz}$$

d. h.

$$K_1 = Q_{xx} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0^g \\ \beta = 100 \\ \gamma = 100 \end{cases} \qquad A^2 = m^2 Q_{xx}$$

$$K_2 = Q_{yy} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 100 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 100 \end{cases} \qquad B^2 = m^2 Q_{yy}$$

$$K_3 = Q_{zz} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 100 \\ \beta = 100 \\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad C^2 = m^2 Q_{zz}$$

Das aber wußten wir schon, weil wir $Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$ vorausgesetzt haben. Siehe übrigens Gleichung (6).

2. a. $\quad Q_{xz} = Q_{yz} = 0 \quad Q_{xy} \gtrless 0 \quad Q_{xx} \geqq 0 \quad Q_{yy} \geqq 0 \quad Q_{zz} \geqq 0$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} K^3 - (Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz})\, K^2 + (Q_{xx} Q_{yy} + Q_{yy} Q_{zz} + Q_{yy} Q_{zz} \\ - Q^2_{xy})\, K^2 - Q_{xx} Q_{yy} Q_{zz} + Q_{zz} Q^2_{xy} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Wir sehen sofort, daß eine der Lösungen $K_3 = Q_{zz}$ ist, d. h.

$$(K - Q_{zz})\,[K^2 - (Q_{xx} + Q_{yy})\, K + Q_{xx} Q_{yy} - Q^2_{xy}] = 0 \qquad (19a)$$

$$K_3 = Q_{zz} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 100^g \\ \beta_3 = 100 \\ \gamma_3 = 0 \end{cases} \qquad C^2 = m^2 Q_{zz}$$

$$K^2 - (Q_{xx} + Q_{yy})\, K + Q_{xx} Q_{yy} - Q^2_{xy} = 0 \qquad (19b)$$

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \tfrac{1}{2}\,(Q_{xx} + Q_{yy} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4 Q^2_{xy}}) \\ K_2 &= \tfrac{1}{2}\,(Q_{xx} + Q_{yy} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4 Q^2_{xy}}) \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Da nun die drei Ellipsoidachsen senkrecht aufeinanderstehen, so müssen zwei der Achsen in der xy-Ebene liegen.

Das heißt: $\gamma_1 = 100 \qquad \gamma_2 = 100$

$$\alpha_1 = \beta_1 + 100 \qquad \alpha_2 = \beta_2 + 100 = \alpha_1 + 100 = \beta_1 + 200$$

Es folgt dann aus den zwei ersten Gleichungen (13):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{Q_{xy}}{-Q_{yy} + K_1} = \frac{-Q_{xx} + K_1}{Q_{xy}} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{Q_{xy}}{-Q_{yy} + K_2} = \frac{-Q_{xx} + K_2}{Q_{xy}} \end{aligned}\right\} \quad (20b)$$

Die Aufgabe, die Halbachsen in der xy-Ebene zu finden, reduziert sich auf den zweidimensionalen Fall, also auf den Fall mit nur zwei Unbekannten, x und y. (Siehe [1] die Seiten 139–140.)

b. $\quad Q_{xy} = Q_{xz} = 0 \quad Q_{yz} \gtrless 0 \quad Q_{xx} \geqq 0 \quad Q_{yy} \geqq 0 \quad Q_{zz} \geqq 0$

Die Richtung der einen Halbachse fällt in diesem Falle mit der Richtung der x-Achse zusammen. Die zwei anderen Achsen liegen in der yz-Ebene.

c. $\quad Q_{xy} = Q_{yz} = 0 \quad Q_{xz} \gtrless 0 \quad Q_{xx} \geqq 0 \quad Q_{yy} \geqq 0 \quad Q_{zz} \geqq 0$

Die Richtung der einen Halbachse fällt in diesem Falle mit der Richtung der y-Achse zusammen. Die zwei anderen Achsen liegen in der xz-Ebene.

Wir betrachten nun wieder die Gleichungen 12a, 12b und 12c. Sie geben im ganzen acht Kombinationen an.

1.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ Q_{xz} \cdot \cos\alpha + Q_{yz} \cdot \cos\beta + (Q_{zz} - K) \cdot \cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ Q_{xy} \cdot \cos\alpha + (Q_{yy} - K) \cdot \cos\beta + Q_{yz} \cdot \cos\gamma &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}\right\}$$

4.

$$\left.\begin{aligned} (Q_{xx} - K) \cdot \cos\alpha + Q_{xy} \cdot \cos\beta + Q_{xz} \cos\gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}\right\}$$

5.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ Q_{xy} \cos\alpha + (Q_{yy} - K) \cos\beta + Q_{yz} \cdot \cos\gamma &= 0 \\ Q_{xz} \cos\alpha + Q_{yz} \cdot \cos\beta + (Q_{zz} - K) \cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\}$$

6.

$$\left.\begin{aligned} (Q_{xx} - K) \cdot \cos\alpha + Q_{xy} \cos\beta + Q_{xz} \cdot \cos\gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \\ Q_{xz} \cdot \cos\alpha + Q_{yz} \cdot \cos\beta + (Q_{zz} - K) \cdot \cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\}$$

7.

$$\begin{aligned} (Q_{xx} - K) \cdot \cos\alpha + Q_{xy} \cdot \cos\beta + Q_{xz} \cos\gamma &= 0 \\ Q_{xy} \cdot \cos\alpha + (Q_{yy} - K) \cdot \cos\beta + Q_{yz} \cdot \cos\gamma &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Die achte Kombination sind die Gleichungen (13), die wir schon behandelt haben.

Die vierte Gleichung (11) schließt die Kombinationen 1, 2, 3 und 4 aus. Die Kombinationen 5, 6 und 7 sind nur Sonderfälle der achten Kombination, was auch aus den eben behandelten Fällen 1, 2a, 2b und 2c hervorgeht. Die achte Kombination repräsentiert demnach die allgemeine Lösung der Gleichungen (11).

Die allgemeine Lösung der kubischen Gleichung (16)

$$Q_{xy} \gtrless 0, \quad Q_{xz} \gtrless 0, \quad Q_{yz} \gtrless 0, \quad Q_{xx} \geqq 0, \quad Q_{yy} \geqq 0, \quad Q_{zz} \geqq 0$$

Abgekürzt schreiben wir die Gleichung (16)

$$K^3 + aK^2 + bK + c = 0$$

Durch die Substitution $K = K' - \frac{a}{3}$, (22), können wir, wie bekannt, das quadratische Glied wegschaffen, also:

$$K'^3 + pK' + q = 0$$

$$p = -(b - \tfrac{1}{3}a^2) \qquad q = c - \frac{a}{27}(9b - 2a^2) \tag{23}$$

Durch trigonometrische Auflösung der kubischen Gleichung (23) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} K'_1 &= -\sqrt{p}\,(\cos\psi + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\sin\psi) \\ K'_2 &= \sqrt{p}\,(\cos\psi - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\sin\psi) \\ K'_3 &= \sqrt{p}\,\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\sin\psi \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

wo der Hilfswinkel ψ durch die Gleichung

$$\sin 3\psi = \frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{q}{p^2}\cdot\sqrt{3p} \quad \text{bestimmt ist.}$$

Aus (22) berechnet man dann K_1, K_2 und K_3 und weiter die Richtungswinkel α, β und γ aus den Gleichungen (13) in folgender Weise:

$$\cos\gamma = \frac{Q_{xy}^2 - (Q_{xx} - K)\cdot(Q_{yy} - K)}{(Q_{xx} - K)\cdot Q_{yz} - Q_{xz}\cdot Q_{xy}}\cdot\cos\beta = \frac{T}{N}\cdot\cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{(Q_{yy} - K)\cdot Q_{xz} - Q_{xy}\cdot Q_{yz}}{(Q_{xx} - K)\cdot Q_{yz} - Q_{xy}\cdot Q_{xz}}\cdot\cos\beta = \frac{M}{N}\cdot\cos\beta$$

Diese Ausdrücke für $\cos\gamma$ und coa α in die vierte Gleichung (11) eingesetzt, geben:

$$\cos\beta = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2 + T^2}} \tag{25a}$$

In der gleichen Weise erhalten wir:

$$\cos \alpha = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2 + T^2}} \tag{25b}$$

$$\cos \gamma = \frac{T}{\sqrt{M^2 + N^2 + T^2}} \tag{25c}$$

Für jedes K (jede Halbachse) bekommt man einen Wert für α, einen Wert für β und einen Wert für γ. Damit ist unser Problem gelöst.

Das Problem könnte man auch durch andere Verfahren gelöst haben. Zum Beispiel könnte man in die Gleichung (4) Raumpolarkoordinaten einführen. Durch Differentiation von r im Raumpolarkoordinatensystem (r, φ, λ) würde man, indem man $\frac{\delta r}{\delta \varphi} = 0$ $\frac{\delta r}{\delta \lambda} = 0$ setzte, zwei Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten φ und λ erhalten. Nachher berechnet man die gesuchten $r = A$, $r = B$ und $r = C$ aus der Gleichung (4) in Raumpolarkoordinaten. Dieses Verfahren, glaube ich, wird eher kompliziert sein.

Wir haben gesehen, daß wir das Problem als eine Extremwertaufgabe auffassen können, und wir haben es als solche gelöst. Es ist nicht notwendig, das Problem so aufzufassen. Denn wir werden die Halbachsen des gesuchten Ellipsoids durch die orthogonale Koordinatentransformation, die die Gleichung (4) in die Gleichung (5) überführt, erhalten. Diese Koordinatentransformation führt aber eben zu den Gleichungen (13) mit der Nebenbedingung $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1 = 0$ und weiter zu der Gleichung (16).

Das ganze Problem ist eine Hauptachsentransformation.

Zusammenstellung der Formeln

Wir setzen voraus daß Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{zz}, Q_{xy}, Q_{xz} und Q_{yz}, die Gewichtsreziproken der Unbekannten, bekannt sind. Dann bilde man die Gleichung:

$$K^3 + aK^2 + bK + c = 0$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} a &= -(Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}) \\ b &= Q_{xx} \cdot Q_{yy} + Q_{xx} \cdot Q_{zz} + Q_{yy} \cdot Q_{zz} - Q_{xy}^2 - Q_{xz}^2 - Q_{zy}^2 \\ c &= -Q_{xx} \cdot Q_{yy} \cdot Q_{zz} - 2Q_{xy} \cdot Q_{yz} \cdot Q_{xz} + Q^2_{xz} \cdot Q_{yy} + Q^2_{xy} \cdot Q_{zz} + Q^2_{yz} \cdot Q_{xx} \end{aligned}\right\}$$

Weiter bilde man die Gleichung:

$$K'^3 + pK' + q = 0$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} p &= -\left(b - \frac{1}{3} a^2\right) \qquad q = c - \frac{a}{27} (9b - 2a^2) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= -\sqrt{p}\left(\cos\psi + \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\sin\psi\right) - \frac{a}{3}\\
K_2 &= \sqrt{p}\left(\cos\psi - \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\sin\psi\right) - \frac{a}{3}\\
K_3 &= \qquad\qquad + \frac{2}{3}\sqrt{3p}\cdot\sin\psi - \frac{a}{3}
\end{aligned}\right\}$$

wo $\sin 3\psi = \frac{3}{2}\frac{q}{p^2}\sqrt{3p}$ ist.

$$\left.\begin{aligned}
&A = m\sqrt{K_1} \qquad B = m\sqrt{K_2} \qquad C = m\sqrt{K_3}\\
&\cos\alpha = \frac{M}{\sqrt{M^2+N^2+T^2}} \;\Big|\; \cos\beta = \frac{N}{\sqrt{M^2+N^2+T^2}} \;\Big|\; \cos\gamma = \frac{T}{\sqrt{M^2+N^2+T^2}}
\end{aligned}\right\}$$

wo:

$$\left.\begin{aligned}
M &= (Q_{yy} - K)\cdot Q_{xz} - Q_{xy}\cdot Q_{yz}\\
N &= (Q_{xx} - K)\cdot Q_{yz} - Q_{xy}\cdot Q_{xz}\\
T &= -(Q_{xx} - K)\cdot(Q_{yy} - K) + Q^2_{xy} \quad \text{ist.}
\end{aligned}\right\}$$

Zusammenfassung

Das mittlere Fehlerellipsoid dient als Charakteristikum für die Güte der Punktbestimmung im Raume. Wenn es wünschenswert ist, das mittlere Fehlerellipsoid zu berechnen, so ist die damit verbundene Rechenarbeit, wenn die Gewichtsreziproken der Unbekannten schon vorliegen, nicht größer, als daß man sie ohne allzugroßen Zeitverlust durchführen kann.

Bei einer Triangulation wird man gewöhnlich die Horizontal- und Höhenwinkel nicht gemeinsam, sondern getrennt ausgleichen. Erstens auf Grund der kleineren Genauigkeit, in erster Linie wegen der Unsicherheit der Höhenrefraktion, mit welcher die Höhenbestimmung erfolgt. Zweitens, weil man in den meisten Fällen flache Visuren haben wird, so daß die Korrelation zwischen Höhen- und Lagebestimmung nur klein ist. Das heißt, daß man angenähert den Fall $2a$ hat. Durch eine gemeinsame Ausgleichung der Höhen- und Horizontalwinkel würde man in solchen Fällen nichts anderes erreichen als eine größere Rechenarbeit – und keine bessere Bestimmung der Punktlage im Raume.

Bei einer Kleintriangulation mit steilen Visuren im Hochgebirge würde eine gemeinsame Ausgleichung der Höhen- und Horizontalwinkelbeobachtungen unter Umständen einen Sinn haben. Weil eben im Hochgebirge die Höhenrefraktion nicht nur verhältnismäßig klein ist, sondern auch wenig schwankt [4]. Man müßte selbstverständlich eine Gewichtsabschätzung zwischen den Höhen- und Horizontalbeobachtungen vor der Ausgleichung unternehmen.

In der Luftphotogrammetrie, wo die Bestimmung der Höhe und der Lage eines Punktes gemeinsam erfolgt, ist es natürlich, die Punktgenauigkeit durch das mittlere Fehlerellispsoid anzugeben.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt innerhalb des mittleren Fehlerellipsoides liegt, ist gleich 0. 1988. Das wahrscheinliche Ellipsoid, das ist dasjenige, für welches die äußere Wahrscheinlichkeit gleichkommt der innern, erhält man durch Vergrößerung der Achsen des mittleren Fehlerellipsoides in dem Verhältnisse 1:1.2559. Dadurch wird das Volumen des Ellipsoides um etwa das doppelte vergrößert. [5]

Zahlenbeispiel:

Gegeben: $Q_{xx} = 4.927.10^{-3}$ $\quad Q_{xy} = +2.279.10^{-3}$

$Q_{xz} = +1.046.10^{-3}$ $\quad Q_{yy} = +5.845.10^{-3}$

$Q_{yz} = +1.831.10^{-3}$ $\quad Q_{zz} = +4.088.10^{-3}$

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit $m = \pm 4^{cc}.5$

$a = -14.860.10^{-3}$

$b = +63.193733.10^{-6}$ $\quad p = +10.412800.10^{-6}$

$c = -0.082313.10^{-6}$ $\quad q = -0.012353.10^{-6}$

$$\sin 4 = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 0.012353.10^{-6}}{\sqrt{\left(\frac{10.4128.10^{-6}}{3}\right)^3}} = \frac{-6.177}{6.466} = -0.9553$$

$3\psi_1 = 319^g.11$
$3\psi_2 = 280^g.89$
$\psi_1 = 106^g.37$
$\psi_2 = 93^g.63$

$K_1 = -2.177.10^{-3} + 4.953.10^{-3} = +2.776.10^{-3}$
$K_2 = -1.532.10^{-3} + 4.953.10^{-3} = +3.421.10^{-3}$
$K_3 = +3.708.10^{-3} + 4.953.10^{-3} = +8.661.10^{-3}$

$M_1 = -0.963.10^{-6}$ $\quad \cos\alpha_1 = 127^g.4$
$N_1 = +1.555.10^{-6}$ $\quad \cos\beta_1 = 52\ .9$ $\quad C = \pm 2.4$ cm
$T_1 = -1.408.10^{-6}$ $\quad \cos\gamma_1 = 141\ .8$

$M_2 = -1.634.10^{-6}$ $\quad \cos\alpha_2 = 151^g.30$
$N_2 = +0.374.10^{-6}$ $\quad \cos\beta_2 = 89\ .5$ $\quad B = \pm 2.6$ cm
$T_2 = +1.539.10^{-6}$ $\quad \cos\gamma_2 = 52\ .7$

$M_3 = -7.118.10^{-6}$ $\quad \cos\alpha_3 = 137^g.6$
$N_3 = -9.221.10^{-6}$ $\quad \cos\beta_3 = 151\ .2$ $\quad A = \pm 4.2$ cm
$T_3 = -5.321.10^{-6}$ $\quad \cos\gamma_3 = 127\ .2$

Da die drei Achsen senkrecht zu einander stehen, haben wir als Kontrolle:

$$\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2 = 0\ (-0 \cdot 002)$$
$$\cos\alpha_2 \cdot \cos\alpha_3 + \cos\beta_2 \cdot \cos\beta_3 + \cos\gamma_2 \cdot \cos\gamma_3 = 0\ (-0 \cdot 002)$$
$$\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_3 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_3 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_3 = 0\ (-0 \cdot 003)$$

In unserem Beispiel stimmt diese Kontrolle mit genügender Annäherung.

Literaturverzeichnis

[1] *Großmann W.*, Grundzüge der Ausgleichungsrechnung.

[2] *Tienstra J. M.*, Het rekenen met gewichtsgetallen. Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde 1934, S, 37.

[3] *Czuber E.*, Theorie der Beobachtungsfehler.

[4] *Kobold F.*, Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen.

[5] *Eika T.*, Utjamningsrekning etter minste kvadraters metode.

Nebenstraßen, Durchgangsstraßen, Autobahnen

Von H. Braschler, dipl. Ing.

Obwohl wir in letzter Zeit in unserem Lande, gerade auch im Zusammenhang mit der schweizerischen Planungskommission, fast ausschließlich von den geplanten Autobahnen lesen und hören, habe ich im Titel die verschiedenen Straßentypen in der Reihenfolge ihrer *Bedeutung* für unser Land aufgeführt.

Wir können weder gegen den Strom schwimmen noch das Rad der Zeit zurückdrehen. Dem stets ansteigenden Motorfahrzeugbestand ist unser Straßennetz einfach nicht mehr gewachsen, und wir müssen unverzüglich an den Bau von reinen Autostraßen herantreten. Das haben glücklicherweise auch unsere Bauersame und ihre Vertreter eingesehen.

Ein wesentliches Problem bildet der Landerwerb, denn ohne Land kann man keine Straßen bauen. Hier gibt es eigentlich zwei Möglichkeiten:

1. durch Expropriation;
2. durch Landankauf und anschließende Umlegung.

Die Expropriation wäre ähnlich wie seinerzeit beim Eisenbahnbau rechtlich durchaus möglich, dürfte jedoch aus finanziellen Gründen heute bei der praktischen Durchführung auf ganz erhebliche Schwierigkeiten stoßen. Die Inkonvenienzen bei zahlreichen durch die Autostraßen durchschnittenen Betrieben wären dermaßen groß, daß viele Bauern auf die weitere Bewirtschaftung mit Recht verzichten müßten.

Besser ist es, wenn die öffentliche Hand Land ankauft und so den Bedarf für die Durchgangstraße oder Autobahn deckt. Durch eine Umlegung könnten dann einzelne Liegenschaften wieder in eine befriedigende Form gebracht werden. Wir müssen aber bedenken, daß dieser Maßnahme alle Nachteile, Fehler und Mängel einer nur lokalen Zusammenlegung an-