**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 54 (1956)

**Heft:** 8

**Artikel:** Le calcul semi-graphique de la déformation de réseaux projetés dans un système conforme

**Autor:** Ansermet, A.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-212709

# Le calcul semi-graphique de la déformation de réseaux projetés dans un système conforme[1]

*Par A. Ansermet*

Le problème traité ici a pour but de faciliter, dans la mesure du possible, le calcul des réseaux géodésiques dans le plan. Il convient au préalable de procéder à un

*Rappel de notions fondamentales*

A cet effet suivons partiellement la voie tracée par G. Darboux qui traita ce problème de façon magistrale. Notons en passant que ce mathématicien rend dans son mémoire un hommage vibrant à l'œuvre de C. F. Gauß ([3] p. 64).

Rapportée à son plan tangent et à des tangentes principales l'équation d'une surface est

$$Z = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2R'} + \ldots\ldots$$

où $R$, $R'$ désignent les rayons principaux de courbure ([3] p. 56)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{xdx}{R} + \frac{ydy}{R'}\right)^2 + \ldots\ldots \tag{1}$$

A l'élément $ds$ correspond dans le plan l'élément $ds' = m \cdot ds$

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 \qquad (X,\ Y \text{ coordonnées conformes})$$

où $\quad X = x + u_3 + \ldots\ldots \qquad Y = y + v_3 + \ldots\ldots$

$u_3$ et $v_3$ étant du 3[e] ordre en $x$, $y$.

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 + 2\left(\frac{\partial u_3}{dx}dx^2 + \frac{\partial u_3}{\partial y}dxdy + \frac{\partial v_3}{\partial x}dxdy + \frac{\partial v_3}{\partial y}dy^2\right) + \ldots\ldots =$$

$$= m^2\, ds^2 \cong (1 + 2m_0)\left(dx^2 + dy^2 + \frac{1}{R^2}(xdx + ydy)^2\right) + \ldots\ldots$$

où $m_0$ désigne le groupe homogène de 2[e] ordre dans $m$ et en admettant $R = R'$. En identifiant les coefficients respectifs de $dx^2$, $dxdy$, $dy^2$ on a:

$$2\frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{x^2}{R^2} + 2m_0;\ \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{xy}{R^2};\ 2\frac{\partial v_3}{\partial y} = \frac{y^2}{R^2} + 2m_0$$

d'où:

$$m_0 = \frac{x^2 + y^2}{4\,R^2} + A\,(x^2 - y^2) + 2\,Bxy \tag{2}$$

[1] Rédigé en hommage à M. le professeur D[r] Baeschlin, Rédacteur en chef du S.Z.f.V. à l'occasion de son 75[e] anniversaire.

On pourrait substituer $X$, $Y$ à $x$, $y$ dans ce groupe de 2e ordre

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} u_3 &= \frac{x^3 + xy^2}{4R^2} + \frac{A}{3}(x^3 - 3xy^2) + \frac{B}{3}(3x^2y - y^3) \\ v_3 &= \frac{y^3 + x^2y}{4R^2} - \frac{A}{3}(y^3 - 3yx^2) + \frac{B}{3}(3y^2x - x^3) \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 m_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_0}{\partial y^2} = \frac{1}{R^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 m_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_0}{\partial y^2} = \frac{1}{RR'} \; (R \mp R')$$

Résultats faciles à interpréter. Le système est à *axe neutre* si

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4R^2} + A & B \\ B & \frac{1}{4R^2} - A \end{vmatrix} = 0$$

C'est le cas le plus fréquent en pratique.

L'équation (2) définit un faisceau linéaire circonscrit à un carré si $m_0$ est donné ainsi que le quotient $A : B$. Dans cette équation (2) les paramètres de forme et d'orientation ne sont pas dissociés. Pour le calcul des courbures admettons *à priori* $B = 0$; seul subsiste le paramètre $A$ (variables séparées).

*Courbures.* Considérons un côté $P_1P_2$ et sa transformée plane en faisant abstraction du cas où il y a un point d'inflexion sur cette transformée. Celle-ci a donc une courbure $1:\rho$ qui ne change pas de signe entre $P_1$ et $P_2$. Le calcul de $1:\rho$ dépend de la formule de C. M. Schols (voir [1] p. 243–260).

$$(5) \quad 1:\rho \cong F_0 + F_A$$

où $F_0$ est un binôme indépendant de $A$ tandis que $F_A$ est un binôme contenant $A$ linéairement ([4] p. 79).

Cette courbure donne lieu pour chaque transformée $P_1P_2$ à deux *corrections angulaires* $\delta_1$ et $\delta_2$ et on peut calculer rapidement ou contrôler par voie graphique les valeurs $S = |\delta_1| + |\delta_2|$, la *différence* $D = |\delta_1| - |\delta_2|$ et même le quotient $q = \delta_1 : \delta_2$. Le calcul de $D$ est particulièrement rapide.

$$(6) \quad S = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\rho}\, ds \qquad (ds = \text{élément de transformée})$$

Considérons l'origine $O$ des coordonnées et le contour fermé $OP_1P_2O$.

On sait que le paramètre $A$, qui définit la projection, est éliminé dans l'expression:

$$\oint_C \frac{1}{\rho} ds \qquad \text{(contour } OP_1P_2O)$$

A cet effet on applique la formule de Green-Riemann qui permet de convertir une intégrale double en une intégrale curviligne et réciproquement; cette formule sera rappelée ci-dessous. Les termes en $A$ s'éliminent aussi dans l'équation (6) si le côté $P_1P_2$ est une corde de l'hyperbole équilatère: $XY =$ constante ce qui résulte de l'équation:

$$1 : \rho \cong \frac{1}{2R^2} \left\{ (1-n) X \sin V - (1+n) Y \cos V \right\} \tag{7}$$

([4] p. 79, [5] p. 105)

$-n = 4R^2 . A$, $V$ étant l'azimut de $P_1P_2$. Pour ce calcul on ne fait pas la discrimination entre la corde et la transformée.

Désignons par $1:\rho_0$ et $1:\rho_{90^0}$ les courbures pour $V = 0$ et $V = 90^0$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_{90^0}}\right)^2} = \frac{1}{2R^2} \sqrt{(1-n)^2 X^2 + (1+n)^2 Y^2} = 1 : \rho_{\max.} \tag{8}$$

(maximum)

car ce résultat subsiste pour deux azimuts quelconques $V$ et $(V + 90^0)$ au lieu de $0^0$ et $90^0$. Si $P_1P_2$ est une corde commune à l'ellipse $m_0 =$ const. et à l'hyperbole $XY =$ const. on réalise à la fois une valeur maximum pour la somme $S$ (équation [6]) et l'élimination du paramètre $n$ (ou $A$).

*Choix du paramètre.* Ce problème est assez complexe car on peut formuler diverses hypothèses ([3] p. 25, 60), par ex.:

1° rendre aussi petite que possible la valeur moyenne de $(m-1)^2$ pour tout le territoire considéré.

2° rendre aussi petite que possible la valeur moyenne du carré du gradient de log. $m$.

Cette seconde solution fut déjà traitée partiellement dans notre Revue; un bref rappel des résultats acquis suffit.

La valeur moyenne à rendre minimum s'obtient en divisant l'intégrale double

$$I = \iint \Delta \log. m . d\sigma \qquad (d\sigma = \text{élément de surface}) \tag{9}$$

par la surface du territoire. G. Darboux a recours à la formule de Green-Riemann ([2] p. 284, [3] p. 25) pour trouver une solution générale.

En représentation plane, qui nous intéresse ici, on a:

$$\begin{aligned} I &= \iint \left[ \left(\frac{\partial \log. \cdot m}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log \cdot m}{\partial Y}\right)^2 \right] dX \cdot dY = \\ &= \iint \left( \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y} \right) dX \cdot dY = \oint_C (PdX + QdY) \end{aligned} \tag{10}$$

D'une façon ou d'une autre ce calcul ne présente aucune difficulté; le résultat est connu. Les variables sont donc ici dissociées.

Ces notions fondamentales étant rappelées on peut passer au

*Calcul des corrections au moyen d'abaques.*

Il suffit d'appliquer les formules relatives à la courbure des transformées en tenant compte du paramètre choisi. Les éléments de l'abaque dépendent de ce paramètre.

Désignons par $1 : \rho_1$, $1 : \rho_m$ et $1 : \rho_2$ les courbures respectives de la transformée au premier tiers, au milieu et au second tiers de celle-ci.

$$\Delta X = P_1 P_2 \cos V; \quad \Delta Y = P_1 P_2 \sin V$$

*Quotient q*: $$|q| \cong \frac{1}{\rho_1} : \frac{1}{\rho_2} \qquad 2 \geq |q| \geq 0.5 \tag{11}$$

Ce quotient est indépendant du paramètre $n$ (ou $A$) si on a:

$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0$, c.-à-d. si la corde $P_1P_2$ prolongée passe par l'origine 0.

*Différence D.* $$D \cong \frac{n}{6R^2} \Delta X \cdot \Delta Y = \frac{P_1 P_2}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \tag{12}$$

en valeur absolue et en radians. [5] p. 105)

Pour une longueur donnée $P_1P_2$ et $\Delta X = \Delta Y$, cette différence $D$ a une valeur extrême, le paramètre étant aussi donné.

L'abaque à alignement de la Fig. 1 est applicable au réseau Suisse (axe neutre). Considérons un cas concret:

*Côté Feldberg–Lägern* (corrections 6″,76 et 5″,65)

$\Delta X = 43{,}35$ km $\qquad \Delta Y = 30{,}2$ km

$D = 1''{,}11$ (sexag) $\qquad$ (chiffres non soulignés)

Ce moyen de contrôle est rapide et efficace

quotient $|q| = 1.20$ $\qquad$ (chiffres soulignés)

pour $X_1 = +\,102{,}75$ km $\qquad X_2 = +\,59{,}4$ km

Pratiquement ces abaques sont à dresser à une *échelle suffisante* et moyennant la précision voulue. Les résultats ci-dessus furent obtenus avec un tel abaque.

*Somme S.* Par ex. pour Feldberg–Lägern 12″,41.

L'abaque de la Fig. 2 n'est pas conçu pour une projection à axe neutre mais pour un paramètre $n = -0{,}5$. Une seule lecture ne suffit

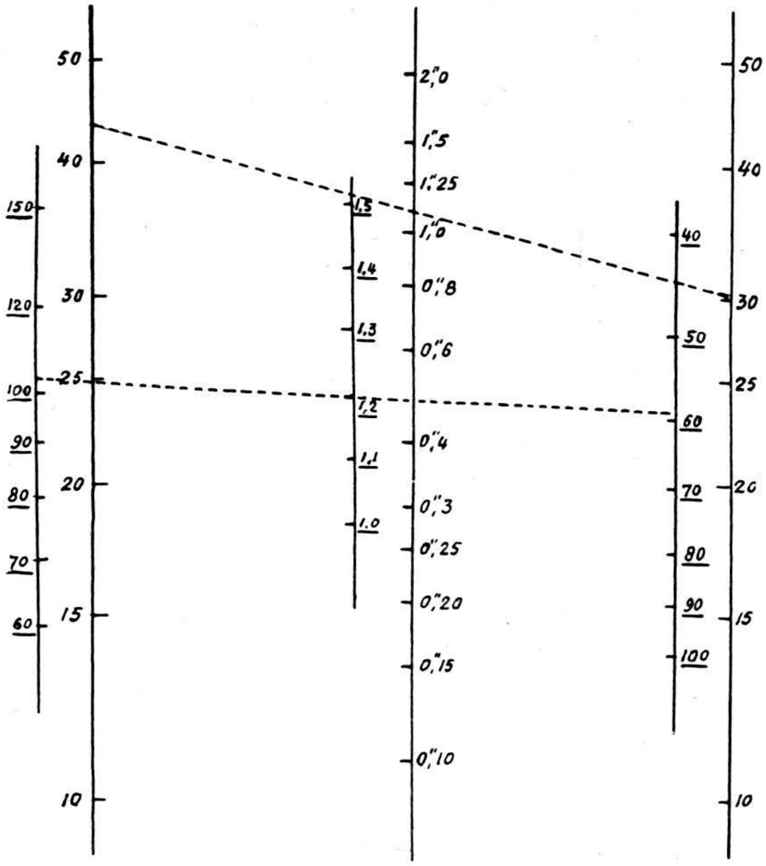


Fig. 1

alors plus car on a un binôme, mais le calcul graphique est cependant rapide. Ici surtout il faut un abaque assez grand en pratique

$$S \cong P_1 P_2 \cdot \frac{1}{\rho_m} = P_1 P_2 \cdot \frac{1}{2R^2}\,(1{,}5 X_m \sin V - 0{,}5\, Y_m \cos V) =$$

(indice $m$ pour le milieu de $P_1 P_2$)

$$= \frac{1}{2R^2}\,(1{,}5 X_m \Delta Y - 0{,}5\, Y_m \cdot \Delta X) \qquad \text{(radians)}$$

*Exemple* $X_m = +\ 80$ km $\qquad Y_m = +\ 100$ km
$\Delta Y = +\ 25$ km $\qquad \Delta X = -\ 35$ km
$S = 7'',61 + 4'',43 = +\ 12'',04$ (sexag)

Les deux termes du binôme ne sont pas toujours à additionner. L'abaque convient surtout pour les réseaux de 2e et 3e ordre. Une surcorrection peut être nécessaire dans certains cas ([4] p. 279). On peut concevoir d'autres abaques que ceux des Fig. 1 et 2.

Effectivement la transformée fut assimilée à une courbe de 3e ordre:

$$\eta = a\xi + b\xi^2 + c\xi^3$$

$$\eta = 0, \qquad \xi = 0 \quad \text{ou} \quad \xi = P_1 P_2, \qquad a = \delta_1$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 2b + 6c\xi \cong 1 : \rho$$

Si on forme la différence $D$ on constate que le terme $2b$ est éliminé ce qui explique aussi pourquoi ce calcul de $D$ est simple.

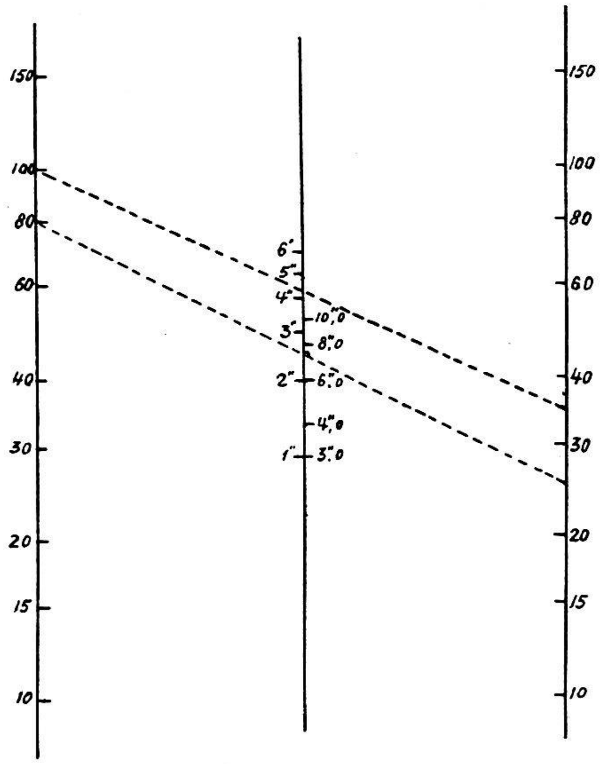


Fig. 2

On vérifie en outre que:

$$S \cong P_1 P_2 \cdot \frac{1}{\rho m} = P_1 P_2 \left( 2b + 6c \cdot \frac{P_1 P_2}{2} \right) = \int_{P_1}^{P_2} (2b + 6c\xi)\, d\xi$$

En résumé on voit qu'on peut rapidement calculer ou, tout au moins, contrôler les corrections angulaires. Pratiquement la *différence D* surtout constitue un contrôle rapide et bienvenu. La solution préconisée ci-dessus n'est du reste pas la seule.

### *Littérature*

[1] *Baeschlin C. F.*, Lehrbuch der Geodäsie (Orell Füssli, Zürich)

[2] *Blanc C.*, Calcul différentiel et intégral, Lausanne

[3] *Darboux G.*, Construction des cartes (Bulletin sciences mathématiques, 1911, p. 23, 55)

[4] *Laborde J.*, Traité des projections, fasc. IV

[5] *Ansermet A.*, Calcul des déformations dans les réseaux (Schweiz. Zeitschr. f. Verm. 1949, n° 4)