Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 53 (1955)

Heft: 9

Artikel: Note sur un théorème relatif à l'aéromensuration

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-211794

Mittwoch, 19. Oktober, ganztags:
Ramser, Nr. X, Melioration der Linthebene.

Donnerstag, 20. Oktober, ganztags:
Kobold/Ramser, Nr. Y, Melioration des St. Galler Rheintales; Firma Wild, Heerbrugg.

Samstag, 22. Oktober, 10.30 Uhr, im Kongreßhaus:
Akademischer Festakt.

Samstag, 22. Oktober, 21.00 Uhr, im Hauptgebäude ETH:
Polyball.

Im Namen der Sektion Zürich-Schaffhausen:
M. Gagg

Note sur un théorème relatif à l'aéromensuration

Par A. Ansermet

Parmi les précurseurs dans le domaine de l'aérophotogrammétrie moderne il faut citer feu le Prof. Seb. Finsterwalder qui fut Dr h.c. de l'Ecole polytechnique fédérale. Au début du siècle cet éminent photogrammètre avait déjà une claire vision des nécessités de la pratique et ses publications portent notamment sur les bases géométriques de la photogrammétrie, les problèmes de l'orientation mutuelle et de l'orientation absolue, les lieux critiques, etc.

De récentes publications ont permis de réaliser de grands progrès dans le domaine de l'orientation mutuelle tandis que pour l'orientation absolue le problème est à certains égards plus complexe. En principe on a un système de «coordonnées-sol» (Bodenkoordinaten) dont les éléments sont déterminés par les méthodes classiques et il faut confronter ces valeurs (x, y, z) avec les «coordonnées-machine» (x', y', z').

Dans les grandes lignes on peut grouper les diverses solutions en faisant la discrimination suivante:

1° Transformation simultanée des 3 coordonnées.

2° Dissociation des calculs altimétrique et planimétrique.

En pratique il faut examiner chaque cas avant de choisir une solution et il n'est pas question, dans cette courte note, de prendre position vis-à-vis de tel ou tel mode de calcul.

A un autre point de vue on peut établir la discrimination suivante:

I. Méthodes permettant l'élimination partielle des discordances révélées par la confrontation des coordonnées (x, y, z) et (x', y', z').

II. Transformation assurant l'élimination complète de ces discordances.

Quelle que soit la solution choisie on procède en général à une transformation provisoire ne laissant plus apparaître que de faibles discordances. En d'autres termes les deux systèmes de points définis par les valeurs (x, y, z) et (x', y', z') ne donnent plus lieu qu'à de faibles écarts et c'est le but de la transformation définitive de les réduire encore dans une mesure qui est exprimée par le *Théorème de S. Finsterwalder:* Les discordances v_s qui subsistent après la transformation, si on les assimile à des forces, constituent un système en équilibre ($v^2_s = v^2_x + v^2_y + v^2_z$).

Cette traduction étant un peu libre il paraît opportun de rappeler le texte original:

«Wenn sich zwei Punkthaufen möglichst nahe liegen, bilden die kürzesten Abstände beider, als Kräfte aufgefaßt, ein Gleichgewichtssystem.»

Le but de ces lignes est de mettre encore en évidence quelques particularités de ce problème susceptible d'être traité sous diverses formes.

Les éléments d'orientation sont:

Le rapport de similitude ou l'échelle: $m = l + dm$

Trois translations

Trois rotations ou neuf cosinus liés par six conditions; celles-ci sont trop connues pour qu'il soit nécessaire de les écrire. Une solution consiste (voir [2]) à multiplier respectivement par l'inconnue m chacun de ces cosinus puis à opérer une substitution très judicieuse:

$$
(1)\quad
\begin{array}{lll}
a_{11} = d^2 + a^2 - c^2 - b^2, & a_{12} = 2(ab - cd), & a_{13} = 2(ac + bd) \\
a_{21} = 2(ab + cd) & a_{22} = d^2 - a^2 + b^2 - c^2, & a_{23} = 2(bc - ad) \\
a_{31} = 2(ac - bd) & a_{32} = 2(bc + ad) & a_{33} = d^2 - a^2 - b^2 + c^2
\end{array}
$$

où les $a_{11}, a_{12} \ldots\ldots a_{33}$ sont les 9 cosinus multipliés chacun par m.

Grâce à ces 4 nouveaux paramètres on a implicitement escamoté les 6 conditions déjà mentionnées; en effet:

$$
\begin{aligned}
a^2_{11} + a^2_{21} + a^2_{31} &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2c^2d^2 \\
&\quad + 2a^2c^2 + 2b^2d^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = m^2.
\end{aligned}
$$

. . . .

. . . .

$$
\begin{aligned}
a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 2ab\,(2d^2 - 2c^2) + 2cd\,(-2a^2 + 2b^2) \\
&\quad + 4(ac - bd)\,(bc + ad) = 0.
\end{aligned}
$$

. . . .

. . . .

En appliquant les formules classiques de transformation et le principe des moindres carrés pour les discordances on aboutit à une équation de 4e degré en m. Pour le surplus le lecteur trouvera tous les développements relatifs à cette solution en consultant la source déjà indiquée (voir [2]).

Une solution dont la forme est probablement plus familière à de nombreux lecteurs est la suivante:

Désignons par $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ de petites rotations dont les axes sont respectivement $0x$, $0y$, $0z$ (origine 0) puis effectuons la transformation dans l'hypothèse facilement réalisable où:

$$
(2)\qquad [x] = [y] = [z] = 0 \text{ et } [x'] = [y'] = [z'] = 0 \text{ (voir [4]).}
$$

Les équations résiduelles initiales, au nombre de $3n$, sont:

$$(3)\quad \begin{cases} -f_i + v_{x_i} = da + x_i dm + z_i d\eta - y_i d\zeta \\ -f'_i + v_{y_i} = db + y_i dm - z_i d\xi + x_i d\zeta \\ -f''_i + v_{z_i} = dc + z_i dm + y_i d\xi - x_i d\eta \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots n) \end{cases}$$

où les f_i sont les termes absolus, v_x, v_y, v_z les résidus, da, db, dc, des translations, figurant ici *pour mémoire*, car les équations (3) sont déjà implicitement réduites grâce aux équations (2), ce qui implique l'élimination des da, db, dc tandis que: $[f] = [f'] = [f''] = 0$

et (4) $[v_x] = [v_y] = [v_z] = 0$

à ces 3 équations normales, sous forme condensée, s'en ajoutent quatre:

$$[xv_x] + [yv_y] + [zv_z] = 0 \qquad (5)$$

puis:

$$(6)\qquad [zv_y - yv_z] = 0, \quad [xv_z - zv_x] = 0, \quad [xv_y - yv_x] = 0$$

D'autre part écrivons les 6 conditions analytiques d'équilibre des systèmes de forces dans l'espace:

$$(7)\quad \begin{cases} [X] = [Y] = [Z] = 0 \qquad \text{et} \\ [Zy - Yz] = 0, \qquad [Xz - Zx] = 0, \qquad [Yx - Xy] = 0 \end{cases}$$

où les X, Y, Z sont les composantes des forces et x, y, z les coordonnées des points d'application de celles-ci. La corrélation entre les équations (7) et les systèmes (4) et (6) est manifeste si on assimile les v_x, v_y, v_z à des *composantes de forces*. Le théorème ci-dessus énoncé est donc vérifié. C'est le mérite de S. Finsterwalder d'avoir établi, par une autre voie, ce parallèle entre les lois de l'équilibre et un problème de transformation de coordonnées, ce qui rend le résultat obtenu moins abstrait.

Tout ce qui précède est valable dans le plan; il suffit de faire abstraction de la coordonnée z.

Pour discuter les résultats obtenus posons:

$$(8)\quad \begin{cases} [xx + yy + zz] = J_0 \qquad \text{(moment d'inertie polaire)} \\ [yy + zz] = J_x, \quad [xx + zz] = J_y, \quad [xx + yy] = J_z \quad \text{(moments axiaux)} \\ [xy] = J_{xy}, \; [xz] = J_{xz}, \quad [yz] = J_{yz} \quad \text{(moments centrifuges)} \end{cases}$$

La matrice des coefficients des 4 équations normales pour dm, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sera:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} J_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ 0 & -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ 0 & -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix}$$

En désignant par $Q_{mm}\, Q_{m\xi} \ldots\ldots Q_{\xi\xi} \ldots\ldots Q_{\eta\zeta}$ les coefficients de poids et de corrélation on a:

$$(10)\qquad J_0 \cdot Q_{mm} = 1$$

puis

$$Q_{m\xi} = Q_{m\eta} = Q_{m\zeta} = 0 \qquad (11)$$

à cause du déterminant

$$\begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Il n'y a donc pas de corrélation entre l'inconnue *dm* et les trois autres. On pourrait aussi écrire les autres équations aux poids.

Des simplifications interviennent si l'on réalise partiellement ou totalement les conditions:

$$J_{xy} \cong 0, \qquad J_{yz} \cong 0, \qquad J_{zx} \cong 0 \tag{11}$$

pour J_{xy} ce n'est pas difficile; pour J_{yz} et J_{zx} ce n'est pas impossible.

Il en résulterait: $Q_{\xi\eta} = Q_{\eta\zeta} = Q_{\xi\zeta} = 0$

$$J_x Q_{\xi\xi} = 1, \qquad J_y Q_{\eta\eta} = 1, \qquad J_z A Q_{\zeta\zeta} = 1. \tag{12}$$

Contrôle des poids après la transformation:

$$\left\{\begin{aligned} 1 : P_{xi} &= x^2{}_i \frac{1}{J_0} + z^2{}_i \frac{1}{J_y} + y^2{}_i \frac{1}{J_z} \\ 1 : P_{yi} &= y^2{}_i \frac{1}{J_0} + z^2{}_i \frac{1}{J_x} + x^2{}_i \frac{1}{J_z} \\ 1 : P_{zi} &= z^2{}_i \frac{1}{J_0} + y^2{}_i \frac{1}{J_x} + x^2{}_i \frac{1}{J_y} \end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$[1 : P_{x_i}] + [1 : P_{y_i}] + [1 : P_{z_i}] = 4 \quad \text{(nombre d'inconnues)} \tag{14}$$

résultat qui subsiste même si les conditions (11) et (12) ne sont pas remplies.

Pratiquement ce mode d'orientation absolue et de transformation ne convient guère que pour un petit groupe de stéréogrammes; il reste actuel.

Littérature:

[1] *Bachmann W. K.*, L'aéropolygonation (Publication EPUL 1950).
[2] *Festschrift S. Finsterwalder* (Wichmann, Berlin 1937).
[3] *Krames J.*, Gegenseitige Orientierung (S.Z.f.V. 1954).
[4] *Kuny W.*, Festpunktlose räumliche Triangulation (Wittwer, Stuttgart).
[5] Bulletin Société belge de Photogrammétrie, 1954/55.