Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 53 (1955)

Heft: 4

Artikel: La calcul des ellipses d'erreur par la méthode des variations d'azimuts

Autor: Anermet, A. / Baeschlin, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-211766

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 4 • LIII. Jahrgang **Erscheint monatlich** **12. April 1955**

Le calcul des ellipses d'erreur par la méthode des variations d'azimuts

Par A. Ansermet

Changements de variables. L'étude de l'ellipse d'erreur a lieu en général en coordonnées rectangulaires, exceptionnellement en coordonnées polaires. Depuis quelques années certains services topographiques préconisent un nouveau changement de variables; on substitue aux variations de coordonnées des variations d'azimuts (ou de gisements) dz. L'équation usuelle:

$$(1) \qquad v_i = a_i \,.\, dy + b_i \,.\, dx + c_i \,.\, dy' + d_i \,.\, dx' + d0 + f_i$$

où v_i est un résidu, tandis que dy, dx, dy', dx' sont des variations de coordonnées, $d0$ l'inconnue auxiliaire d'orientation, f_i le terme absolu ($a_i = -c_i$, $b_i = -d_i$), devient alors:

$$(2) \qquad v_i = dz_k + d0 + f_i \qquad (i = 1,2 \ldots\ldots n), (k = 1,2 \ldots\ldots r)$$

La relation (2) revêt donc une forme plus simple que le système (1) ce qui se traduit aussi dans les équations normales. Une telle solution est préconisée surtout pour la détermination de groupes de points, en liaison avec un calcul graphique ([2] p. 678). Elle constitue une solution intermédiaire entre la compensation d'observations médiates et la compensation conditionnelle. Les coordonnées inconnues sont en effet au nombre de u et les variations d'azimuts dz au nombre de r. Il y a donc $(r - u)$ équations de condition dont on peut tenir compte de diverses manières ([1] p. 147 et p. 295); parfois on élimine $(r - u)$ inconnues dz.

Les avantages et inconvénients de cette nouvelle méthode sont manifestes; elle apporte certaines simplifications mais ne se prête pas très bien aux calclus relatifs à la précision (ellipses d'erreurs, détermination des erreurs my et mx). Le but de cette note est de formuler quelques suggestions sur ce point particulier.

D'autre part l'établissement des équations de condition n'est pas toujours très simple. Analytiquement il suffit d'éliminer les coordonnées ou plutôt les variations de celles-ci dans un système tel que celui-ci:

$$
\begin{array}{lll}
 & dz_1 = a_1 dy + b_1 dx & + c_1 dy' + d_1 dx' \\
 & dz_2 = a_2 dy + b_2 dx & \\
(3) & dz_3 = a_3 dy + b_3 dx & \\
 & dz_4 = & c_2 dy' + d_2 dx' \\
 & dz_5 = & c_3 dy' + d_3 dx'
\end{array}
$$

d'où les formes linéaires ci-après, sans termes absolus (discordances):

$$
\begin{array}{ll}
(4) & A_1 dz_1 + A_2 dz_2 + A_3 dz_3 \ldots\ldots = 0 \\
 & B_1 dz_1 + B_2 dz_2 + B_3 dz_3 \ldots\ldots = 0
\end{array}
$$

Traitons un cas concret pour rendre plus explicite le raisonnement.

Application. Considérons un groupe de 5 points A, B, C, D, E, les points A, B, C étant connus, et les éléments fictifs ci-après:

	A	B	C	D (nouveau)	E (nouveau)
$x =$	+ 412 m	0	+ 412 m	+ 1650 m	+ 1650 m
$y =$	— 2888 m	0	+ 2888 m	— 1238 m	+ 1238 m

Cette symétrie partielle rend l'exposé plus clair et il s'agit ici du principe de la méthode

$$AD = DB = BE = EC = 2063 \text{ m} = DE:1{,}2 \quad \widehat{ADB} = \widehat{BEC} = 90^\circ$$

$$
(5) \left\{
\begin{array}{ll}
dz_1 = +6{,}0\, dy - 8{,}0\, dx & dz_3 = +8{,}0\, dy' - 6{,}0\, dx' \\
dz_2 = +8{,}0\, dy + 6{,}0\, dx & dz_4 = +6{,}0\, dy' + 8{,}0\, dx' \\
\multicolumn{2}{c}{dz_5 = 0{,}0\, dy + 8{,}33\, dx - 0{,}0\, dy' - 8{,}33\, dx' \text{ (unités } 1'', 1 \text{ dm)}}
\end{array}
\right.
$$

$$
(6) \left\{
\begin{array}{ll}
\text{visée } AD: -f_1 + v_1 = dz_1 & \text{visée } BE: -f_6 + v_6 = dz_3 \\
\text{visée } BD: -f_2 + v_2 = dz_2 & \text{visée } CE: -f_7 + v_7 = dz_4 \\
\text{visée } DA: -f_3 + v_3 = dz_1 + d0 & \text{visée } ED: -f_8 + v_8 = dz_5 + d0' \\
\text{visée } DB: -f_4 + v_4 = dz_2 + d0 & \text{visée } EB: -f_9 + v_9 = dz_3 + d0' \\
\text{visée } DE: -f_5 + v_5 = dz_5 + d0 & \text{visée } EC: -f_{10} + v_{10} = dz_4 + d0'
\end{array}
\right.
$$

Il est fait abstraction ici de l'inconnue d'orientation pour la station B, comme on le fait pour nos réseaux de 4e ordre. Les inconnues $d0$ et $d0'$ peuvent être éliminées avant ou après la formation des équations normales ([2] p. 662).

Equations de condition. Dans le présent exemple il y a une seule équation exprimant la corrélation qui existe entre les 5 variables dz quand le réseau se déforme; les sommets A, B, C demeurent invariables:

$$\frac{AB}{BD} \cdot \frac{BD}{BE} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{\sin ADB}{\sin BAD} \cdot \frac{\sin DEB}{\sin EDB} \cdot \frac{\sin BCE}{\sin BEC}; \quad \begin{array}{l} \widehat{BAD} = \widehat{BCE} = 45^\circ \\ \widehat{DEB} = \widehat{EDB} = 53^\circ \end{array}$$

expression rendue linéaire par voie logarithmique en remarquant que les différences tabulaires de sinus sont proportionnelles aux cotangentes des angles respectifs. Il en résulte la relation:

$$— dz_1 \text{ (cotg. } 45^o + \text{cotg. } 90^o) + dz_2 \text{ (cotg. } 90^o + \text{cotg. } 53^o) + dz_3 \text{ (cotg. } 53^o + \text{cotg. } 90^o) — dz_4 \text{ (dotg. } 90^o + \text{cotg. } 45^o) — dz_5 \text{ (cotg. } 53^o + \text{cotg. } 53^o) = 0$$

(7) ou: $— 1{,}00\, dz_1 + 0{,}75\, dz_2 + 0{,}75\, dz_3 — 1{,}00\, dz_4 — 1{,}50\, dz_5 = 0$

ce qui permet d'éliminer dz_5 tandis que $d0$ et $d0'$ sont éliminés grâce aux équations dites réduites ($f_3 + f_4 + f_5 = f_8 + f_9 + f_{10} = 0$) et finalement:

$$— f_i + v_i = a_i'dz_1 + b_i'dz_2 + c_i'dz_3 + d_i'dz_4 \quad (i = 1, 2 \ldots\ldots 10)$$

$$[a'a'] = 2{,}70 = [d'd'],\ [b'b'] = 1{,}67 = [c'c'],\ [a'b'] = — 0{,}72 = [c'd']$$

$$[a'c'] = — 0{,}39 = [b'd'],\ [a'd'] = + 1{,}04,\ [b'c'] = 0{,}00$$

Il y aura rarement une seule équation de condition et on établira alors un système d'équations avec des coefficients corrélatifs ([1] p. 147–150). Il y a là une certaine complication quoi qu'en disent les protagonistes de la méthode.

Dans l'exemple ci-dessus on trouve, pour $m = \pm 1''$

$m_{z_1} = m_{z_4} = \pm 0'',71$ (linéairement $\pm$ 7,1 mm)

$m_{z_2} = m_{z_3} = \pm 0'',85$ (linéairement $\pm$ 8,5 mm)

$M = \sqrt{7{,}1^2 + 8{,}5^2} = 11{,}1$ mm (rayon cercle orthoptique)

Ces paires de tangentes parallèles forment ici exceptionnellement un rectangle. Leurs directions respectives ne sont en général *pas conjuguées* par rapport à l'ellipse; cette courbe n'est donc pas complètement déterminée et une 3e paire de tangentes parallèles serait nécessaire. En compensant par les coordonnées on a trouvé:

$m_x = \pm 6{,}1$ mm $\qquad m_y = \pm 9{,}7$ mm $\qquad M = 11{,}4$ mm.

Ces résultats concordent assez bien, ce que l'on constate graphiquement.

Remarquons aussi la concordance des équations (5) et (7):

$$\begin{array}{rcllll}
— 1{,}00\, dz_1 & = & — 6{,}00\, dy & + 8{,}00\, dx & & \\
+ 0{,}75\, dz_2 & = & + 6{,}00\, dy & + 4{,}50\, dx & & \\
+ 0{,}75\, dz_3 & = & & & + 6{,}00\, dy' & — 4{,}50\, dx' \\
— 1{,}00\, dz_4 & = & & & — 6{,}00\, dy' & — 8{,}00\, dx' \\
— 1{,}50\, dz_5 & = & & — 12{,}50\, dx & & + 12{,}50\, dx' \\
\hline
\text{Sommes:} & & 0{,}0 = 0{,}0 & & &
\end{array}$$

En résumé les ellipses seront définies partiellement ou totalement par des paires de tangentes parallèles.

Ici la méthode des variations d'azimut n'est guère à recommander; toutefois si l'ellipse d'erreur est circulaire sa détermination est rapide. Considérons encore un cas concret fictif soit le système d'équations ci-après:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Visée extérieures} & \text{azimuts} \quad \text{longueurs} \\
(8) & \left\{\begin{array}{l}
-f_1 + v_1 = +9{,}66\,dy - 2{,}59\,dx = dz_1 \\
-f_2 + v_2 = -2{,}59\,dy - 9{,}66\,dx = dz_2 \\
-f_3 + v_3 = +2{,}87\,dy - 4{,}10\,dx = dz_3 \\
-f_4 + v_4 = -4{,}10\,dy - 2{,}87\,dx = dz_4
\end{array}\right. &
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} 15^\circ \\ 105^\circ \end{array}\right\} 2063 \text{ m} \\
\left.\begin{array}{r} 55^\circ \\ 145^\circ \end{array}\right\} 4125 \text{ m}
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Visées intérieures} & \\
(9) & \left\{\begin{array}{l}
-f_5 + v_5 = +9{,}66\,dy - 2{,}59\,dx + d0 = dz_1 + d0 \\
-f_6 + v_6 = -7{,}07\,dy - 7{,}07\,dx + d0 = dz_5 + d0 \\
-f_7 + v_7 = -2{,}59\,dy + 9{,}66\,dx + d0 = dz_6 + d0 \\
-f_8 + v_8 = +2{,}87\,dy - 4{,}10\,dx + d0 = dz_3 + d0 \\
-f_9 + v_9 = -4{,}98\,dy - 0{,}43\,dx + d0 = dz_7 + d0 \\
-f_{10} + v_{10} = +2{,}11\,dy + 4{,}53\,dx + d0 = dz_8 + d0
\end{array}\right. &
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} 15^\circ \\ 135^\circ \\ 255^\circ \end{array}\right\} 2063 \text{ m} \\
\left.\begin{array}{r} 55^\circ \\ 175^\circ \\ 295^\circ \end{array}\right\} 4125 \text{ m}
\end{array}
\end{array}
$$

$[aa] = [bb] = 312{,}5$; $[ab] = 0$ et admettons: $f_5 + f_6 + \ldots + f_{10} = 0$ Les 4 visées extérieures sont deux à deux égales et perpendiculaires tandis que les 6 visées intérieures sont trois à trois égales et symétriquement réparties d'où: $[a] = [b] = 0$ pour les visées *intérieures*. Le polygone constitué par les points donnés est sans cela quelconque. Implicitement les équations (9) sont déjà „réduites" et l'inconnue auxiliaire $d0$ éliminée. Désignons par P_i les poids des $(-f_i + v_i)$

$(i = 1, 2 \ldots . 10)$; on sait que: $[1 : P_i] = 2$ et comme $\left(\dfrac{2063}{4125}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{P_7} = 0{,}32;$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{1}{P_4} = \frac{1}{P_8} = \frac{1}{P_9} = \frac{1}{P_{10}} = 0{,}08$$

$$m_{z1} = m_{z2} = m_{z5} = m_{z6} = m\sqrt{0{,}32} \qquad \left(\text{linéairement } 20630 \cdot \frac{m}{\rho''}\sqrt{0{,}32}\right)$$

$$m_{z3} = m_{z4} = m_{z7} = m_{z8} = m\sqrt{0{,}08} \qquad \left(\text{linéairement } 41250 \cdot \frac{m}{\rho''}\sqrt{0{,}08}\right)$$

Toutes ces paires de tangentes parallèles enveloppent bien un cercle d'erreur.

L'exposé qui précède donne un aperçu sommaire de la méthode aux variations d'azimuts (ou gisements) et de son application au tracé des ellipses d'erreur. La nécessité de former des équations de condition entre les nouvelles variables ne sera pas toujours acceptée sans réserve par les praticiens. Pour le calcul de groupes de points la méthode est susceptible cependant de rendre des services.

Littérature

[1] *Baeschlin C. F.*, Ausgleichungsrechnung und Landesvermessung I, II (autographie).
[2] *Tardi et Laclavère.* Traité de géodésie (Paris, Gauthier-Villars). Tome I fasc. II.

Anmerkung der Redaktion. Da die Fehlerellipse seit *Helmert* wesentlich zur graphischen Interpretation der durch die partielle Aequivalenz für r = 2 geschaffenen Zusammenhänge dient ([1] S. 198 ff.), paßt es nicht, den *mittleren Punktfehler* $M = \sqrt{a^2_m + b^2_m}$, wo a_m und b_m die Halbachsen der mittleren Fehlerellipse sind, als *mittlere Unsicherheit* des Punktes anzusprechen. Diese ist vielmehr $R_q = \frac{m}{\sqrt{2}}$ ([1] S. 228). Diese Terminologie ist natürlich besonders bei der Anwendung der Fehlerellipse auf die Bestimmung eines Triangulationspunktes ungünstig, da der Radius einer Fehlerellipse von kreisförmiger Form *nicht* der mittlere Punktfehler ist. Im Französischen ist es in der Mathematik gebräuchlich, M als Radius des orthoptischen Kreises zu bezeichnen. Es wird aber nicht einfach sein, diese Zweideutigkeit zu beheben, weil eine Änderung der Terminologie erfahrungsgemäß sehr schwierig ist, wenn sie schon einige Zeit im Gebrauche stand.

F. Baeschlin

Die Meliorationen im Kanton Luzern

Referat des Chefs des Kantonalen Meliorationsamtes Luzern, Herrn Ing. *R. Frey*, anläßlich der Kulturingenieurkonferenz vom 23. September 1954 in Schüpfheim

Im Kanton Luzern, wie überall in der Schweiz, ist zufolge des fortschreitenden Rückgangs des landwirtschaftlichen Areals ein immer noch großes Bedürfnis vorhanden, den Kulturboden noch produktiver zu gestalten und Ödland oder geringwertigen Boden durch entsprechende technische Maßnahmen zu verbessern. Besonders ist aber auch erkannt worden, daß in parzelliertem Gebiet nur durch die Zusammenlegung der Parzellen ein mehreres aus dem Boden herauszuholen ist. Sehr rege ist aber auch beim Luzerner Bauer das Bedürfnis, seinen Betrieb arbeitstechnisch und in hygienischer Beziehung zu verbessern.

Der Kanton Luzern ist vornehmlich Agrarkanton. Eine gegenüber andern Kantonen verhältnismäßig bescheidene Industrie ist auf den Raum Luzern und wenige größere Ortschaften konzentriert.

Ein Blick auf die topographische Karte zeigt, daß der Kanton schon rein äußerlich sehr vielgestaltig ist. Der Kantonsteil nördlich der Linie Luzern–Wolhusen–Willisau mit seinen Tälern in der Höhenlage von 400 bis 500 m und Höhenzügen bis zirka 850 m liegt im Mittelland. Der süd-