Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 52 (1954)

Heft: 9

Artikel: Quelques aspects de la transformation affine appliquée aux mensurations

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-210963

lungsgesellschaften profitieren von der Beschränkung der Baugebiete. Sie seien deshalb eingeladen, mit den Gemeinden auf diesem Gebiet in noch vermehrtem Maße zusammenzuarbeiten.

Die Verweigerung der Anschlüsse außerhalb des Baugebietes bedeutet keine Verletzung der Eigentumsgarantie, sondern lediglich die Zurückweisung des Grundeigentums in die ihm gesetzten Schranken. Wer von der Baufreiheit Gebrauch macht, hat dafür zu sorgen, daß die Gemeinde später durch die Verbesserung der Erschließung nicht übermäßig belastet wird. Die Verweigerung der Anschlüsse bedeutet kein Bauverbot. Wer in seinem Grundstück über eine Quelle verfügt, das Abwasser auf die Dauer in unschädlicher Weise beseitigt und auf die elektrische Energieversorgung verzichtet, kann bauen. Diese Voraussetzungen werden nur ausnahmsweise gegeben sein. In der Praxis sind Projekte der Bauherren für eine eigene Abwasserbeseitigung oder -verwertung besonders sorgfältig zu prüfen. Die Versickerung im Bereich von Grundwasser und Quellen scheidet von vorneherein aus und kommt im übrigen nur in Frage, wenn die Untergrundverhältnisse das Funktionieren der Anlage auf die Dauer gewährleisten. Die landwirtschaftliche Verwertung des Abwassers im eigenen Garten fällt bei dem durch den heutigen Wohnkomfort bedingten großen Wasseranfall praktisch nicht mehr in Betracht.

Quelques aspects de la transformation affine appliquée aux mensurations

Par A. Ansermet

Dans la pratique des mensurations un même groupe de points est déterminé parfois à des époques ou dans des circonstances différentes; il en résulte pour ces points un double système de coordonnées (x, y) et (x', y'). Il faut concilier ces deux systèmes de valeurs et ce problème est assez complexe ([1] p. 168–183). La comparaison de ces valeurs révèle des discordances que l'ont peut éliminer partiellement par la transformation d'Helmert; celle-ci laisse subsister des résidus qui peuvent être gênants. On a recours alors au fractionnement du réseau par *mailles* en appliquant la transformation collinéaire ou mieux l'affinité qui est un cas particulier. Les formules de la collinéation sont:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + 1} \quad \text{et} \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ax + by + 1}$$

d'où $$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = A dx^2 + B dy^2 + 2 C dx dy$$

les valeurs des coefficients A, B, C variant d'un point à l'autre.

Une forme particulière est celle qui exprime la corrélation entre les coordonnées photographiques (x, y) d'une vue aérienne et les coordonnées (x', y') des points du sol, celui-ci étant assimilable à un plan:

([3] p. 217)

$$x' = x \frac{h \sec}{f \cdot \cos \nu + x \cdot \sin \nu} \qquad \text{et} \qquad y' = y \frac{h}{f \cdot \cos \nu + x \cdot \sin \nu}$$

on trouve: $A = B$ et $C = o$

pour $y = 0$ et $x = f \cdot \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}$ ou $x = -f \cdot \operatorname{ctg} \frac{\nu}{2}$ (points focaux)

f étant la focale de l'objectif, ν la distance nadirale et h la hauteur de prise au-dessus du sol.

Affinité. A la droite à l'infini dans le système (x, y) correspond la droite à l'infini dans le système (x', y'). Analytiquement on a:

(1) $$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \qquad \text{et} \qquad y' = a_2 x + b_2 y + c_2$$

Ces formules définissent une déformation dite *homogène*; une transformation provisoire préalable permet d'éliminer les termes c_1 et c_2 et de rendre très petites les discordances $(x' - x)$ et $(y' - y)$ en chaque point. Les 4 coefficients peuvent être déterminés deux par deux, séparément, et l'équation de l'ellipse de déformation devient:

(2) $$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = (a^2_1 + a^2_2)\, dx^2 + \\ + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)\, dx \cdot dy + (b^2_1 + b^2_2)\, dy^2$$

Les coefficients sont ici indépendants des coordonnées du point considéré et il ne serait pas nécessaire de donner une valeur infiniment petite au rayon ds'. L'orientation des axes de l'ellipse s'obtient par:

(3) $$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\,(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{a^2_1 + a^2_2 - b^2_1 - b^2_2}$$

Les éléments de cette courbe sont en général très mal déterminés car les déformations sont très faibles; en particulier $\operatorname{tg} 2\varphi$ est voisin de $\frac{0}{0}$ et on a rigoureusement:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{0}{0} \text{ pour } a_1 = b_2 \quad \text{et} \quad b_1 = -a_2$$

ce qui ramène à la transformation d'Helmert.

Directions atropiques. Ce nom est parfois donné à des droites dont la direction demeure inchangée en cours de déformation.

La condition à réaliser est:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a_1 x + b_1 y}{x} = \frac{a_2 x + b_2 y}{y}$$

d'où l'on déduit la paire de droites recherchées.

Les directions atropiques sont rectangulaires pour $a_2 = b_1$

Calcul des discordances. Considérons une maille $P_1\ P_2\ P_3$ donnant lieu aux discordances ci-après entre les coordonnées des systèmes (x, y) et (x', y'):

Sommet	P_1:	discordances	dx_1, dy_1
»	P_2:	»	dx_2, dy_2
»	P_3:	»	dx_3, dy_3

En un point quelconque $P(x, y)$ les discordances peuvent être exprimés sous la forme d'une moyenne pondérée ([1], [4]):

$$(4) \qquad dx = \frac{F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3}{F}, \qquad y = \frac{F_1 dy_1 + F_2 dy_2 + F_3 dy_3}{F}$$

où F_1, F_2, F_3 sont les surfaces des triangles PP_2P_3, PP_1P_3 et PP_1P_2 tandis que $F = F_1 + F_2 + F_3$. Le calcul est en général graphique et exige peu de précision. Il est immédiat si $F_1 = F_2 = F_3$ (centre de gravité). Quelques praticiens tracent les réseaux de droites: dx = constante, dy = constante.

ou aussi $\frac{1}{2}(dx + dy)$ = constante et $\frac{1}{2}(dx - dy)$ = constante.

Application. Considérons 4 points où se manifestent les discordances entre deux systèmes de coordonnées; les x et y sont tous positifs:

P_1	$x_1 = 3259$ m	$y_1 = 1037$ m	discordance	$dx_1 = +19$ cm
P_2	$x_2 = 4113$ m	$y_2 = 2451$ m	»	$dx_2 = +38$ cm
P_3	$x_3 = 2746$ m	$y_3 = 2968$ m	»	$dx_3 = +27$ cm
P_4	$x_4 = 781$ m	$y_4 = 1108$ m	»	$dx_4 = -28$ cm

On a choisi les discordances dx, le calcul étant analogue pour les dy. Désignons en outre par M le point d'intersection des diagonales; pour rendre l'exemple plus explicite on a fait $MP_1 \cong MP_3$.

1re solution: 2 mailles $P_1P_2P_3$ et $P_1P_3P_4$

centre de gravité	$P_1P_2P_3$	$dx = +28$ cm
» »	$P_1P_3P_4$	$dx = +6$ cm
» »	$P_1P_2P_3P_4$ (G)	$dx = +14{,}5$ cm
intersection M de	P_1P_3 et P_2P_4	$dx = +23$ cm

2e solution: 2 mailles $P_1P_2P_4$ et $P_2P_3P_4$

centre de gravité	$P_1P_2P_4$	$dx = +9{,}7$ cm
» »	$P_2P_3P_4$	$dx = +12{,}3$ cm
» »	$P_2P_3P_4$	$dx = +12{,}3$ cm
» »	$P_1P_2P_3P_4$ (G)	$dx = +8{,}7$ cm
intersection M de	P_1P_3 et P_2P_4	$dx = +16$ cm

L'ambiguité est manifeste; le choix d'une solution n'est pas exempt d'arbitraire. Une solution consisterait aussi à considérer 4 mailles de sommet commun M (ou G); pour ce point central on formerait une valeur moyenne des discordances dx calculées ci-dessus. La façon de constituer les mailles est l'élément critique du problème.

Mailles spatiales. Considérons encore 2 systèmes de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') portant sur un même groupe de points; admettons de plus que les discordances $(x - x')$, $(y - y')$ et $(z - z')$ soient déjà très petites. Ici encore la transformation d'Helmert fournirait une solution entraînant le calcul d'une variation d'échelle dm et de 3 rotations $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ([2] p. 14):

$$
\begin{array}{llll}
\text{équation normale relative} & \text{à } dm\text{:} & [xv_x + yv_y + zv_z] = 0 \\
\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \text{à } d\xi\text{:} & [yv_x - zv_y] = 0 \\
\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \text{à } d\eta\text{:} & [zv_x - xv_y] = 0 \\
\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \text{à } d\varphi\text{:} & [xv_x - yv_y] = 0
\end{array}
$$

Ces résidus v_x, v_y, v_z peuvent être gênants. L'application éventuelle de l'affinité, avec fractionnement en mailles tétraédriques, pourrait-elle être envisagée; telle est la question qui se pose.

Considérons directement la forme sans termes absolus:

$$
\begin{aligned}
x' &= d_1 x + g_3 y + g_2 z \\
y' &= h_3 x + d_2 y + g_1 z \\
z' &= h_2 x + h_1 y + d_3 z
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ces 9 coefficients étant déterminés par groupes de trois. Les g et h sont voisins de zéro et les d voisins de un: $d_1 = 1 + \delta_1$, $d_2 = 1 + \delta_2$, $d_3 = 1 + \delta_3$. Le plan à l'infini se correspond à lui-même ce qui rend la déformation *homogène.*

En différenciant le système (5) on obtient:

$$
\begin{aligned}
ds'^2 &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \\
&= A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + D dx dz + E dx dy + F dy dz
\end{aligned}
\tag{6}
$$

où les coefficients ne dépendent que des d, g, h; toutes ces valeurs et les éléments de l'ellipsoide de déformation sont mal déterminés à cause de la petitesse des déformations ([5] p. 178–192). Ici encore il ne serait pas nécessaire de considérer un rayon ds' infiniment petit.

Les directions atropiques dépendent des conditions: $\dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{z'}{z} = k$

$$
\begin{aligned}
(d_1 - k)x + g_3 y + g_2 z &= 0 \\
h_3 x + (d_2 - k) y + g_1 z &= 0 \\
h_2 x + h_1 y + (d_3 - k) z &= 0
\end{aligned}
\quad \text{ou} \quad
\begin{vmatrix}
(d_1 - k) & g_3 & g_2 \\
h_3 & (d_2 - k) & g_1 \\
h_2 & h_1 & (d_3 - k)
\end{vmatrix} = 0
\tag{7}
$$

équation du 3^e degré en k. Les 3 directions invariables forment un système trirectangle quand: $h_1 = g_1$, $h_2 = g_2$, $h_3 = g_3$ (8)

En général ces relations (8) ne sont pas réalisées et il y a lieu de donner une autre forme au système (5) pour dissocier les deux éléments qui constituent la déformation définie par (5): rotation et déformation pure dite *irrotationnelle*. Posons:

$$2s_1 = h_1 + g_1, \quad 2s_2 = h_2 + g_2, \quad 2s_3 = h_3 + g_3$$
$$2r_1 = h_1 - g_1 \quad 2r_2 = g_2 - h_2 \quad 2r_3 = h_3 - g_3 \qquad \text{on obtient:}$$

$$\begin{aligned} x' &= x + (r_2 z - r_3 y) + (\delta_1 x + s_3 x + s_2 z) \\ y' &= y + (r_3 x - r_1 z) + (s_3 x + \delta_2 y + s_1 z) \\ z' &= z + (r_1 y - r_2 x) + (s_2 x + s_1 y + \delta_3 z) \end{aligned} \tag{9}$$

où les binômes entre parenthèses expriment la rotation et les trinômes une déformation pure, consistant en des dilatations suivant les axes de la déformation, axes invariables dans l'espace. La condition (8) est satisfaite. L'angle de rotation, exprimé en radians, est $\sqrt{r^2_1 + r^2_2 + r^2_3} = R$ tandis que les cosinus directeurs de l'axe instantané de rotation sont: r_1/R, r_2/R et r_3/R.

Enfin les formules (4) permettant de calculer les discordances en un point quelconque P, prennent ici la forme générale:

$$dx = \frac{dx_1 T_1 + dx_2 T_2 + dx_3 T_3 + dx_4 T_4}{[T]}; \quad dy = \frac{[Tdy]}{[T]}; \quad dz = \frac{[Tdz]}{[T]} \tag{10}$$

c'est encore une moyenne pondérée où:

$$[T] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \dots$$

T_1, T_2, T_3, T_4 désignant les volumes des tétraèdres $PP_2P_3P_4$, $PP_1P_3P_4$, $PP_1P_2P_4$ et $PP_1P_2P_3$ (valeurs absolues). Pratiquement l'application de ces formules ne se conçoit guère que pour le centre de gravité ($T_1 = T_2 = T_3 = T_4$).

La transformation affine par mailles tétraédriques peut être envisagé pour la solution de certains problèmes d'aéromensuration.

Littérature:

[1] Jordan-Eggert, Vermessungskunde II (1950).
[2] Kuny W. Festpunktlose räumliche Triangulation (Wittwer, Stuttgart 1932).
[3] Tham P. Lösung des Rückwärtseinschnittes (Zeitschr. f. Vermessungsw. 1943, Nr. 10).
[4] Merkel H. Zur maschenweisen Abbildung (Allg. Verm. Nachr. 1934).
[5] Bouasse H. Etude des symétries, Physique VI (Paris, Delagrave).

7° *Divers.* Selon le vœu du comité central, la section Zurich-Schaffhouse organisera un cours de conférences en 1956. Les sections peuvent envoyer leurs suggestions et leurs vœux y relatifs au comité central jusqu'au 1er mai 1955.

La contribution de la Société centrale à une assemblée générale de deux jours est élevée de 400 fr. à 500 fr. Ce montant comporte aussi toutes les dépenses pour l'organisation d'une conférence ou pour une visite de caractère technique.

Le collègue Kuhn demande si l'on fait une différence entre l'examen final des dessinateurs de la mensuration et celui des dessinateurs de la photogrammétrie. D'après les expériences faites en Suisse allemande, une telle différentiation est superflue.

Le secrétaire du procès-verbal: p. m. *E. Bachmann*

Errata

N° 9, page 240, lignes 11 à 13, lire

$$d\xi: \quad [yv_z - zv_y] = 0$$
$$d\eta: \quad [zv_x - xv_z] = 0$$
$$d\zeta: \quad [xv_y - yv_x] = 0$$

Sommaire

Prof. J. Krames, Vienne, Orientation relative de deux vues les axes des chambres et la base étant en position oblique (fin). – G. Grimm, ingénieur, Assemblages à emboîtement avec joint au caoutchouc pour conduites d'eau en fonte. – P. Bühler, Un nouveau procédé mécanique de composition pour la lettre cartographique ... – Hans J. Maehly, Machines et méthodes pour le calcul automatique. – Bn., Actualités techniques. – Monsieur Otto Braschler, ancien géomètre cantonal à Coire, 80 années. Dr. R. Helbling, 80 années. – Ls. Hegg, Bericht über die Sitzung des ständigen Komitees des Internationalen Geometerbundes in Wien. – Procès-verbal de la 26e assemblée des Présidents de la S.S.M.A.F. du 4 septembre 1954 à Berne.

Redaktion: Vermessungswesen und Photogrammetrie: Prof. Dr. C. F. Baeschlin, Zollikon, Chefredaktor;
Kulturtechnik: Dr. Hans Lüthy Dipl.-Ing., Wabern bei Bern, Seftigenstraße 345;
Planung und Aktuelles: Dipl.-Ing. E. Bachmann, Paßwangstraße 52, Basel

Redaktionsschluß am 1. jeden Monats

Insertionspreis: 25 Rp. per einspaltige Millimeter-Zeile + 10 % Teuerungszuschlag. Bei Wiederholungen Rabatt. Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats. **Abonnementspreis:** Schweiz Fr. 15.–; Ausland Fr. 20.– jährlich.

Expedition, Administration und Inseratenannahme: Buchdruckerei Winterthur AG. Telephon (052) 2 22 52