Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 50 (1952)

Heft: 5

Artikel: Formules sur les lignes géodésiques

Autor: Cladas, Constantin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-209202

Formules sur les lignes géodésiques

par Constantin Cladas, Athènes

Je donne dans ce qui suit une courte introduction et une nouvelle démonstration géométrique des formules de *Lelieuvre** et ensuite je trouve des formules nouvelles pour les lignes géodésiques qui correspondent à celles de *Lelieuvre*.

1. Courte introduction aux formules de *Lelieuvre*.

Le système des équations de *Lelieuvre* constitue une autre forme du système des équations différentielles aux derivées partielles du premier ordre à l'aide de laquelle on détermine une surface en donnant l'image sphérique des lignes asymptotiques de cette surface selon *Gauss*.

Ce qui caractérise principalement les formules de *Lelieuvre* est l'omiomorphie des formules due au fait que les torsions des lignes asymptotiques passant par chacun des points de la surface, sont opposées.

Les équations de *Lelieuvre* ont une signification particulière pour la théorie des deformations infinitesimales des surfaces et on les utilisent aussi dans plusieurs problèmes de la théorie des surfaces.

Il est possible d'appliquer les nouvelles formules sur les lignes géodésiques que nous donnons dans le présent travail, aussi aux déformations infinitésimales des lignes géodésiques concernant la déformation des surfaces. On verra qu'on peut déduire de ces formules des conclusions utiles pour les géodésiens.

2. Démonstration géométriques des formules de Lelieuvre

On a pour chaque système d'axes rectangulaires (avec cosinus directeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$)

$$\alpha_1 = \pm \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \beta_1 = \pm \begin{vmatrix} \gamma_2 & \alpha_2 \\ \gamma_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \gamma_1 = \pm \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

Considérons le trièdre formé par la tangente à une des lignes asymptotiques $v = c_1$ $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, par la normale de la surface (l, m, n), et par leur perpendiculaires commune. On a alors:

$$l = \lambda_1 \ , m = \mu_1 \ , n = \nu_1 .$$

(où λ_1, μ_1, ν_1, sont les cos. directeurs de la binormale de la ligne asymptotique.)

La perpendiculaire commune est donc la normale principale de la ligne asymptotique (ξ_1, η_1, ζ_1), et on a par conséquent:

$$\alpha_1 = \pm \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}, \quad \beta_1 = \pm \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \nu_1 & \lambda_1 \end{vmatrix}, \quad \gamma_1 = \pm \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 \end{vmatrix}$$

---

* Bull. d. sc. Math., Bd. 12, S. 126.

mais il est $d\mu_1 = -\eta_1\, d\tau_1$, $d\nu_1 = -\zeta_1\, d\tau_1$, $d\lambda_1 = -\xi_1\, d\tau_1$

$$\text{donc } \alpha_1 = \frac{\partial x}{\partial s_1} = \mp \begin{vmatrix} \dfrac{d\mu_1}{d\tau_1} & \dfrac{d\nu_1}{d\tau_1} \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}, \ \beta_1 = \ldots, \gamma_1 = \ldots$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial u} = \mp \frac{\partial s_1}{\partial u} \begin{vmatrix} \dfrac{d\mu_1}{d\tau_1} & \dfrac{d\nu_1}{d\tau_1} \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \mp \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mu_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \nu_1}{\partial u} \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} \frac{ds_1}{d\tau_1} = \mp\, r_1 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mu_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \nu_1}{\partial u} \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \mp\, r_1 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial m}{\partial u} & \dfrac{\partial n}{\partial u} \\ m & n \end{vmatrix}, \text{ si on pose}$$

$\sqrt{r_1}\,.\,l = l_1$, $\sqrt{r_1}\,.\,m = m_1$, $\sqrt{r_1}\,.\,n = n_1$ on trouve les premières formules de *Lelieuvre*.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \mp \begin{vmatrix} \dfrac{\partial m_1}{\partial u} & \dfrac{\partial n_1}{\partial u} \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}, \frac{\partial y}{\partial u} = \mp \begin{vmatrix} \dfrac{\partial n_1}{\partial u} & \dfrac{\partial l_1}{\partial u} \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}, \frac{\partial z}{\partial u} = \mp \begin{vmatrix} \dfrac{\partial l_1}{\partial u} & \dfrac{\partial m_1}{\partial u} \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}$$

Quant aux deuxièmes formules on a les formules suivantes qui correspondent à l'autre série des lignes asymptotiques.

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \pm \begin{vmatrix} \dfrac{\partial m_1}{\partial v} & \dfrac{\partial n_1}{\partial v} \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}, \text{ parce que } r_2 = -r_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \pm \ldots, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \pm \ldots$$

3. Formules correspondantes aux formules de *Lelieuvre* pour les lignes géodésiques.

En partant des formules

$$\alpha_1 = \pm \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \ \beta_1 = \pm \begin{vmatrix} \gamma_2 & \alpha_2 \\ \gamma_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}, \ \gamma_1 = \pm \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

On trouve des formules correspondantes à celles de *Lelieuvre*, si on les applique a une série de lignes géodesiques $v = c_1$. Considérons le trièdre formé par la tangente $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ à une ligne géodésiques, par la normale de la surface (l, m, n) et par leur perpendiculaire commune.

On a alors

$$l = \xi_1, m = \eta_1, n = \zeta_1$$

et par conséquent

$$\alpha_1 = \pm \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}, \beta_1 = \pm \ldots, \gamma_1 = \pm \ldots$$

mais

$$d\eta_1 = -\beta_1 d\sigma_1 + \mu_1 d\tau_1, d\zeta_1 = -\gamma_1 d\sigma_1 + \nu_1 d\tau_1, d\xi_1 = \ldots$$

$$\text{donc } \mu_1 = \frac{d\eta_1 + \beta_1 d\sigma_1}{d\tau_1}, \nu_1 = \frac{d\zeta_1 + \gamma_1 d\sigma_1}{d\tau_1}$$

$$\text{Et } \alpha_1 = \frac{\partial x}{\partial s_1} = \pm \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{d\eta_1 + \beta_1 d\sigma_1}{d\tau_1} & \dfrac{d\zeta_1 + \gamma_1 d\sigma_1}{d\tau_1} \end{vmatrix}, \beta_1 = \ldots,$$

ou encore

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \pm \frac{ds_1}{d\tau_1} \left[\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \beta_1 \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \gamma_1 \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial u} \end{vmatrix} \right],$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \pm r_1 \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} \pm \frac{r_1}{\rho_1} \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial u} = \pm r_1 \left[\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} \mp \frac{\lambda_1}{\rho_1} \frac{\partial s_1}{\partial u} \right]$$

ou encore

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \pm r_1 \left[\begin{vmatrix} m & n \\ \dfrac{\partial m}{\partial u} & \dfrac{\partial n}{\partial u} \end{vmatrix} \mp \frac{\lambda_1}{\rho_1} \frac{\partial s_1}{\partial u} \right]$$

Et si nous posons

$$\sqrt{r_1} \,.\, l = l_1, \sqrt{r_1} \,.\, m = m_1, \sqrt{r_1} \,.\, n = n_1$$

$$\text{et } \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial u} \cdot \lambda_1 = \lambda_u, \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial u} \cdot \mu_1 = \mu_u, \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial u} \cdot \nu_1 = \nu_u$$

On trouve les trois formules ci-dessous pour les lignes géodésiques.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \pm \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ \dfrac{\partial m_1}{\partial u} & \dfrac{\partial n_1}{\partial u} \end{vmatrix} \pm \lambda_u, \frac{\partial y}{\partial u} = \pm \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ \dfrac{\partial n_1}{\partial u} & \dfrac{\partial l_1}{\partial u} \end{vmatrix} \pm \mu_u$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \pm \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ \dfrac{\partial l_1}{\partial u} & \dfrac{\partial m_1}{\partial u} \end{vmatrix} \pm \nu_u$$

Et d'une façon analogue les trois suivantes

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \pm \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ \frac{\partial m_1}{\partial v} & \frac{\partial n_1}{\partial v} \end{vmatrix} \pm \lambda_v$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \ldots$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \ldots$$

Wünschelrute und Erdstrahlung

Bn. In den Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung für Gesundheitstechnik vom 9. November 1951 behandelte Herr Prof. Dr. F. Michels aus Wiesbaden sehr objektiv und eingehend das Problem der Wünschelrute.

Dem modernen Menschen wird die Wunderkraft der Wünschelrute oder des Pendels durch die Tagespresse dauernd vor Augen geführt. Da findet ein geschickter Rutengänger nur mit Hilfe eines gegabelten Zweiges aus Haselnuß, Weide, Liguster oder gar einem gebogenen Metallstab, den er unter Anspannung in beiden Händen trägt, unterirdische Wasseradern oder Quellen, ein anderer entdeckt wertvolle Metall- und Salzlager, und die ganz Schlauen klären Verbrechen auf oder bestimmen Krankheiten aller Art. Das unscheinbare Holz- oder Metallstück hat die merkwürdige Eigenschaft, die kleinsten Bewegungen der Hand, auch unwillkürliche, in einen Bewegungsvorgang umzuwandeln. Die aus dem Gleichgewicht geratene Wünschelrute bewegt sich nach oben oder unten und führt oft mehrere Umdrehungen aus.

Die Wünschelrute scheint ihre allseitige Wunderkraft schon seit Jahrhunderten zu besitzen, denn schon im Jahre 1704 schrieb Th. Albinus in Dresden: „Mit der Wünschelrute kann man Erzgänge, Quellen, feindliche Minen, versetzte Grenzsteine, vergrabene Schätze, Diebe und Mörder, verlorene Gegenstände, die Zuverlässigkeit des Baugrundes feststellen und überdies angeben, ob ein Planet bewohnt und ein Heiliger echt ist".

Ein so wichtiges und vielseitiges Instrument muß natürlich den Wissenschafter und vor allem den Kulturingenieur und Geologen interessieren. Die Wünschelrute ist, wie dies der Meistergeologe Prof. Dr. A. Heim in Zürich einmal treffend ausgedrückt hat, „der Fühlhebel einer nervösen Körpererregung". Die Ansichten über die Ursachen dieser nervösen Erregungen sowie über die Art, wie sich diese in die Bewegung der Wünschelrute umsetzen, sind grundverschieden. Die Verteidiger der Wünschelrute glauben, daß elektrische Bodenströme, magnetische Kräfte, radioaktive Strahlungen, Schwereunterschiede usw. auf den Organismus einwirken und sich bei hiefür besonders empfindlichen Menschen durch die Bewegung der Rute bemerkbar machen, während die Gegner nur psychische