

Zeitschrift:	Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie
Herausgeber:	Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural
Band:	49 (1951)
Heft:	11
Artikel:	Erweiterung des graphischen Einpassens von Luftaufnahmen auf den Fall eines vorliegenden Widerspruches
Autor:	Krames, Josef
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-208362

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

8,5 cm Querverschiebung bei einem Parallaxwinkel von 10" ergeben

$$\text{eine Distanz } d = \frac{6366 \cdot 8,5}{10} = 5410 \text{ m.}$$

Die Gewichte der 4 Strahlen ergeben sich wie folgt:

Strahl 1, $p^1 = \left(\frac{1}{400}\right)^2 = 6,25$	$e^1 = 0 \text{ cm}$	Abweichungen linear des ausgeglichenen Punktes.
Strahl 2, $p^2 = \left(\frac{1}{3800}\right)^2 = 0,07$	$e^2 = 6,2 \text{ cm}$	
Strahl 3, $p^3 = \left(\frac{1}{600}\right)^2 = 2,80$	$e^3 = 0 \text{ cm}$	
Strahl 4, $p^4 = \left(\frac{1}{5410}\right)^2 = 0,03$	$e^4 = 8,7 \text{ cm}$	

Wie die Ausrechnung zeigt, ist von einem Einfluß der gemessenen Distanzen bei Problem 2 und 3 nichts mehr zu bemerken.

Erweiterung des graphischen Einpassens von Luftaufnahmen auf den Fall eines vorliegenden Widerspruches

Von Josef Krames, Wien

(Mitteilung aus dem Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen in Wien)

(Mit vier Abbildungen im Text)

Nr. 1. Bei dem aus der Theorie der „gefährlichen Raumgebiete“ entwickelten graphischen Verfahren zum gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen¹ hat der Verfasser bisher immer vorausgesetzt, daß die zu Grunde gelegten Parallaxenbeobachtungen „geometrisch möglich“, d.h. allein auf die gegenseitige Lage der beiden Zielstrahlbündel zurückführbar sind. Damit gleichbedeutend ist die Annahme, daß die aus zwei verschiedenen Normalschnitten zur Basis entnommenen Werte $d\omega'$ und

¹ J. Krames, Über ein graphisches Verfahren zum gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen, Österr. Zeitschr. f. Verm. 37 (1949), S. 13–29, sowie J. Krames, Graphische Lösung der Hauptaufgabe beim Normalfall der Luftphotogrammetrie, Anzeiger der Österr. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. 86 (1949), S. 93–99. Siehe ferner J. Krames, Über das Wegschaffen von Restparallaxen mittels graphischer Konstruktionen, diese Zeitschr. 47 (1949), S. 256–262.

$d\omega'$ der Differenzkippung (wenigstens genügend angenähert) übereinstimmen, oder auch, daß die gegebenen Parallaxen im Verein mit den zugehörigen Modellkoordinaten keinen Widerspruch $w = k(d\omega' - d\omega')$ enthalten ($k = \text{konst.} \neq 0$).

Liegt jedoch ein solcher Widerspruch vor, so kann nur die „wahrscheinlichste“ Orientierung der Bündel nach bekannten Regeln der Ausgleichsrechnung, bei einem ebenen Modell etwa mit Hilfe des numerischen Verfahrens von *B. Hallert*², gefunden werden. Auf diesen für die photogrammetrische Praxis besonders wichtigen Fall $w \neq 0$ kann jedoch das genannte graphische Verfahren in seiner bisher beschriebenen Form nicht angewendet werden. Vielmehr ist erforderlich, daß die dabei verwendeten Formeln für die einzelnen Orientierungsunbekannten $d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3, \dots$ derart weitergebildet werden, daß sie I) für $w \neq 0$ die soeben erwähnte „wahrscheinlichste Orientierung“ ergeben, sowie II) für $w = 0$ ($d\omega' = d\omega$) wieder ihre ursprüngliche Gestalt annehmen. Diese beiden Forderungen sind – wie im folgenden gezeigt wird – tatsächlich erfüllbar.

Nr. 2. Wir denken uns mit dem Raummodell wie üblich ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Ursprung im linken Zentrum, x -Achse in der Kernachse, y -Achse nach rückwärts, z -Achse nach oben gerichtet³) verbunden und beobachten in je drei Modellpunkten P_i, P_k mit den Koordinaten $0, y_i, z_i$ bzw. b, y_k, z_k ($b = \text{Modellbasis}$) die y -Parallaxen p_i, p_k zugeordneter Zielstrahlen ($i = 1, 3, 5, k = 2, 4, 6$). Aus diesen Angaben ermitteln wir auf bekanntem graphischem Wege¹ die Grundpunkte G^0, G^b der Ebenen $v^0 (x = 0)$ und $v^b (x = b)$, insbesondere die Koordinaten Y^0, Z^0 bzw. Y^b, Z^b dieser Punkte. Ergibt sich daran anschließend aus jeder dieser beiden Ebenen ein anderer Wert, $d\omega^0 = -p_i : S_i$ bzw. $d\omega^b = -p_k : S_k$ der Differenzkippung¹, derart, daß $\Delta\omega = d\omega^0 - d\omega^b \neq 0$ ist, dann sind die gesuchten Orientierungsgrößen nach folgenden erweiterten Formeln festzulegen:

A) *Unabhängige Bildpaare* ($d\omega_1 - d\omega_2 = d\omega, db_{y1} = db_{y2} = db_{z1} = db_{z2} = 0$):

$$\text{a)} \quad d\omega = \frac{d\omega^0 + d\omega^b}{2} + A\Delta\omega,$$

$$\text{b)} \quad d\varphi_1 = \frac{Y^b}{b} d\omega^b + B_1 \Delta\omega,$$

$$\text{c)} \quad d\varphi_2 = \frac{Y^0}{b} d\omega^0 + B_2 \Delta\omega,$$

² B. Hallert, Über die Herstellung photogrammetrischer Pläne, Dissertation Stockholm 1944, S. 23–35.

³ Vgl. u.a. J. Krames, Über die „gefährlichen Raumgebiete“ der Luftphotogrammetrie, Photograph. Korrespondenz 84 (1948), S. 1–16.

$$d) \quad d\kappa_1 = \frac{Z^b}{b} d\omega^b + C_1 \Delta\omega,$$

$$e) \quad d\kappa_2 = \frac{Z^0}{b} d\omega^0 + C_2 \Delta\omega;$$

B) Folgebildanschluß ($k = 1$ oder $k = 2$):

$$f) \quad d\omega_k = \frac{d\omega^0_k + d\omega^b_k}{2} + D \Delta\omega,$$

$$g) \quad d\varphi_k = \frac{Y^b}{b} d\omega^b_k - \frac{Y^0}{b} d\omega^0_k + E \Delta\omega,$$

$$h) \quad d\kappa_k = \frac{Z^b}{b} d\omega^b_k - \frac{Z^0}{b} d\omega^0_k + F \Delta\omega,$$

$$i) \quad db_{y1} = Z^0 d\omega^0_1 + G_1 \Delta\omega \text{ bzw. } db_{y2} = Z^b d\omega^b_2 + G_2 \Delta\omega,$$

$$k) \quad db_{z1} = -Y^0 d\omega^0_1 + H_1 \Delta\omega \text{ bzw. } db_{z2} = -Y^b d\omega^b_2 + H_2 \Delta\omega.$$

Darin bedeuten A, \dots, H konstante Faktoren, die bloß von der jeweils vorliegenden Modellform abhängen.

Nr. 3. Um diese Formeln abzuleiten und die Faktoren zu berechnen, setzen wir ein allgemeines gebirgisches Gelände voraus und stützen uns auf die bereits bekannten Relationen⁴:

$$y_j Y + z_j Z + p_j z_j \frac{1}{d\omega} = y_j^2 + z_j^2 \quad (j = 1, 3, 5 \text{ oder } 2, 4, 6), \quad (1)$$

in denen Y, Z die Koordinaten des Grundpunktes sind und $d\omega$ die zum Wegschaffen der Parallaxen p_j erforderliche Differenzkipfung angibt. Aus (1) folgt:

$$Y^0 \text{ bzw. } Y^b = \frac{| y_j^2 + z_j^2 \quad z_j \quad p_j z_j |}{| y_j \quad z_j \quad p_j z_j |}, \quad (2)$$

$$Z^0 \text{ bzw. } Z^b = \frac{| y_j \quad y_j^2 + z_j^2 \quad p_j z_j |}{| y_j \quad z_j \quad p_j z_j |} \quad (3)$$

sowie:

$$d\omega^0 \text{ bzw. } d\omega^b = \frac{| y_j \quad z_j \quad p_j z_j |}{| y_j \quad z_j \quad y_j^2 + z_j^2 |}. \quad (4)$$

⁴ Vgl. etwa die erste in Fußn. 1 zitierte Arbeit, Gl. 1, 2 und 5, oder J. Krames, Zur Geometrie der Restparallaxen (erscheint demnächst in einem Sonderheft der Österr. Zeitschr. Verm.).

Die im Zähler bzw. Nenner der Gln. (4) und (2), (3) stehenden Determinanten werden noch zur Vereinfachung $|y_j z_j p_j z_j| = M^0$ oder $= M^b$, $|y_j z_j y^2_j + z^2_j| = N^0$ oder $= N^b$, gesetzt, je nachdem $j = 1, 3, 5$ oder $j = 2, 4, 6$ angenommen ist. In gleicher Weise sollen die in den Gln. (2) und (3) enthaltenen Zähler $|y^2_j + z^2_j z_j p_j z_j|$ mit U^0 oder U^b bzw. $|y_j y^2_j + z^2_j p_j z_j|$ mit V^0 oder V^b bezeichnet werden. Von den so eingeführten neuen Größen enthalten N^0 und N^b nur konstante (aus den Modellkoordinaten abgeleitete) Glieder, während alle übrigen Determinanten homogene lineare Funktionen der Parallaxen p_j darstellen. Weil ferner nach dem Einsetzen der Ausdrücke (2), (3) und (4) in die Formeln b), c), d), e), g), h), i), k), also z.B. in

$$h) \quad d\kappa_2 = \frac{Y^b}{b M^b} \frac{M^b}{N^b} - \frac{Y^0}{b M^0} \frac{M^0}{N^0} + F \frac{M^0 N^b - M^b N^0}{N^0 N^b},$$

die im Nenner stehenden Determinanten M^0 und (oder) M^b durch Kürzen wegfallen, sind alle Orientierungsunbekannten gemäß a), ... k) als *lineare homogene Funktionen der sechs beobachteten Parallaxen p_j* gegeben. Gleches trifft bekanntlich auch zu, wenn diese Unbekannten aus den „vermittelnden Beobachtungen“ p_j mit Hilfe von Normalgleichungen berechnet werden⁵. Um beide Darstellungen zur Übereinstimmung zu bringen (Nr. 1, Forderung I), beachten wir: a) daß $\Delta\omega$ selbst wegen Gl. (4) eine lineare homogene Funktion der p_j ist, sowie b) daß für $\Delta\omega = 0$ jede der Formeln a), ... k) ihre bereits bekannte Gestalt beim exakten graphischen Verfahren¹ annehmen muß (Nr. 1, Forderung II). Wir haben daher nur noch die Faktoren $A, \dots H$ derart auszuwählen, daß der mittlere Fehler jeder Orientierungsgröße da zu einem Minimum wird. Zu diesem Zweck schreiben wir jetzt die Formeln a), ... k) in der allgemeinen Form

$$da = \Sigma (s_j + K t_j) p_j, \quad (5)$$

in der s_j, t_j konstante Glieder bedeuten, während K den betreffenden Faktor angibt und die Summe Σ über 1, 2, ... 6 zu erstrecken ist. Danach beträgt der Gewichtskehrwert⁶ von da :

$$Q_{aa} = \sum \left(\frac{\partial da}{\partial p_j} \right)^2 = \Sigma (s_j + K t_j)^2 = \Sigma (s_j^2 + 2 s_j t_j K + t_j^2 K^2). \quad (6)$$

Um sein Minimum zu erhalten, setzen wir

$$\frac{\partial Q_{aa}}{\partial K} = 2 \Sigma s_j t_j + 2 \Sigma t_j^2 K = 0$$

⁵ Siehe etwa F. Hartner-E. Dolezal, Hand- und Lehrbuch der Niederen Geodäsie, § 5.

und beachten, daß (für durchwegs reelle Modellpunkte) stets gilt:

$$\frac{\partial^2 Q_{aa}}{\partial K^2} = 2 \sum t_j^2 > 0.$$

Somit ist

$$K = - \sum s_j t_j : \sum t_j^2; \quad (7)$$

jener eindeutig bestimmte Wert des Faktors K , für den auch der mittlere Fehler m_a von da am kleinsten wird, d.h. für den die Formel (5) denselben Wert von da bestimmt wie die Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zusammenfassend kann daher gesagt werden:

Die in den erweiterten Formeln a), ... k) vorgesehenen Faktoren $A, \dots H$ sind für jede beliebige Geländeform eindeutig bestimmt.

Durch Einsetzen des gefundenen Wertes (7) in (6) ergibt sich schließlich auch der mittlere Fehler von da gemäß

$$m_a = \pm \mu \sqrt{Q_{aa}},$$

und zwar ohne Auflösung von Normalgleichungen⁵.

Diese Ausführungen beleuchten zugleich den stetigen Übergang vom exakten graphischen Verfahren für $\Delta\omega = 0$ zu seiner hier erstmalig angegebenen Erweiterung auf den Fall $\Delta\omega \neq 0$ und auf beliebige Geländeformen. Für diese Ergebnisse war die genaue Kenntnis des Falles rein geometrischer Parallaxen ($\Delta\omega = 0$) eine notwendige Voraussetzung.

Nr. 4. Für ein ebenes Geländemodell ($z = -h$), in dem als Orientierungspunkte

$$\left. \begin{array}{lll} \mathbf{4}: b, a, -h; & \mathbf{2}: b, 0, -h; & \mathbf{6}: b, -a, -h; \\ \mathbf{3}: 0, a, -h; & \mathbf{1}: 0, 0, -h; & \mathbf{5}: 0, -a, -h \end{array} \right\} \quad (8)$$

angenommen sind, ergeben sich nach obigem Verfahren insbesondere folgende Faktorenwerte:

A) Unabhängige Bildpaare:

$$A = B_1 = B_2 = 0,$$

$$-C_1 = C_2 = \frac{2 a^2 + 3 h^2}{6 h b},$$

B) Folgebildanschluß (Linker Projektor fest):

$$D = E = H_2 = 0,$$

$$F = -\frac{2a^2 + 3h^2}{3bh}, \quad G_2 = -\frac{2a^2 + 3h^2}{6h},$$

wonach obige Formeln a) bis k) einfach lauten:

$$\mathbf{A}) \quad a') \quad d\omega = \frac{d\omega^0 + d\omega^b}{2},$$

$$b') \quad d\varphi_1 = \frac{Y^b}{b} d\omega^b,$$

$$c') \quad d\varphi_2 = \frac{Y^0}{b} d\omega^0,$$

$$d') \quad d\kappa_1 = \frac{Z^b}{b} d\omega^b - \frac{2a^2 + 3h^2}{6hb} \Delta\omega,$$

$$e') \quad d\kappa_2 = \frac{Z^0}{b} d\omega^0 + \frac{2a^2 + 3h^2}{6hb} \Delta\omega,$$

$$\mathbf{B}) \quad f') \quad d\omega_2 = \frac{d\omega^0_2 + d\omega^b_2}{2},$$

$$g') \quad d\varphi_2 = \frac{Y^b}{b} d\omega^b_2 - \frac{Y^0}{b} d\omega^0_2,$$

$$h') \quad d\kappa_2 = \frac{Z^b}{b} d\omega^b_2 - \frac{Z^0}{b} d\omega^0_2 - \frac{2a^2 + 3h^2}{3bh} \Delta\omega,$$

$$i') \quad db_{y2} = Z^b d\omega^b_2 - \frac{2a^2 + 3h^2}{6h} \Delta\omega,$$

$$k') \quad db_{z2} = -Y^b d\omega^b_2.$$

Davon sind die Formeln a') und f') naheliegend, sie wurden vom Verfasser bereits 1949 bei praktischen Versuchen mit seinem graphischen

Verfahren verwendet. Die Formeln g') und $k')$ hat erstmalig *H. Schmid*⁶ im Hinblick auf ihre fehlertheoretischen Auswirkungen eingeführt, womit zugleich den Erfahrungen entsprochen wurde, die der Verfasser bei seinen im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen ausgeführten Versuchen gesammelt hatte. Daran anschließend legte der Verfasser diesen Formeln den Gedanken zu Grunde, die Koordinaten Y^0, Z^0 bzw. Y^b, Z^b der Grundpunkte G^0, G^b jeweils nur mit jenem Wert $d\omega^0$ bzw. $d\omega^b$ der Differenzkippung zu multiplizieren, der aus derselben Ebene ν^0 bzw. ν^b abgeleitet ist. Diese Maßnahme erschien zunächst damit gerechtfertigt, daß sodann neben $w \neq 0$ ($d\omega^0 \neq d\omega^b$) keine weiteren Widersprüche in den Gang der Operationen eingeführt werden. Überdies konnten darnach auch die Formeln $b')$ und $c')$ angegeben werden.

Alsbald zeigte sich jedoch, daß der erwähnte Grundgedanke für die Kantungswinkel und die b_y -Schiebung keineswegs ausgereicht hätte, um den wahrscheinlichsten Wert dieser Größen auch nur annähernd herauszufinden (Nr. 1, Forderung I). Die Überbrückung dieser Schwierigkeit gelang nur schrittweise. Zuerst versuchte der Verfasser die Korrekturformel

$$d\kappa_2 = \frac{Z^b - Z^0}{b} \cdot \frac{(p_1 - p_2) d\omega_2^0 \cdot d\omega_2^b}{p_1 \cdot d\omega_2^b - p_2 \cdot d\omega_2^0}, \quad (9)$$

mit der zwar die Forderung II (Nr. 1) erfüllt werden konnte, die aber (bei einem ebenen Modell) gegenüber der Methode der kleinsten Quadrate einen $\sqrt{3}$ fachen mittleren Fehler von $d\kappa_2$ ergab. Der Verfasser setzte daher seine Bemühungen fort, eine restlos befriedigende Lösung der gestellten Aufgabe ausfindig zu machen und gelangte schließlich zu obigen einfachen Formeln $a), \dots k)$, mit denen – *sogleich für jede beliebige Geländeform – stets die gesuchte „wahrscheinlichste“ Lösung der Orientierungsaufgabe gewonnen wird*. Setzt man insbesondere in $a'), \dots k')$ die gemäß (8) bestimmten Größen (2), (3) und (4) ein, so ergeben sich tatsächlich genau die von *B. Hallert*, a. a. O., S. 24, 32, aufgestellten Gleichungen.

(Schluß folgt)

Magnetische Deklination

Sommer 1951

Mittlere Tagesamplitude = 22' (cent.)

Minimum = — 11' um 8 Uhr

Maximum = + 11' um 14 Uhr

⁶ H. Schmid, Fehlertheoretische Untersuchungen der neueren Verfahren zur gegenseitigen Orientierung von Luftbildern (erscheint demnächst in einem Sonderheft der Österr. Zeitschr. f. Verm.). – Es verdient vermerkt zu werden, daß der Verfasser zur vorliegenden Arbeit u. a. durch die beiden von H. Schmid für ebenes Gelände angegebenen Formeln angeregt wurde.