Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 49 (1951)

Heft: 10

Artikel: Die Transformation ebener Koordinaten zwischen der Bonne- und der Zylinderprojektion der Schweiz

Autor: Bolliger, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-208360

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ferner zeigt ein Blick auf die Kurven gleicher Schwereabweichungen, daß diese auffallend nahe beieinander verlaufen. Ihr Verhalten weist ebenfalls auf Besonderheiten der Massenverteilung in der Erdrinde hin.

Endlich bleibt noch auf die magnetischen Störungen hinzuweisen. Die von W. Brückmann für Mitte 1931 gezeichneten Linien gleicher magnetischer Horizontalintensität und gleicher magnetischer Vertikalintensität rücken ganz ungewöhnlich nahe zusammen. Sowohl die Horizontal- als auch die Vertikalintensität ändern sich hier von Ort zu Ort viel stärker als in der übrigen Schweiz.

Die Transformation ebener Koordinaten zwischen der Bonne- und der Zylinderprojektion der Schweiz

Von J. Bolliger

Mit dem Beginn der neuen Landestriangulation der Schweiz im Jahr 1910 begann die Verdrängung der bis dahin gültigen ebenen Koordinaten in der flächentreuen Bonne-Projektion durch die ebenen Zylinderkoordinaten der von M. Rosenmund im Jahr 1903 vorgeschlagenen Doppelprojektion ([1]). Für den Übergang vom alten zum neuen Projektionssystem wurden im Jahr 1916 auf Grund von in beiden Systemen berechneten identischen Punkten von der Eidgenössischen Landestopographie Karten im Maßstab 1:250000 mit Linien gleicher Koordinatendifferenzen konstruiert. Aus diesen können für einen beliebigen Punkt die Umformungswerte für Plan- und Kartengenauigkeit interpoliert werden, aber nicht in der Schärfe, wie es für geodätische Zwecke nötig ist.

Da es heute noch vorkommt und auch später wieder vorkommen wird, daß für Punkte in der Bonne-Projektion die neuen Zylinderkoordinaten zu bestimmen sind, sollen im folgenden Formeln abgeleitet werden, welche die Transformation in der Rechenschärfe erlauben, die den Zylinderprojektionsformeln entspricht.

Die vom Jahr 1885 an entstandenen kantonalen und eidgenössischen Triangulationen sind an das schweizerische Gradmessungsdreiecksnetz angeschlossen, dem das Besselellipsoid zugrunde liegt und dieselbe geographische Breite für das Projektionszentrum Bern, wie für die in der Zylinderprojektion festgelegten neuen Landes- und Grundbuchtriangulationen. Nur für solche Bonnepunkte gelten die folgenden Rechenformeln in aller Schärfe, da die auf die Eschmannsche Triangulation für die Dufour- und Siegfriedkarte sich stützenden Bonnekoordinaten sich auf die ältere Berner Breite und das Schmidtsche Ellipsoid beziehen.

Um zu den Transformationsgleichungen zu gelangen, zerlegen wir die vom Ellipsoid direkt auf die Ebene abbildende Bonne-Projektion der Schweiz in eine Doppelprojektion. Eine erste Übertragung findet in der winkeltreuen Gauß-Projektion vom Ellipsoid auf eine Projektionskugel statt, genau gleich wie bei der neuen winkeltreuen Zylinderprojektion

unseres Landes. Nötigenfalls können dafür die von Rosenmund gegebenen Formeln und Tafeln ([1]) verwendet werden. Die zweite Übertragung erfolgt nach den Gesetzen der Bonne-Projektion von dieser Kugel in die Ebene.

In der Kugelprojektion ist der durch das Projektionszentrum gehende Mittelbreitenkreis längentreu abgebildet. Da seine Bonneübertragung in die Ebene als Kreisbogen mit dem gleichen Projektionsradius stattfindet wie bei der direkten Bonne-Projektion vom Ellipsoid auf die Ebene, wie noch gezeigt werden soll, so erhalten wir auf beide Arten dasselbe ebene Bild dieses Kreises. Für beide Arten der Bonne-Projektion wird der Mittelmeridian als Gerade längentreu abgebildet. Gehen wir von der Kugel aus, so haben wir die Längenverzerrung der Kugelprojektion für dieses Bild in Kauf zu nehmen. Sie beträgt für den Meridianbogen zwischen dem Projektionszentrum und dem nördlichsten Breitenkreis unseres Landes nur —0,3 mm und für den Meridianbogen bis zum südlichsten Breitenkreis nur +0,5 mm, was vernachlässigt werden kann.

Mittelmeridian- und Mittelbreitenkreisbild sind die Ausgangselemente für die ebenen Bonnekoordinaten. Da für beide Projektionen diese Elemente das gleiche Bild ergeben, können für einen beliebigen Punkt nur Koordinatenunterschiede zwischen den beiden Bonne-Projektionen entstehen, welche in der Größenordnung der Verzerrung der Kugelprojektion entsprechen. Aus den Verzerrungsgesetzen der Gauß-Projektion finden wir die folgenden Formeln ([3]) zum Bestimmen solcher

Koordinatenfehler der von der Kugel ausgehenden Bonne-Projektion

Δ' in mm für X, Y in km		Höchstwerte in Chiasso
$\Delta' Y = -8{,}6 \cdot 10^{-9} \cdot \lvert Y \rvert \cdot X^3$	(1)	$\Delta' Y = +2{,}1$ mm
$\Delta' X = -2{,}1 \cdot 10^{-9} \cdot \lvert X \rvert \cdot X^3$	(2)	$\Delta' X = +0{,}5$ mm

Zunächst sind nun die auf die Projektionskugel bezogenen Bonne-Projektionsgleichungen abzuleiten. Wir gehen von der folgenden Fig. 1 aus, mit den Bezeichnungen:

l, b = Länge und Breite eines beliebigen Punktes P des Ellipsoids im Projektionswert auf der Kugel, wobei l auf den Mittelmeridian l_0 durch das Projektionszentrum O bezogen ist und nach Osten positiv gezählt werden soll.

ψ = $b - b_0$ ist die Breitendifferenz des Punktes P auf der Kugel gegenüber der Kugelbreite b_0 des Projektionszentrums.

R = $\sqrt{M_0 N_0}$ ist der Radius der Projektionskugel der Schweiz und entspricht dem mittleren Krümmungsradius im Projektionszentrum auf dem Ellipsoid. Für die Ableitungen setzen wir zunächst $R = 1$.

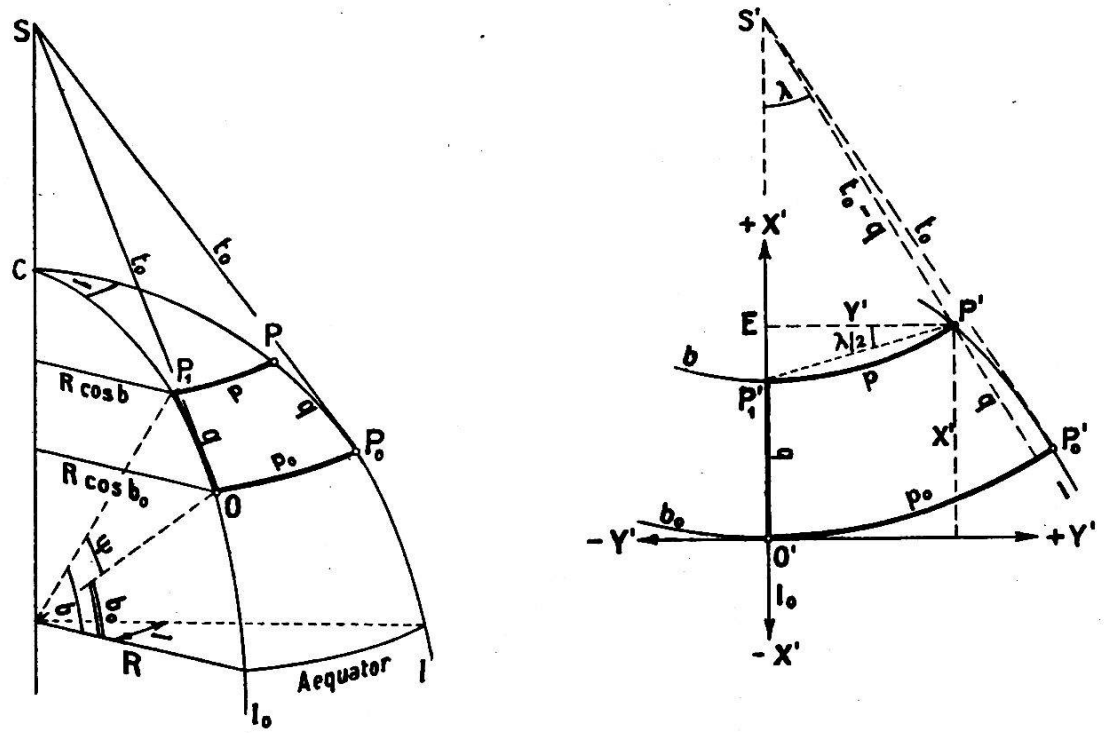
$X', Y' =$ Ebene Koordinaten des Punktes P in der Bonne-Projektion.

$X,\ Y =$ Ebene Koordinaten des Punktes P in der Zylinderprojektion.

Unter Berücksichtigung der folgenden Bedingungen der Bonne-Projektion

1. Der Mittelmeridian l_0 des Projektionszentrums O wird auf die Kegelmantellinie OS längentreu übertragen und gelangt auf der Geraden $O'S'$, der X-Achse unserer Projektionsebene, unverzerrt zur Abbildung;
2. die Breitenkreise sind als Kreisbogen mit dem Zentrum in S' längentreu abzubilden;

findet man nach Fig. 1



Kugelbild Projiziertes Bild

Fig. 1. Bonne-Projektion

Projektionsradius für den Breitenkreis b_0: $\quad t_0 = R \operatorname{ctg} b_0 = \operatorname{ctg} b_0$

Projektionsradius für den Breitenkreis b: $t_0 - q = \operatorname{ctg} b_0 - \psi$

$$= \operatorname{ctg} b_0 (1 - \psi \operatorname{tg} b_0)$$

$$p = l \cos b \qquad q = R\psi = \psi$$

$$\lambda = \frac{p}{t_0 - q} = l \operatorname{tg} b_0 \cos b \frac{1}{1 - \psi \operatorname{tg} b_0} \tag{3}$$

Für die Koordinaten des Punkts P findet man nun:

$$Y' = (t_0 - q) \sin \lambda \quad = \quad \operatorname{ctg} b_0 \, (1 - \psi \operatorname{tg} b_0) \sin \lambda \tag{4}$$

$$X' = q + Y' \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \quad = \quad \psi + Y' \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \tag{5}$$

Die oben gemachte Aussage, daß unser Projektionsradius t_0 der Übertragung von der Kugel dem Projektionsradius T_0 bei der direkten Übertragung vom Ellipsoid entspricht, können wir nun wie folgt beweisen. Wir verwenden dabei die auf dem Ellipsoid üblichen Bezeichnungen M, N, V, für das Projektionszentrum mit dem Index $_0$, und c, sowie die bekannten Beziehungen unter diesen Größen.

$$t_0 \quad = R \operatorname{ctg} b_0 = \sqrt{M_0 N_0} \operatorname{ctg} b_0 \quad = \frac{c}{V_0^2} \operatorname{ctg} b_0$$

$$T_0 = N_0 \operatorname{ctg} B_0$$

ist der Bonne-Projektionsradius für den Breitenkreis B_0 auf dem Ellipsoid.

Aus den Bedingungen für die Gauß-Projektion findet man

$$\operatorname{ctg} b_0 = V_0 \operatorname{ctg} B_0$$

und weil $\frac{c}{V_0} = N_0$ ist, so gibt das, wie zu beweisen war:

$$t_0 = \frac{c}{V_0^2} \operatorname{ctg} b_0 = N_0 \operatorname{ctg} B_0 = T_0$$

Die beiden Koordinatengleichungen (4) und (5) sind jetzt in Reihen zu entwickeln, wobei zur Vereinfachung der Schreibweise die folgenden Kürzungen verwendet werden:

$$s = \sin b_0, \quad c = \cos b_0, \quad t = \operatorname{tg} b_0$$

Mit Anwendung der Binomialreihe gibt Gleichung (3)

$$\lambda = l \, t \cos b \, [1 + \psi t + \psi^2 t^2 + \psi^3 t^3 + \psi^4 t^4 + \ldots]$$

Dann gibt die Taylorreihe für $\cos b = \cos (b_0 + \psi)$

$$\cos b = c - \psi s - \frac{\psi^2}{2} c + \frac{\psi^3}{6} s + \frac{\psi^4}{24} c - \ldots$$

Diese Reihe setzen wir für $\cos b$ in die Reihe für λ ein und erhalten mit Gliedern bis mit der 5. Ordnung

$$\lambda = l s \left[1 - \frac{\psi^2}{2} - \frac{\psi^3}{3} t + \frac{\psi^4}{24} (1 - 8 t^2) \right] \tag{6}$$

Zum Bestimmen von Y' nach Gleichung (4) benötigen wir aber $\sin\lambda$, das wir mit Anwendung der Sinusreihe auf Gleichung (6) bekommen zu

$$\sin\lambda = ls\left[1 - \frac{\psi^2}{2} - \frac{l^2}{6}s^2 - \frac{\psi^3}{3}t + \frac{l^2\psi^2}{4}s^2 + \frac{\psi^4}{24}(1+8t^2) + \frac{l^4}{120}s^4\right]$$

Diese Reihe setzen wir für $\sin\lambda$ in Gleichung (4) ein und finden nach dem Ausmultiplizieren:

$$Y' = lc - l\psi s - \frac{l\psi^2}{2}c - \frac{l^3}{6}s^2c + \frac{l\psi^3}{6}s + \frac{l^3\psi}{6}s^3 + \frac{l^3\psi^2}{4}s^2c + \frac{l\psi^4}{24}c + \frac{l^5}{124}s^4c \tag{7}$$

Zur Reihenentwicklung der Gleichung (5) für X' bilden wir aus Gleichung (6) $\frac{\lambda}{2}$ und finden daraus mit der Tangensreihe

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} = \frac{l}{2}s\left[1 - \frac{\psi^2}{2} + \frac{l^2}{12}s^2 - \frac{\psi^3}{3}t - \ldots\right]$$

Setzen wir diese Reihe in Gleichung (5) ein, so bekommen wir die Koordinatengleichung

$$X' = \psi + \frac{l^2}{2}sc - \frac{l^2\psi}{2}s^2 - \frac{l^2\psi^2}{2}sc - \frac{l^4}{24}s^3c + \frac{l^2\psi^3}{6}s^2 + \frac{l^4\psi}{24}s^4 \tag{8}$$

Die entsprechenden Formeln unserer Zylinderprojektion, auf dieselbe Art geschrieben wie die vorstehenden Bonne-Reihenformeln, lauten

$$Y = lc - l\psi s - \frac{l^3}{6}s^2c - \frac{l\psi^3}{3}s + \frac{l^3\psi}{6}s - \frac{l^3\psi^2}{2}s^2c + \frac{l^5}{120}s^2c\,(1 + 6c^2) \tag{9}$$

$$X = \psi + \frac{l^2}{2}sc - \frac{l^2\psi}{2}s^2 + \frac{\psi^3}{6} + \frac{l^2\psi^2}{4}sc - \frac{l^4}{24}sc - 5\frac{l^2\psi^3}{12}s^2 + \frac{\psi^5}{24} + \frac{l^4\psi}{24}s^2\,(1 + 6c^2) \tag{10}$$

Subtrahieren wir von der Gleichung (9) die Gleichung (7), so fallen die Glieder 1. und 2. Ordnung fort und es bleibt

$$\Delta Y = Y - Y' = \frac{l\psi^2}{2} c - \frac{l\psi^3}{2} s + \frac{l^3\psi}{6} s c^2 - 3 \frac{l^3 \psi^2}{4} s^2 c - \frac{l\psi^4}{24} c + 7 \frac{l^5}{120} s^2 c^3 \tag{11}$$

Analog erhalten wir durch Subtrahieren der Gleichung (8) von (10)

$$\Delta X = X - X' = \frac{\psi^3}{6} + 3 \frac{l^2 \psi^2}{4} s c - \frac{l^4}{24} s c^3 - 7 \frac{l^2 \psi^3}{12} s^2 + 7 \frac{l^4 \psi}{24} s^2 c^2 + \frac{\psi^5}{24} \tag{12}$$

Mit diesen Gleichungen (11) und (12) sind die Grundformeln zur Koordinatentransformation gegeben. Für das praktische Rechnen sind in diesen Reihen die Kugelkoordinaten unbequem, und wir wollen sie ersetzen durch $\psi = f(Y, X)$ und $l = f(Y, X)$ (3) nach den bekannten Gleichungen für die Zylinderprojektion in der Form:

$$\psi = X - \frac{Y^2}{2} t - \frac{X^3}{6} - \frac{Y^2 X}{2} t^2 + \ldots$$

$$l = \frac{Y}{c} + Y X \frac{t}{c} + Y X^2 \frac{t^2}{c} - Y^3 \frac{t^2}{3c} + \ldots$$

Gleichzeitig führen wir den Kugelradius R, für den wir in den Ableitungen $R = 1$ gesetzt haben, in die Gleichungen ein und erhalten zum Schluß der Ableitungen die folgenden

Transformationsformeln

$$\Delta Y = Y - Y' = \frac{Y X^2}{2 R^2} - Y^3 X \frac{t}{3 R^3} - Y^3 X^2 \frac{2 t^2}{3 R^4} - Y X^4 \frac{5}{24 R^4} + Y^5 \frac{t^2}{10 R^4} \tag{13}$$

$$\Delta X = X - X' = \frac{X^3}{6 R^2} + Y^2 X^2 \frac{t}{2 R^3} - Y^4 \frac{t}{24 R^3} + Y^2 X^3 \frac{2 t^2}{3 R^4} - Y^4 X \frac{t^2}{2 R^4} - \frac{X^5}{24 R^4} \tag{14}$$

Zum numerischen Rechnen sind in diese Formeln noch die Zahlenwerte der Konstanten einzuführen. Für das logarithmische Rechnen geben wir deren Logarithmen an, welche durch eckige Klammern bezeichnet sind. Will man zur genauen Bestimmung des Transformationsbetrags auf den Zentimeter die einzelnen Glieder auf Millimeter berechnen, so ist die Kugelverzerrung in die Rechnung einzubeziehen. Für diesen Fall sind die folgenden Rechnungsformeln für ΔY um dieses Korrekturglied erweitert.

Formeln für die Koordinatentransformation zwischen der Zylinderprojektion (Y, X) und der Bonne-Projektion (Y', X')

$\Delta Y = Y - Y'$ und $\Delta X = X - X'$ in Metern für Y, X in Kilometern

$$\begin{aligned}\Delta Y = {} & [5{,}08949_{-10}]\, Y X^2 - [1{,}13760_{-10}]\, Y^3 X - [7{,}6628_{-20}]\, Y^3 X^2 \\ & + [6{,}8389_{-20}]\, Y^5 - [8{,}9343_{-20}]\, X^3 \cdot |Y| \mp [7{,}0998_{-20}]\, Y X^4\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\Delta Y = {} & 1{,}2288 \cdot 10^{-5} \cdot Y X^2 - 1{,}373 \cdot 10^{-9} \cdot Y^3 X - 4{,}60 \cdot 10^{-13} \cdot Y^3 X^2 \\ & + 6{,}90 \cdot 10^{-14} \cdot Y^5 - 8{,}60 \cdot 10^{-12} \cdot X^3 \cdot |Y| \mp 1{,}26 \cdot 10^{-13} \cdot Y X^4\end{aligned} \tag{15'}$$

$$\begin{aligned}\Delta X = {} & [4{,}61237_{-10}]\, X^3 + [1{,}31369_{-10}]\, Y^2 X^2 - [0{,}23451_{-10}]\, Y^4 \\ & + [7{,}6628_{-20}]\, Y^2 X^3 - [7{,}5379_{-20}]\, Y^4 X \mp [6{,}4008_{-20}]\, X^5\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\Delta X = {} & 4{,}0961 \cdot 10^{-6} \cdot X^3 + 2{,}059 \cdot 10^{-9} \cdot Y^2 X^2 - 1{,}716 \cdot 10^{-10} \cdot Y^4 \\ & + 4{,}60 \cdot 10^{-13} \cdot Y^2 X^3 - 3{,}45 \cdot 10^{-13} \cdot Y^4 X \mp 2{,}52 \cdot 10^{-14} \cdot X^5\end{aligned} \tag{16'}$$

Das untere Vorzeichen bei dem letzten Glied dieser Formeln ist dann zu verwenden, wenn die Rechnung mit Bonnekoordinaten Y', X' durchgeführt wird.

Bei der Umwandlung von Bonnekoordinaten muß beachtet werden, daß die an das Gradmessungsdreiecksnetz angeschlossenen kantonalen Triangulationen auf zwei verschiedene Arten winkeltreu berechnet wurden ([2]), wodurch letzten Endes 19 verschiedene kantonale Dreiecksnetze entstunden ([1]). Beim Übergang vom einen Netz zum andern waren daher trotz der einheitlichen Einspannung in das Bonnegrundnetz Umrechnungen nötig. Die obigen Formeln können nur für reine Bonnepunkte scharfe Ergebnisse geben und versagen gegenüber derart winkeltreu eingeschalteten Netzpunkten für geodätisch scharfe Bestimmungen. Wohl aber dienen sie auch dann für Plan- und Kartengenauigkeit, wobei die Rechnung mit Gliedern 3. Ordnung in vielen Fällen genügt.

Mit mindestens Metergenauigkeit kann die Transformation mit der beiliegenden Karte „Koordinatenunterschiede zwischen Zylinder- und

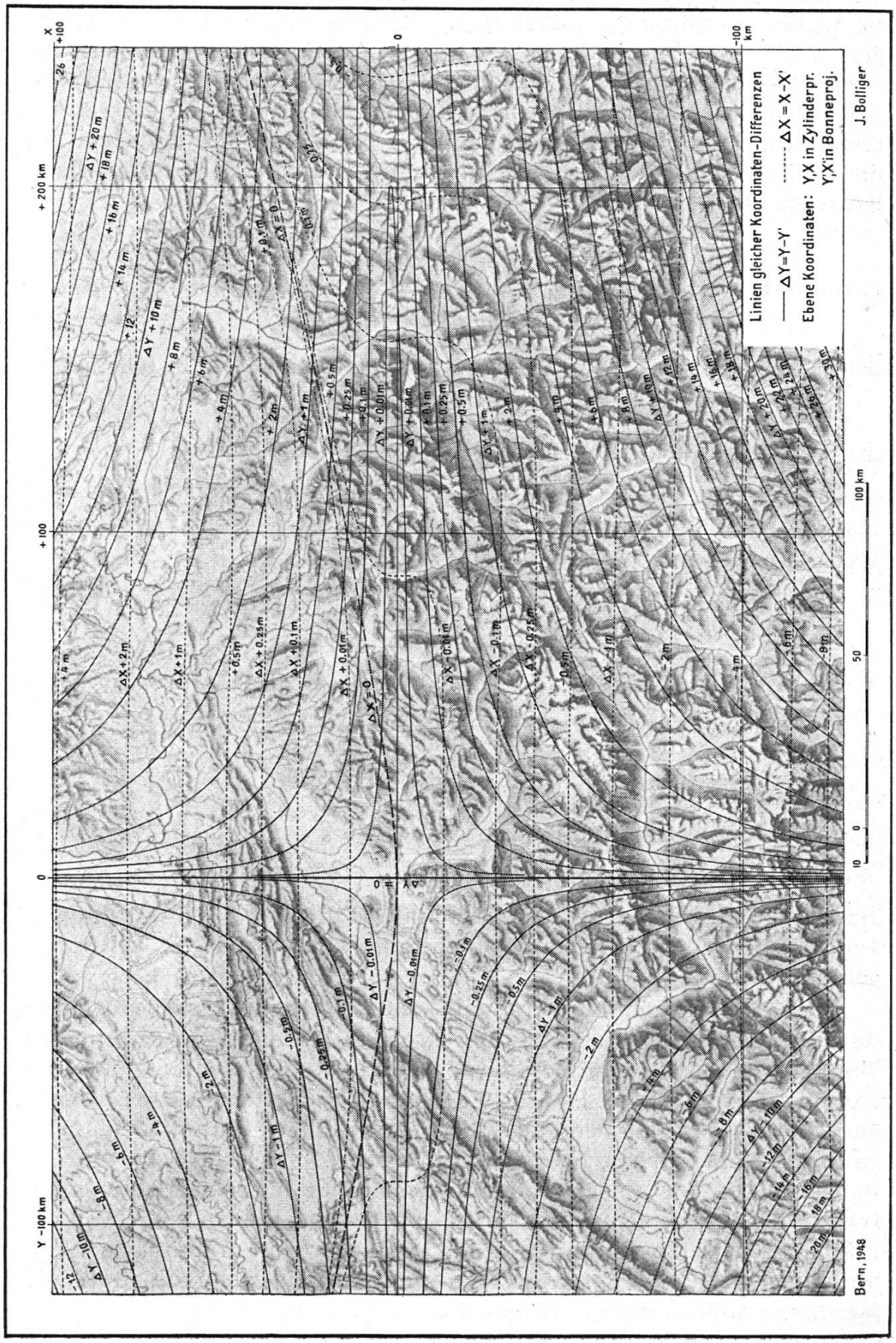


Fig. 2. Koordinatenunterschiede zwischen Zylinder- und Bonneprojektion

Bonne-Projektion" der Fig. 2 vorgenommen werden, wofür die Punkte koordinatenmäßig in das gezeichnete km-Netz einzutragen sind. Die Kurven gleicher ΔY, als ganze Linien gezeichnet, und ΔX, als gestrichelte Linien erkennbar, sind nach den vorstehenden Gleichungen konstruiert.

Beide Kurvenscharen liegen zur X-Achse symmetrisch, welche zugleich die Linie für $\Delta Y = 0$ ist. Die Linie $\Delta X = O$ erhebt sich vom Nullpunkt aus beidseitig parabelförmig über die Y-Achse. Interessant ist der Übergang der negativen ΔX-Linien über die Y-Achse, wie er für $\Delta X = -0{,}01$ m bis $\Delta X = -0{,}5$ m zur Abbildung gelangt. Der absolute Wert der Zylinderkoordinaten ist stets größer als derjenige der Bonnekoordinaten bis auf die Fläche, welche zwischen der Y-Achse und der Nullinie für ΔX liegt, wo das Umgekehrte eintritt.

Literaturhinweise

(1) M. Rosenmund, die Änderung des Projektionssystems der schweizerischen Landesvermessung, Eidgenössische Landestopographie, Bern 1903.

(2) M. Rosenmund, Anleitung für die Ausführung der geodätischen Arbeiten der schweizerischen Landesvermessung, Eidgenössisches topographisches Büro, Bern 1898.

(3) Für die Ableitung dieser Gleichungen sei auf die Publikation „die Projektionen der schweizerischen Plan- und Kartenwerke" hingewiesen, deren Veröffentlichung im Jahr 1952 im Verlag von P. Haupt, Bern, vorgesehen ist.

Kleine Mitteilungen

Tod von Prof. J. M. Tienstra, Delft. Am 15. September 1951 ist der Professor für Vermessungskunde und Geodäsie an der Technischen Hochschule Delft, J. M. Tienstra, im Alter von 57 Jahren nach langem Krankenlager gestorben. Der Verstorbene war durch seine wissenschaftlichen Arbeiten in den internationalen Geodätenkreisen sehr bekannt und hoch geschätzt. Im Jahre 1946 hat er an der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich im Kreise der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie und der Sektion Zürich-Schaffhausen des SVVK zwei interessante Vorträge gehalten. Er amtete von 1946 bis zu seinem Tode als Sekretär der Sektion für Triangulation der Internationalen Assoziation für Geodäsie. Alle, die Prof. Tienstra persönlich nähergetreten sind, werden dem sympatischen Menschen ein dankbares Andenken bewahren.

Tagung der Bodenseekonferenz 1951 in München. Am 18. und 19. September fand im Senatssaal der Technischen Hochschule München bei gutem Besuch, auch aus der Schweiz, eine Tagung der Bodenseekonferenz statt. Im wissenschaftlichen Teil wurden Fragen der Triangulation und des Präzisionsnivellements in der Umgebung des Bodensees behandelt, als Grundlage zur Feststellung von tektonischen Bodenverschiebungen in der Umgebung des Sees. Ferner wurde die Frage der Aufnahme des See-