Quelques considérations didactiques sur les problèmes de compensation

Par A. Ansermet

Le but de ces lignes n'est pas de développer des résultats bien nouveaux mais de mettre en évidence, surtout au point de vue didactique, certains aspects de problèmes usuels de compensation.

Traitons tout d'abord un cas concret: la mesure des angles par la méthode bien connue des secteurs (voir [1]). Examinons plus spécialement les résultats obtenus pour la Station Piz Michel ([1] p. 80). Il y avait douze directions dont quatre principales et 20 angles mesurés (11 angles indépendants, 9 surabondants ou 4 secteurs et 16 angles intermédiaires). Désignons par p_i les poids primitifs des angles et P_i les poids nouveaux (après compensation), i = 1, 2, 3....n (n = 20) et u = 11 (11 inconnues)

i =	p_i	P_i	$\frac{p_i}{P_i} = \frac{1}{K_i}$	i =	p_i	P_i	$\frac{p_i}{P_i} = \frac{1}{K_i}$
							5.51
1	6	15,0	0.40	11	8	13,8	0.58
2	8	13,0	0.62	12	4	8,5	0.47
3	4	12,6	0.32	13	7	10,0	0.70
4	8	14,2	0.56	14	5	8,6	0.58
5	11	16,2	0.68	15	5	8,6	0.58
6	12	17,0	0.71	16	6	15,2	0.39
7	3	5,4	0.56	17	4	9,5	0.42
8	3	5,4	0.56	18	4	6,6	0.61
9	2	5,0	0.40	19	4	6,6	0.61
10	4	5,7	0.70	20	5	8,9	0.56
			5.51	$\left[\frac{1}{K_i}\right] = \left[\frac{p_i}{P_i}\right]_{i=1}^{i=n} = u$			11.01 = u

où u est le nombre d'inconnues (u = 11); c'est un extrêmum (voir [5]).

La valeur moyenne $\left(\frac{1}{K}\right)_m = 0.55 = \frac{u}{n}$. $0.32 < {}^1/K < 0.71$

Ce calcul constitue un contrôle rapide et précieux. Le problème se pose d'étudier la loi de variation du *coefficient d'amplification* K ou de son inverse ${}^1/K$. Si les inconnues sont les coordonnées d'un point cette loi est mathématique (ellipse d'erreur).

Ce critérium permet de vérifier que la méthode des secteurs est bien correcte sans faire une compensation complète.

Considérons le cas simple de 3 secteurs de 120° et 6 angles intermédiaires de 60° puis admettons $p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_n = 1$ (n = 9)

$$\text{secteur } l_7 + v_7 = (l_1 + v_1) + (l_2 + v_2) \qquad v_1 = v_2$$
$$\text{secteur } l_8 + v_8 = (l_3 + v_3) + (l_4 + v_4) \qquad v_3 = v_4$$
$$\text{secteur } l_9 + v_9 = (l_5 + v_5) + (l_6 + v_6) \qquad v_5 = v_6$$

$$v_7 = v_8 = v_9$$

$$(l_7 + v_7) + (l_8 + v_8) + (l_9 + v_9) = 360^0$$

$$l_7 + v_7 = \frac{l_7 + 0.5\,(l_1 + l_2)}{1.5} + w/_3 \qquad (w = \text{écart de fermeture})$$

$$l_8 + v_8 = \ldots\ldots$$

$$l_9 + v_9 = \ldots\ldots$$

on trouve sans peine:

$$l_7 + v_7 = 120^0 + \frac{1}{9}(4l_7 - 2l_8 - 2l_9 + 2l_1 + 2l_2 - l_3 - l_4 - l_5 - l_6)$$

puis

$$l_1 + v_1 = 60^0 + \frac{1}{18}(4l_7 - 2l_8 - 2l_9 + 11l_1 - 7l_2 - l_3 - l_4 - l_5 - l_6)$$

et en appliquant la loi de propagation des poids

$$P_7 = P_8 = P_9 = 2.25 \quad (p_i = 1) \quad P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 18/11$$

$$\left[\frac{1}{K_i}\right]_{i=1}^{i=n} = 3 \cdot \frac{1}{2.25} + 6 \cdot \frac{11}{18} = \frac{12 + 33}{9} = 5 = u$$

On pourrait généraliser dans le cas de poids primitifs inégaux. Le soussigné se réserve de revenir sur le problème de la variation de K.

L'ellipse d'erreur en géométrie synthétique

L'étude analytique de cette ellipse a déjà été poussée à fond (voir par ex. [2] p. 206–249). L'ellipse d'erreur est d'essence géométrique. Elle peut être engendrée ponctuellement ou tangentiellement. Une ellipse d'erreur, considérée isolément, peut être déterminée sans faire intervenir des coordonnées. S'il s'agit d'un groupe d'ellipses, calculées simultanément, le cas est différent. Considérons l'équation primitive

$$L_i + v_i = f_i\,(x, y) \qquad (u = 2)$$

ou, sous forme linéaire, le signe du terme l_i étant conventionnel:

$$l_i + v_i = a_i\,dx + b_i\,dy \qquad (\text{ou aussi} -l_i)$$

Si les L_i sont des mesures de *longueur* on a

$$a_i = \sin \alpha_i \qquad b_i = \cos \alpha_i \qquad a_i^2 + b_i^2 = 1$$

L'orientation des axes de coordonnées étant arbitraire, on choisira cette orientation de manière à rendre nuls successivement a_i et b_i:

si $a_i = 0$ on a $\pm\, dy = l_i + v_i$ et $My = M_{l_i} + v_i$ (poids P_i)

si $b_i = 0$ on a $\pm\, dx = l_i + v_i$ et $Mx = M_{l_i} + v_i$ (poids P_i)

Les erreurs moyennes M_x, M_y ne sont plus des valeurs abstraites; leur interprétation est immédiate. Pour chaque indice i on a deux tangentes ($\pm\, M_{l_i} + v_i$) à l'ellipse d'erreur, symetriques par rapport au centre. Ce n'est plus nécessairement un problème de géométrie analytique. Pour mieux marquer ce caractère éliminons les inconnues dx et dy. Le mieux est de choisir d'abord $n = 3$

$$\begin{vmatrix} \sin a_1 & \cos a_1 & v_1 + l_1 \\ \sin a_2 & \cos a_2 & v_2 + l_2 \\ \sin a_3 & \cos a_3 & v_3 + l_3 \end{vmatrix} = 0$$

ou la forme usuelle $A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + w = 0$

Si $n = 4$ le cas est moins simple; il y a deux conditions à choisir parmi les 4 combinaisons d'indices (123), (124), (134) et (234)

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + A_4 v_4 + w_1 = 0$$
$$B_1 v_1 + B_2 v_2 + B_3 v_3 + B_4 v_4 + w_2 = 0$$

Les poids P_i des quantités $(l_i + v_i)$ sont calculables facilement:

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\left(\dfrac{A_i}{p_i}\right)^2}{\left[\dfrac{A\,A}{p}\right]} - \frac{\left[\dfrac{B_i}{p_i} \cdot 1\right]^2}{\left[\dfrac{BB}{p} \cdot 1\right]} - \ldots\ldots \text{ et } \left[\frac{p_i}{P_i}\right]_{i=1}^{i=n} = u = 2$$

(voir [5]).

Cas particuliers: soit $p_i = 1$. L'ellipse a une forme circulaire pour

$P_1 = P_2 = P_3 = 1.5$ $(n = 3)$ ou $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 2$ $(n = 4)$.

L'interprétation de ces résultats est aisée; on s'est bien libéré de la géométrie analytique et c'est possible aussi dans le cas de mesures angulaires. L'ellipse est définie par des tangentes (n paires).

Solution indéterminée. Considérons le cas d'observations conditionnelles:

$$[Av]_1^4 + w_1 = 0 \qquad \text{pour } n = 4$$
$$[Bv]_1^4 + w_2 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{où } [vv] = \min.$$

et en plus $v_i = A_i K_1 + B_i K_2 + \ldots \qquad i = 1,2\ldots n$

Limitons à deux le nombre des conditions; il faut former le déterminant

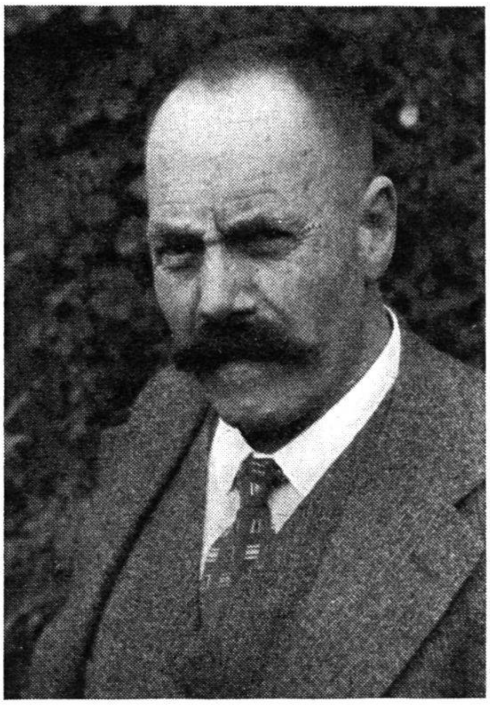
$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ A_4 & B_4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} \neq 0 \,?$$

L'application de la formule bien connue de Laplace donne

$|D| = \Sigma \begin{vmatrix} A_k & B_k \\ A_l & B_l \end{vmatrix}^2$ où les indices k et l sont choisis en épuisant toutes les combinaisons (voir aussi [3] p. 325–329). L'analogie avec le cas d'observations médiates est manifeste. Mais dans un cas l'ordre des mineurs M ($D = \Sigma M\bar{M}$) est égal au nombre de conditions et dans l'autre cas au nombre des inconnues.

[1] Baeschlin C.F., Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen 1925.
[2] Baeschlin, C.F., Ausgleichungsrechnung und Landesvermessung (I, II).
[3] Czuber E., Theorie der Beobachtungsfehler, 1891.
[4] Förstner G., Zeitschrift für Vermessungswesen 1930 (Heft 23).
[5] Ansermet A., Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen 1945 (Nr. 8).

Jakob Eigenmann †



Jakob Eigenmann, Grundbuchgeometer in Frauenfeld, ist am 12. November 1950 im Alter von 74 Jahren zur ewigen Ruhe eingegangen. Seine Tätigkeit auf unserem nicht leichten Arbeitsgebiet rechtfertigt es, seiner an dieser Stelle besonders zu gedenken.

Jakob Eigenmann, Bürger von Müllheim, geboren am 8. September 1876, war der älteste Sohn von 8 Kindern des Johannes Eigenmann, Land-