Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 49 (1951)

Heft: 2

Artikel: Das Prinzip der Isostasie und seine Verwendung in der Geodäsie [Schluss]

Autor: Baeschlin, C.F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-208329

so einen homogenen Fehlerausgleich über das ganze Gebiet anzustreben. Ungenaue Koordinaten der Kontrollpunkte, Richtungsfehler, fehlerhafte Haupt- und Hilfspunkt-Übertragungen usw. wirken sich sofort in Zwängen zwischen den „Templates" aus, worauf solche Stellen nachkontrolliert werden müssen. Zuletzt wird man alle die so gewonnenen Positionen der Haupt- und Hilfspunkte auf die unter den „Templates" liegende Planfläche durchstechen, was mit einer Nadel durch die hohlen Bolzenachsen geschieht. Durch Abgreifen der Koordinaten können diese in einem Register zusammengestellt werden, oder man kann die ganze bearbeitete Fläche in Planpausen aufteilen, in die man die Punkte direkt durchkopiert.

Jedes Bild enthält nun mindestens 8 mit Koordinaten bekannte Punkte, die die Entzerrung des übrigen Details ermöglichen. Wenn man über keine besonderen Hilfsmittel verfügt, wird man so vorgehen, daß man mit Hilfe des Spiegelstereoskopes die topographischen Einzelheiten auf gut transparente Zeichenfolien übernimmt, in die auch die Bildlage der Haupt- und Hilfspunkte markiert wird. Diese Transparente können dann mit einem einfachen, nötigenfalls selbstkonstruierten Gerät entzerrt werden.

Die „Slotted-Template"-Methode beschränkt sich natürlich auf die Auswertung der Planimetrie und eignet sich nicht zur Erstellung von topographischen Karten mit Höhenkurven. Wenn es sich aber nur um eine ungefähre Darstellung der Terrainformen handelt, wie dies in den oben beschriebenen Explorationen meistens der Fall ist, so kann man sich auch hier mit Hausmitteln behelfen, die der Aufgabe genügen. Die „Slotted-Template"-Methode hat aber den großen Vorteil, leicht verständlich zu sein, was das Einarbeiten von Hilfspersonal ohne besondere Kenntnisse der Photogrammetrie sehr erleichtert. Damit kann der Arbeitsfortschritt fast beliebig gesteigert werden, denn auch der Arbeitsprozeß kann in beliebig kleine Sektionen aufgeteilt werden. Wo nur mäßig genaue, aber sehr rasche Resultate verlangt werden, ist diese Methode sehr zu empfehlen.

(Fortsetzung folgt.)

Das Prinzip der Isostasie und seine Verwendung in der Geodäsie

Von C. F. Baeschlin, Zollikon

(Schluß)

Bei diesen isostatischen Berechnungen werden die Kompartimente über die ganze Erdoberfläche bis zum Antipodenpunkt der Station ausgedehnt. Dabei werden die Differenzen der halben Öffnungswinkel Ψ der Zonen immer größer gewählt, je weiter wir uns von der Station entfernen. Bei der sogenannten Hayfordschen Anordnung der Zonen ist für die den Antipodenpunkt enthaltende Zone

$$\Psi_i = 150^\circ\ 56'; \ \Psi_a = 180^\circ\ 0$$

während der lineare Radius der innersten Zone A 2 Meter beträgt. Der äußere Radius der zweiten Zone B ist schon 68 m, und so geht es bis zur Zone O, deren äußerer Radius 166.700 km, der innere Radius 132.850 km beträgt. Daran schließen sich die sogenannten äußeren Zonen 18 bis 1. Für die Zone 18 z. B. ist

$$\Psi_i = 1^\circ\, 29'\, 58''; \;\; \Psi_A = 1^\circ\, 41'\, 13''$$

und so geht es weiter mit immer größer werdenden Unterschieden.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß für eine solche Berechnung recht viele Höhen abzulesen sind. Man verwendet dazu in der Nähe der Station Kurvenkarten im Maßstab 1:20000 bis 1:50000, während der Maßstab der verwendeten Karten immer kleiner gewählt werden darf, je weiter man sich von der Station entfernt, bis zu 10000000. Man hat aber darauf zu sehen, daß in den Karten genügend viele Höhen, respektive Meerestiefen verzeichnet sind, um brauchbare Mittelhöhen zu erhalten. Bis zur Zone O sollte man, wenn immer möglich, Kurvenkarten zur Verfügung haben, wobei es aber genügt, wenn die Äquidistanz 100 bis 200 m beträgt.

Wenn man auf diese Weise die isostatischen Lotabweichungskomponenten X_i und Y_i für Stationen bestimmt, für welche die Lotabweichungskomponenten aus der Vergleichung von trigonometrischen und astronomischen Resultaten bestimmt worden sind, kann man die isostatischen, also berechneten Lotabweichungen mit den beobachteten vergleichen. Da die Triangulationen sich nicht über die ganze Erde erstrecken können, liegen für verschiedene Länder, höchstens vielleicht für ganze Kontinente verschiedene Fundamentalpunkte vor, die nicht durch Triangulation verbunden sind; das zeigt sich dann darin, daß die $X_i - \xi_{\text{beob.}}$ und $Y_i - \eta_{\text{beob.}}$ je um eine bestimmte Konstante herumschwanken, die uns einen Anhaltspunkt für die Lotabweichung im Fundamentalpunkt liefert. Solche Vergleichungen sind z. B. in den Vereinigten Staaten von Nordamerika über das ganze Staatsgebiet durchgeführt worden unter Zugrundelegung der Hayfordschen Hypothese der Prattschen Isostasie. Dabei wurden die Anziehungen der Kompensation unter Zugrundelegung von verschiedenen Ausgleichstiefen T berechnet. Diejenige Ausgleichstiefe, die im Mittel die kleinsten Differenzen $X_i - \xi_{\text{beob.}}$, $Y_i - \eta_{\text{beob.}}$ lieferte, wurde als die zutreffende Ausgleichstiefe angenommen. Hayford fand so für das Gebiet der USA

$$T = 113.7 \text{ km}$$

Während $\xi_t - \xi_{\text{ber.}}$ und $\eta_t - \eta_{\text{ber.}}$ meist sehr große Beträge annehmen, auch nachdem man einen mittleren Wert beseitigt hat, werden im allgemeinen

$$X_i - \xi_{\text{ber.}} \qquad Y_i - \eta_{\text{ber.}},$$

nachdem man einen Mittelwert für die Lotabweichung im Fundamentalpunkt angebracht hat, von der Größenordnung einiger Sexagesimalsekunden. In den Vereinigten Staaten von Nordamerika fand man z. B.

Station Santa Barbara $\xi_{\text{beob.}} = -18''.38$; $\xi_{\text{Top}} = -64''.97$

Station Punta Arena $\eta_{\text{beob.}} = +16''.98$; $\eta_{\text{Top}} = +104''.93$

Solche Vergleichungen isostatischer Lotabweichungen wurden außer in den Vereinigten Staaten unter anderem auch in Indien und in der Schweiz durchgeführt, mit dem Ergebnis, daß die isostatischen Lotabweichungen bis auf die erwähnte Konstante sehr gut mit den beobachteten übereinstimmten, während die topographischen Lotabweichungen, über größere Gebiete berechnet, sich praktisch als unbrauchbar erwiesen haben. Daraus kann mit Pratt und Airy geschlossen werden, daß die Erdrinde nahezu im isostatischen Gleichgewicht steht, und daß die Isostasie im großen betrachtet als eine brauchbare Annäherung, als ein Naturgesetz betrachtet werden darf. Es soll hier aber nicht verschwiegen werden, daß es ausgedehnte Gebiete auf der Erdoberfläche gibt (z. B. der Indische Archipel), wo die Erdrinde eine wesentlich andere Struktur aufweist, als sie nach der isostatischen Theorie angenommen wird. Dabei führen für größere Entfernungen von der Station bei geeigneter Wahl der Ausgleichstiefe die Prattsche und die Airysche Hypothese zu nahe gleichen X_i und Y_i. Als günstigsten Wert für T_0 nach Airy ergibt sich vielerorts der Wert $T_0' = 30$ km. Ferner ergibt sich, daß die Ausgleichstiefe nicht überall auf der Erde dieselbe ist. Der Wert $T = 113.7$ km für die Vereinigten Staaten gilt als ein oberer Wert.

Die Ausrechnung der auf den ersten Blick komplizierten Formeln, die wir hier nicht wiedergegeben haben, läßt sich mit Hilfe von ein für alle Male berechneten Tafeln verhältnismäßig einfach gestalten, so daß die größte Arbeit die Bestimmung der mittleren Höhen der Kompartimente ist. Weiter auf diese interessanten Dinge hier einzutreten, verbietet der zur Verfügung stehende Raum.

Wie man aus den Massen der Topographie und der Kompensation Horizontalkomponenten der Anziehung berechnen kann, ist es natürlich in analoger Weise möglich, Vertikalkomponenten der Anziehung zu berechnen. Dabei erkennt man sofort, daß hier die azimutale Lage eines Kompartimentes keine Rolle spielt, während sie für die Bestimmung von X_i und Y_i natürlich wesentlich ist. Die Vertikalkomponente der Anziehung auf einen Aufpunkt hat die Richtung der Schwerkraft, und sie fügt sich algebraisch zu der auf der Station beobachteten Schwerkraft hinzu. Hier fehlt aber a priori eine Vergleichsbasis.

Man verwendet die isostatisch berechneten Vertikalanziehungen zur Reduktion der auf einer Station P_1 an der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerebeschleunigung g_1 auf das Niveau des Geoides. Man bestimmt, indem man die Berechnungen wieder auf die ganze Erdoberfläche ausdehnt, die Vertikalanziehung der Topographie g_{1T} und die Vertikalanziehung der Kompensation g_{1k} auf den Punkt P_1. Man bildet

$$g_{1T} + g_{1k} = g_{1i}$$

wo man g_{1i} die isostatische Schwerewirkung nennt. Nun denkt man sich sowohl die Topographie wie die Kompensation der ganzen Erde entfernt, womit wir, wie wir früher gesehen haben, eine regularisierte Erde erhalten, die dadurch gekennzeichnet ist, daß sich keine Massen mehr über sie erheben. Ferner erhält die Erdrinde, falls wirklich Isostasie vorhanden ist, eine homogene Dichte; die Meere sind verschwunden. Die Dichte unter der Oberfläche der regularisierten Erde ist überall gleich $= 2.67$ bis zur Ausgleichsschicht, eventuell noch tiefer.

Durch die Entfernung der Topographie und der Kompensation, die beide bis auf das Vorzeichen bei der Hypothese gleicher Massen gleich sind, ändert sich die Anziehung auf der Station P_1. Wenn die Schwere vorher in P_1 g_1 war, so ist sie nach der Regularisierung

$$g_1 - \sum_{\text{Erde}} g_i$$

Man kann sich dabei die Masse der Topographie im Raume der Kompensation gleichmäßig verteilt denken, so daß die sich aufhebenden Massen von Topographie und Kompensation einfach in eine andere Lage zur Meeresfläche gelangen. Der Punkt P_1, dessen Meereshöhe wir mit H_1 bezeichnen wollen, steht nach der Regularisierung in freier Luft, wie ein Ballon. Da die Erdrinde, immer vorausgesetzt, daß wirklich der für die Berechnung von g_{1i} vorausgesetzte Zustand der Isostasie vor der Regularisierung bestanden habe, jetzt homogene Dichte hat, kann man die Veränderung der Schwerkraft bei der Verschiebung von P_1 aus seiner jetzigen Lage im Lot bis auf die Meeresfläche leicht berechnen. Sie beträgt in Übereinstimmung mit der Formel (33a), wenn man sich nur auf die Glieder erster Ordnung beschränkt,

$$\Delta g_1 = + 2 \frac{G}{R} H_1 \quad \text{Freiluftreduktion,} \qquad (38)$$

da die Verschiebung l hier gleich H_1 ist. Wir nennen Δg_1 die sogenannte Freiluftreduktion. Die Schwerkraft im Punkte P_1', dem Schnitt der Lotlinie durch P_1 mit der Meeresfläche oder dem Geoid, ist nach der Regularisierung der Erde

$$g_1' = g_1 - \sum_{\text{Erde}} g_{1i} + \Delta g_1 \qquad (39)$$

Auch die Berechnung von g_1' läßt sich mit Hilfe von Tafeln stark vereinfachen, so daß auch hier die Bestimmung der mittleren Höhen in den Kompartimenten die Hauptarbeit darstellt.

Dieser Wert g_1' sollte nun mit der sogenannten *normalen Schwere* dieses Punktes übereinstimmen. Die normale Schwere am Geoid, oder korrekter am Internationalen Erdellipsoid, ist nach den Bestimmungen der Internationalen Vereinigung für Geodäsie

$$\gamma_1 = 978.0490\,(1 + 0.0052\,884 \sin^2 \varphi_1 - 0.000\,0059 \sin^2 2\varphi_1) \text{ gal} \qquad (40)$$

wo φ_1 die geographische Breite von P_1', die praktisch mit der Breite von P_1 übereinstimmt, bedeutet.

Es wäre nun aber verfehlt, anzunehmen, daß keine Isostasie bestehe, wenn

$$g_1' - \gamma_1 \neq 0$$

sich ergibt. Erstens wird durch den mit der Regularisierung verbundenen Massentransport der Topographie in den Raum der Kompensation das Potential auf dem früheren Geoid verändert; diese Potentialänderung ΔU_1 läßt sich verhältnismäßig leicht, besonders wenn die nötigen Tafeln vorliegen, berechnen, wobei man dieselben mittleren Höhen der Topographie in den einzelnen Kompartimenten zu verwenden hat, wie sie zur Berechnung von $\sum_{\text{Erde}} g_{1i}$ verwendet worden sind.

Infolge dieser Potentialänderung ΔU_1 auf dem früheren Geoid verliert diese Fläche natürlich die Eigenschaft, eine Niveaufläche zu sein, da ja eine Niveaufläche durch W_1 = konstant definiert ist, wo W die Kräftefunktion der Schwerkraft ist, die sich aus dem Gravitationspotential U_1 und der Kräftefunktion Q_1 der Zentrifugalkraft zusammensetzt. Es ist

$$W_1 = U_1 + Q_1 = f \iiint_T \frac{\rho_2 \, dT_2}{r_{12}} + \frac{\omega^2}{2} p_1^2 ,$$

wo

f = die Gravitationskonstante = 667.0 10^{-10} $\mathrm{cm}^3\, g^{-1}\, \mathrm{sec}^{-2}$
ρ_2 = die Dichte im Quellpunkt P_2
r_{12} = die Entfernung $P_1 P_2$
ω = die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation
p_1 = den Abstand des Aufpunktes P_1 von der Rotationsachse

bedeuten.

Da sich p_1 bei der Verschiebung von P_1 nach P_1' nur um wenig ändert, ist die Änderung von W_1 praktisch genügend genau gleich ΔU_1 zu setzen.

Bezeichnet ζ_1 die Änderung des früheren Geoides, nach außen positiv gerechnet, und ist g_1' die Schwerkraft in P_1', so besteht die Beziehung

$$g_1' \zeta_1 = - \Delta U_1 \tag{41}$$

ζ_1 ist die Höhenänderung des neuen Geoides nach der Regularisierung. Daraus ergibt sich aber, auch nach der Freiluftreduktionsmethode berechnet, eine Änderung der Schwerkraft in dem neuen Punkt P_1''. Diese Änderung, die wir mit $\Delta_2 g$ bezeichnen, wird der sogenannte „*indirekte Effekt*" genannt. Fälschlicherweise bezeichnet man ihn auch oft als den sogenannten *Bowie-Effekt*, da schon *Bruns* in seiner „Figur der Erde" auf diesen Effekt hingewiesen hat. Es ist

$$\Delta_2 g = - \zeta_1 \frac{2\,G}{R} = \frac{2\,\Delta U_1}{R} \tag{42}$$

wo

G = die mittlere Schwerkraft an der Erdoberfläche
R = der mittlere Radius des Geoides

sind.

Aber damit haben wir immer noch nicht die korrekte Lage des Geoides nach der Regularisierung und die auf ihm bestehende Schwerkraft. Denn zwischen dem um ζ_1 gehobenen Geoid und dem früheren wahren Geoid befinden sich Massen, die nicht isostatisch kompensiert sind. Sie bewirken daher Änderungen des Schwerefeldes sowohl auf dem Geoid wie auch auf allen im Inneren der Erde gelegenen Niveauflächen. Dabei sind die Änderungen verschieden, je nachdem man die Hypothese der Massengleichheit oder diejenige des hydrostatischen Gleichgewichtes voraussetzt. In geringerem Maße ist diese Wirkung auch von der speziellen Definition der Kompensation abhängig. Für diese schwierigen Fragen hat *F. A. Vening Meinesz*[1] eine genügend genaue Lösung gefunden. Diese Reduktion nenne ich den Vening-Meinesz-Effekt, nach dem Namen seines Entdeckers. Er kann zirka 3.4 mgal in der Schwere oder über 10 Meter in der Höhe erreichen, da auch hier die Beziehung gilt

$$\Delta_3 g = - \zeta_1' \frac{2\,G}{R}$$

Erst nach der Anbringung der Vening-Meinesz-Korrektur erhalten wir die Lage des neuen sogenannten isostatischen Geoides gegenüber dem alten, wirklich existierenden Geoid, das wir das wahre Geoid nennen wollen. Aber auch nach Anbringung der Vening-Meinesz-Korrektur $\Delta_3 g_1$ und von $\Delta_2 g_1$ an g_1' braucht nun g_1''', wobei

$$g_1''' = g_1 - \sum_{\text{Erde}} g_{1i} + \Delta g_1 + \Delta_2 g_1 + \Delta_3 g_1 \qquad (43)$$

ist, durchaus noch nicht mit γ_1, der normalen Schwere, übereinzustimmen, da das isostatische Geoid nicht mit dem Internationalen Erdellipsoid zusammenfällt, infolge des Umstandes, daß die wirkliche Erde eine viel kompliziertere Massenverteilung aufweist, als sie der Ableitung des Internationalen Ellipsoides zugrunde liegt.

Man kann mit Hilfe der Differenzen

$$g_1''' - \gamma_1$$

den sogenannten *Schwereanomalien*, die Höhenunterschiede N des isostatischen Geoides gegenüber dem Internationalen Ellipsoid, das der normalen Schwere γ_1 zugrunde liegt, mit Hilfe des sogenannten *Stokesschen Integrales*, das man durch numerische Integration auswertet, bestimmen.

---

[1] *F. A. Vening Meinesz*, The indirect Isostatic or Bowie Reduction and the Equilibrium Figure of the Earth; Bulletin Géodésique, Nouvelle Série, No 1, 1946, p. 33–107.

Dieses Integral hat G. G. Stokes[1] in seiner berühmten, in der Fußnote zitierten Abhandlung abgeleitet. Um das Stokessche Integral auswerten zu können, sollte man theoretisch die Schwereanomalie in sämtlichen Punkten der Erde kennen. Praktisch kann man die Erhebungen N des isostatischen Geoides über das angenommene Niveausphäroid, als das wir das Internationale Ellipsoid verwenden, aber bestimmen, wenn nur relativ dichte Schweremessungen über die ganze Erde verteilt vorliegen. Heute ist diese Bedingung noch nicht erfüllt, so daß die Bestimmung der Undulationen N heute noch eine Näherung darstellt. Immerhin darf man wohl mit Sicherheit behaupten, daß N die Größenordnung von zirka 100 m nicht übersteigt.

Die Verwendung der isostatischen Reduktion der Schwerkraft als Grundlage für die Bestimmung der Undulationen N hat aber folgenden Nachteil: die isostatische Reduktion $g_1''' - g_1$ ist nur richtig, wenn wirklich die der Berechnung zugrunde gelegte Isostasie in der Erdrinde besteht. Da wir wissen, daß es größere Partien der Erde gibt, in denen die Isostasie nicht besteht, werden bei den isostatischen Berechnungen Fehler entstehen, die, da die Störung der Isostasie über größere Flächen auftritt, systematischen Charakter aufweisen. Sobald aber die in das Stokessche Integral eingehenden Schwereanomalien systematisch verfälscht sind, werden auch die Undulationen N systematisch verändert.

Aus diesem Grunde wird die isostatische Schwerereduktion von einigen Geodäten abgelehnt. Vorläufig sind aber noch keine Schwerereduktionen in Vorschlag gebracht worden, die allgemeine Anerkennung gefunden haben. Die Großzahl der Geodäten betrachtet vielmehr die isostatische Reduktionsmethode der Schwere, trotz gewisser Bedenken, die gegen sie vorgebracht werden können und die durchaus nicht geleugnet werden, als die geeignetste.

Da die isostatische Berechnung der Lotabweichung unzweifelhaft große Erfolge aufzuweisen hat, darf mit Recht vermutet werden, daß die Isostasie auch für die Schwerereduktionen nicht so schlecht sein kann, wie ihre Gegner es wahrhaben wollen.

Damit wollen wir schließen, obwohl es noch einige andere Anwendungen der Isostasie gibt, die aber weniger wichtig sind.

Es lag mir vor allem daran, die Grundlagen der Isostasie, ihre verschiedenen Formen, ihre mathematischen Konsequenzen und zwei wichtige geodätische Anwendungen darzulegen.

Zollikon, 7. September 1950 *F. Baeschlin*

---

[1] *G. G. Stokes*, On the variation of Gravity at the Surface of the Earth. Trans. Cambridge Phil. Soc., *8*, 1849 = Mathem. and Phys. Papers, 2. Cambridge 1883, p. 104.