Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 48 (1950)

Heft: 10

Artikel: Das Prinzip der Isostasie und seine Verwendung in der Geodäsie

Autor: Baeschlin, C.F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-207456

nalen und privaten Instanzen der guten Sache zum Durchbruch verhelfen kann. Es bleibt deshalb zu hoffen, daß diese Zusammenarbeit die voraussichtlich vielerorts auftretenden Schwierigkeiten überwinden hilft, wenn es gilt, die Grundeigentümer nach praktisch abgeschlossenen landwirtschaftlichen Zusammenlegungen noch zur baldigen Inangriffnahme von Waldzusammenlegungen zu bewegen.

Das Prinzip der Isostasie und seine Verwendung in der Geodäsie

Von C. F. Baeschlin, Zollikon

Wenn die Erde vollständig gleichmäßig geschichtet und ihre äußere Begrenzung eine Niveaufläche wäre, gäbe es keinen Anlaß zu Lotabweichungen. Auf dieser hypothetischen Erde würden die aus Triangulation durch Rechnung gewonnenen geographischen Koordinaten (Breite, Länge, Azimut) für jeden Punkt mit den direkten astronomischen Resultaten übereinstimmen. Da die physische Erdoberfläche in den Bergen über das Geoid vorsteht, während die Ozeane beträchtliche Massendefekte darstellen, werden diese zusätzlichen oder fehlenden Massen auf einen bestimmten Massenpunkt Anziehungen nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz ausüben, so daß gegenüber dem hypothetischen Zustand seitliche Anziehungskomponenten auftreten, die dann Anlaß zu Lotabweichungen geben. Man bezeichnet in der Geodäsie die Massen, die über das Geoid vorstehen (Kontinente, Berge), respektive gegenüber dem hypothetischen Zustand fehlen (Ozeane, Depressionen unter das Meeresniveau ohne Wasserbedeckung), als die „Topographie". Mit Hilfe von Kurvenkarten kann man die Topographie bestimmen und dann ihre Horizontalanziehung auf einen bestimmten Punkt, den sogenannten Aufpunkt, berechnen und so dessen Lotabweichung bestimmen.

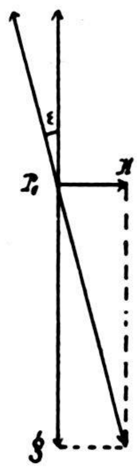

Fig. 1

ε stellt die Lotabweichung dar, erzeugt durch die Horizontalkomponente H der Anziehung durch die Topographie auf die Masse eins im Aufpunkt P_1 · g bedeutet die Schwerebeschleunigung in P_1. Es ist

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{H}{g}$$

Da ε höchstens eine Sexagesimalminute erreicht, kann man mit genügender Genauigkeit $\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{arc} \varepsilon$ setzen, so daß

$$\varepsilon'' = \rho'' \frac{H}{g} \tag{1}$$

Wenn man auf diese Weise aus der Topographie die Lotabweichung, die sogenannte topographische Lotabweichung, berechnet, stellt man meistens eine schlechte Übereinstimmung mit den beobachteten Lotabweichungen fest. Natürlich kann man aus der Topographie auch die Vertikalkomponenten der Anziehung berechnen. Diese fügen sich algebraisch zur normalen Schwerkraft im Aufpunkt P_1 hinzu. Auch diese topographischen Schwereänderungen zeigen im allgemeinen ein unbefriedigendes Verhalten. Durch sorgfältige Analyse dieser Verhältnisse aus Messungen und Berechnungen in Indien kam *J. H. Pratt*[1] im Jahre 1855 zu der Überzeugung, daß die Massen der Topographie unterirdisch ausgeglichen, *kompensiert* seien. Die Dichte des Untergrundes unter einem hohen Berg, z. B., sei geringer als normal, während die Dichte der Massen unterhalb des Meeresbodens größer als normal sein müsse. Die Masse, die im Untergrund gegenüber dem Zustand der hypothetischen Erde in *einem bestimmt definierten Gebiet fehlt (unter den Kontinenten), respektive* darüber hinaus vorhanden ist (Gesteine unter dem Meeresboden), nennt man die *Kompensation*. Sie ist im Falle der Kontinente negativ, unter den Ozeanen positiv. Wenn man die Wirkung dieser Kompensation, sei es für die Horizontal- oder die Vertikal-Anziehung auf einen bestimmten Aufpunkt berechnen will, ist es selbstverständlich notwendig, daß man über ihre räumliche Lage und über ihre Dichte genau orientiert ist.

In Übereinstimmung mit seinen Ergebnissen und um eine möglichst einfache mathematische Formulierung zu erhalten, stellte *Pratt* die folgende Hypothese auf:

1. Man wählt eine feste Ausgleichsfläche in der Tiefe T.
2. Errichtet man über der Flächeneinheit dieser Ausgleichsfläche Prismen, die bis über die physische Erdoberfläche reichen, so ist in allen solchen Prismen dieselbe Masse enthalten.
3. Der Einfachheit halber nimmt man an, daß sowohl die Topographie wie die Kompensation homogen, ihre Dichte also konstant sei.

In bezug auf die Festlegung der Ausgleichsfläche gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Die Tiefe T wird vom Geoid an gezählt. In diesem Falle ist die Ausgleichsfläche nahezu eine Niveaufläche.

b) Die Tiefe T wird von der sogenannten Litosphäre aus genommen; bei kontinentalen Verhältnissen fällt die Litosphäre mit der physischen Erdoberfläche zusammen, während sie bei den Ozeanen sich mit dem Meeresboden deckt. Bei dieser Annahme ist die Ausgleichsfläche eine Parallelfläche zur Litosphäre und damit weit entfernt von einer einheitlichen Niveaufläche. In diesem von *J. Hayford* verwendeten Falle wird die Kompensation zwischen der Litosphäre und der Ausgleichsfläche untergebracht.

Für den Fall a) gibt es zwei verschiedene Arten, die Kompensation zu definieren:

1. Die Kompensation wird zwischen der Litosphäre und der Ausgleichsfläche angenommen.

---

[1] *J. H. Pratt*, On the Attraction of the Himalaya Mountains and the elevated regions beyond upon the plumb-line in India. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1855, Vol. 145, p. 53.

2. Die Kompensation befindet sich zwischen dem Geoid und der Ausgleichsfläche.

Ob man nun den Fall a1, a2 oder b) für die Definition der Lage der Kompensation wählt, spricht man vom Zustand der *Isostasie* der Erdrinde nach der Hypothese von Pratt. Die Konsequenzen der Annahmen a1, a2 und b) werden wir später untersuchen.

Vorläufig sehen wir von der Konvergenz der Lotrichtungen ab, setzen also ebene Verhältnisse voraus.

Die Säule I stellt die sogenannte *Normalsäule* dar, ohne Topographie und Kompensation. Die Dichte in dieser Normalsäule bezeichnen wir mit Θ_0.

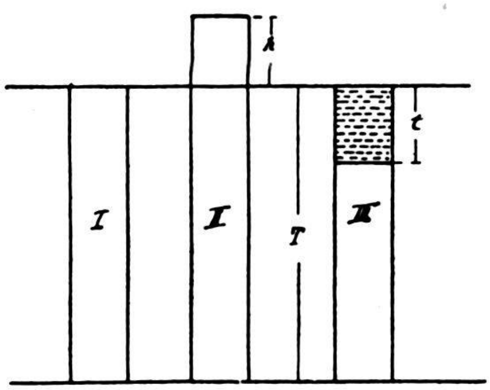

Fig. 2

Die Säule II stellt eine sogenannte *Kontinentalsäule*, auch Landsäule genannt, dar, wo h die Höhe oder Dicke der Topographie ist, deren Dichte wir mit Θ_T bezeichnen.

Die Säule III stellt eine sogenannte *Ozeansäule*, auch Meeressäule genannt, dar, wo t die Tiefe oder Dicke der Topographie ist, deren Dichte gleich der Dichte des Meerwassers, Θ_W, ist. Θ_W wird heute fast allgemein zu 1.027 angenommen. (Ausnahmsweise finden wir die Werte 1.028 [Vening Meinesz] oder auch 1.03.)

Für den Fall a1 ist die Dicke der Kompensation $T + h$ in der Kontinentalsäule, $T - t$ in der Ozeansäule.

Für den Fall a2 ist die Dicke der Kompensation sowohl für die Kontinental- wie die Ozeansäule gleich T.

Für den Fall b) (Hayford) ist die Dicke der Kompensation ebenfalls einheitlich gleich T, nur wird hier T von der Litosphäre aus gezählt. Aus der Gleichheit der Massen, die im Falle ebener Auffassung sich mit der Gleichheit des spezifischen Druckes auf die Ausgleichsfläche deckt, folgen nun die folgenden Gleichheiten

$$O = \overbrace{h\Theta_T + (T + h)\,\vartheta_K}^{\text{Kont}} = \overbrace{t\,(\Theta_W - \Theta_o) + (T - t)\,\vartheta_K}^{\text{OZ}} \quad \text{Fall a)}$$

Denn die Dichte der Topographie im Ozeanfall ist

$$(\Theta_W - \Theta_o) = -(\Theta_o - \Theta_W)$$

während sie für die Normalsäule Null ist.

Daraus folgt

$$\overset{\text{Kont}}{\vartheta_{\kappa}} = \frac{-h\Theta_T}{T+h}; \quad \overset{\text{OZ}}{\vartheta_{\kappa}} = + \frac{t\,(\Theta_o - \Theta_W)}{T-t},$$

Man setzt nun fast allgemein

$$\Theta_T = \Theta_o$$

und zwar wird heute ebenso allgemein der Wert 2.67 angenommen. Damit erhalten wir einfacher

$$\left.\begin{aligned} \overset{\text{Kont}}{\vartheta_{\kappa}} &= -\Theta_o \frac{h}{T+h} \\ \overset{\text{OZ}}{\vartheta_{\kappa}} &= +(\Theta_o - \Theta_W) \frac{t}{T-t} \end{aligned}\right\} \quad \text{Fall a1)} \qquad (2)$$

Für den Fall a2 bestehen die Gleichheiten

$$O = h\Theta_o + T\overset{\text{Kont}}{\vartheta_{\kappa}} = t\,(\Theta_W - \Theta_o) + T\overset{\text{OZ}}{\vartheta_{\kappa}}$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \overset{\text{Kont}}{\vartheta_{\kappa}} &= -\Theta_o \frac{h}{T} \\ \overset{\text{OZ}}{\vartheta_{\kappa}} &= +(\Theta_o - \Theta_W) \frac{t}{T} \end{aligned}\right\} \quad \text{Fall a2)} \qquad (3)$$

Für den Hayfordschen Fall b) gelten die Gleichheiten

$$O = h\Theta_o + T\overset{\text{Kont}}{\vartheta_{\kappa}} = t\,(\Theta_W - \Theta_o) + T\overset{\text{OZ}}{\vartheta_{\kappa}}$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \overset{\text{Kont}}{\vartheta_{\kappa}} &= -\Theta_o \frac{h}{T} \\ \overset{\text{OZ}}{\vartheta_{\kappa}} &= +(\Theta_o - \Theta_W) \frac{t}{T} \end{aligned}\right\} \quad \text{Fall b)} \qquad (4)$$

Die Dichten der Kompensation sind in den Fällen a2 und b gleich; die Kompensation hat aber eine verschiedene Lage, so daß ihre Wirkung auf einen Aufpunkt in den beiden Fällen eine andere ist.

Man erkennt, daß die Prattsche Hypothese der Isostasie an sich noch keine abschließende Definition der Kompensation bietet. Wir müssen uns vielmehr für einen der drei verschiedenen Fälle a1, a2 oder b entscheiden.

Kurz nach *Pratt* hat *G. B. Airy*[1], ebenfalls auf Erfahrungen in Indien gestützt, eine andere Hypothese der Isostasie aufgestellt.

Airy nimmt an, daß die Erdrinde, sagen wir bis 800 km Tiefe eine einheitliche Dichte habe, die aber wesentlich höher ist als die normale Dichte der Gesteine an der Oberfläche. Die Geologen nennen diesen Untergrund „Sima" (Silicium, Magnesium); wir bezeichnen dessen Dichte mit Θ_{Sima}. Heute wird dafür fast allgemein der Wert 3.27 angenommen. Dieses Sima nehmen wir als plastisch an, so daß es sich gegenüber einem Druck nach einer gewissen Zeit wie eine vollkommene Flüssigkeit verhält. Die äußersten Schichten der Erdrinde, die Geologen nennen sie „Sial" (Silicium, Aluminium), haben eine geringere Dichte Θ_{Sial}. Heute wird dafür fast allgemein $\Theta_{\text{Sial}} = 2.67$ angenommen.

Wir nehmen nun an, daß die Oberfläche des Sima sich zunächst in der konstanten Tiefe s unter dem Geoid, also der Meeresfläche, befinde. Auch hier sehen wir zunächst von der Konvergenz der Lotlinien ab und nehmen ferner an, daß die Schwerkraft in dem zu betrachtenden Bereich konstant, unabhängig von der Tiefe sei. Auch hier betrachten wir Prismen mit der Grundfläche eins. Zunächst betrachten wir eine Sialsäule von der Dicke T_0, deren obere Fläche gerade bis zum Meeresniveau reicht. Da das Sima plastisch und von höherer Dichte als das Sial ist, sinkt unsere Sialsäule in das Sima ein, so, wie ein Eisberg im Wasser einsinkt. Nehmen wir noch an, daß die seitliche Ausdehnung des Sima sehr groß, theoretisch unendlich groß sei, so daß durch das Eintauchen einer Sialsäule keine Hebung des Niveaus s auftrete, so können wir nach dem Archimedischen Prinzip des Schwimmgleichgewichtes feststellen, daß die Masse des verdrängten Sima gleich der Gesamtmasse des Sial in unserer Säule ist. Wir erhalten daher die Beziehung

$$T_0 \, \Theta_{\text{Sial}} = (T_0 - s) \, \Theta_{\text{Sima}}$$

Daraus folgt

$$T_0 = \frac{\Theta_{\text{Sima}}}{\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}}} \, s \qquad \text{Normalfall} \qquad (5)$$

Jetzt betrachten wir eine Sialsäule (immer von der Grundfläche eins), die um h über das Meeresniveau vorsteht. Die Eintauchtiefe T_h dieser Sialsäule ergibt sich aus der Beziehung

$$(h + T_h) \, \Theta_{\text{Sial}} = (T_h - s) \, \Theta_{\text{Sima}}$$

woraus folgt

$$T_h = \frac{\Theta_{\text{Sima}}}{\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}}} \, s + \frac{\Theta_{\text{Sial}}}{\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}}} \cdot h$$

[1] *G. B. Airy*, On the Compensation of the Effect of the attraction of Mountain Masses as disturbing the apparant astronomical latitude of Stations in Geodetic Surveys. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1855. Vol. 145, p. 101.

Beachten wir die Formel (5) für T_0 so können wir das schreiben

$$T_h = T_0 + \frac{\Theta_{\text{Sial}}}{\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}}} h \tag{6}$$

Diese zweite Säule sinkt also um $T_h - T_0$ tiefer in das Sima ein als die Normalsäule.

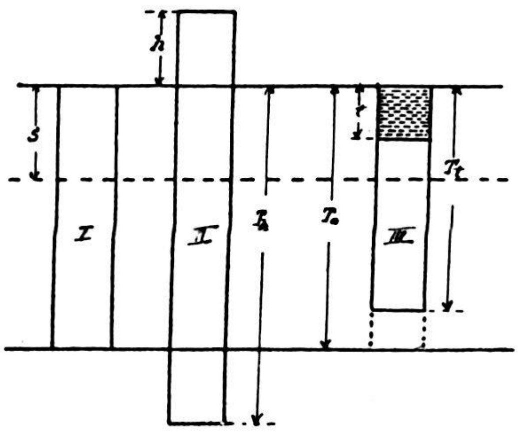

Fig. 3

Nun betrachten wir eine Säule unter einem Ozean von der Tiefe t. Das Archimedische Prinzip führt hier zu der Beziehung

$$t\Theta_W + (T_t - t)\,\Theta_{\text{Sial}} = (T_t - s)\,\Theta_{\text{Sima}}$$

Daraus folgt

$$T_t = \frac{\Theta_{\text{Sima}}}{\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}}} s - \frac{\Theta_{\text{Sial}} - \Theta_W}{\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}}} t$$

oder unter Einführung von T_0 nach (5)

$$T_t = T_0 - \frac{\Theta_{\text{Sial}} - \Theta_W}{\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}}} t \tag{7}$$

T_t ist hier also kleiner als T_0; unsere aus Meerwasser und Sial zusammengesetzte Säule III sinkt also nicht bis zum Niveau T_0 in das Sima ein.

Man erkennt, daß in den Formeln (6) und (7) nur noch T_0 auftritt; die Größe s ist damit ausgeschaltet. T_0 ist die Tiefe der Unstetigkeitsschicht zwischen Sial und Sima für die Normalsäule mit $h = O$. Entfernen wir bei der Airyschen Isostasie Topographie und Kompensation, so erhalten wir eine Niveaufläche von der Tiefe T_0 unter dem Geoid. Wir wollen diese Fläche in Zukunft kurz die *Airysche Ausgleichsfläche* nennen.

Von demselben Grundsatz, wie bei der Prattschen Hypothese ausgehend, daß die Masse der Kompensation entgegengesetzt gleich der Masse der Topographie sei, können wir bei der Airyschen Hypothese sowohl für den Kontinental- wie für den Ozeanfall die Lage der Kompensation angeben.

Im Falle der Landsäule II stellt der Säulenteil von der Dicke T_h — T_0 gegenüber dem Normalfall der Säule I einen Massendefekt der Sialsäule gegenüber dem sich im Normalfall dort befindlichen Sima dar. Dieser Massendefekt ist $(T_h - T_o)\,(\Theta_{\text{Sial}} - \Theta_{\text{Sima}})$. Dies ist aber nach (6) gleich $-\Theta_{\text{Sial}} \cdot h$, was aber die negative Masse der Topographie darstellt. Wenn

$$D_k\,\vartheta_K + D_T\,\Theta_T = O$$

sein soll, können wir also setzen

$$D_k = T_h - T_o$$

$$\vartheta_K = -(\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}})$$

während selbstverständlich

$$D_T = h$$

$$\Theta_T = \Theta_o$$

zu setzen ist. Die Dicke der Kompensation ist also bei einer Landsäule $T_h - T_o$, während ihre Dichte gleich $-(\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}})$ ist. Gegenüber der Prattschen Hypothese weist also die Airysche Hypothese die drei wesentlichen Unterschiede auf:

1. Die Dichte der Kompensation ist konstant $-(\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}})$.
2. Die Dicke der Kompensation $T_h - T_0$ ist eine Funktion von h.
3. Die Kompensation ist stark in die Tiefe verlegt; sie liegt zwischen den beiden Niveauflächen mit der Tiefe T_0 und der Tiefe T_h unter dem Meeresniveau.

Betrachten wir die Ozeansäule III, so stellen wir zunächst fest, daß die Masse der Topographie hier

$$t\,(\Theta_w - \Theta_{\text{Sial}})$$

ist, also gleich $D_{\text{Top}} \cdot \Theta_{\text{Top}}$ (negativ, weil

$$\Theta_{\text{Top}} = \Theta_w - \Theta_{\text{Sial}} = -(\Theta_{\text{Sial}} - \Theta_w)$$

ist). Soll auch hier

$$D_{\text{Top}} \cdot \Theta_{\text{Top}} + D_k\,\vartheta_K = O$$

sein, so erkennen wir aus Formel (7), daß wir setzen können

$$D_k = |\,T_t - T_o\,|$$

$$\vartheta_K = +(\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}})$$

$$D_{\text{Top}} = t$$

$$\Theta_{\text{Top}} = -(\Theta_{\text{Sial}} - \Theta_w)$$

Dabei müssen wir $D_k = T_t - T_0$ mit dem Absolutwert einsetzen. Um zu allgemeinen, algebraisch richtigen Formeln zu kommen, setzen wir ein für allemal fest, daß wir Dicken, beziehen sie sich nun auf die Topographie, die Kompensation oder auf die Ausgleichsfläche, stets positiv zählen. Die Dichten der Topographie und der Kompensation dagegen zählen wir algebraisch; Dichteüberschüsse gegenüber dem Normalzustand, wie Θ_0 beim Landfall für die Topographie (denn die Topographie tritt dort in Konkurrenz mit Luft, die sich im Normalfall dort befindet), $\Theta_{\text{Sima}} - \Theta_{\text{Sial}}$ beim Ozeanfall für die Airysche Hypothese, werden positiv gezählt. Dichtedefekte, wie $(\Theta_w - \Theta_0)$ für die Topographie beim Ozeanfall (denn hier tritt die Dichte Θ_w in Konkurrenz zu der Dichte Θ_0, die sich im Normalfall an der Stelle der Meeressäule befindet) und $(\Theta_{\text{Sial}} - \Theta_{\text{Sima}})$ beim Landfall der Airyschen Hypothese, sind negativ zu zählen.

Mit dieser Festsetzung stehen auch die Formeln (2), (3) und (4) für die Prattsche Hypothese in Übereinstimmung. Auch für den seltenen Ausnahmefall einer Depression im Landfall bleibt die Dicke $|-h|$ positiv, dagegen ist hier die Dichte der Topographie $-\Theta_0$, weil im Normalfall an der Stelle der Luftsäule von der Dicke $|-h|$ Masse von der Normaldichte Θ_0 sich befindet. Die Dichte der Kompensation ist in diesem Falle sowohl für die Prattsche wie für die Airysche Hypothese positiv.

Ein kleiner Nachteil der hier gewählten Vorzeichenregelung liegt darin, daß man bei der Airyschen Hypothese nicht ohne weiteres erkennt, ob $T_h - T_0$, respektive $T_t - T_0$ positiv oder negativ ist. Wenn man sich aber merkt, daß

$$T_h - T_0 > O, \text{ wenn } \vartheta_K < O$$

$$T_t - T_0 < O, \text{ wenn } \vartheta_K > O$$

ist, dann ist jede Zweideutigkeit, die sich aus der Grundbeziehung

$$D_{\text{Top}} \cdot \Theta_{\text{Top}} + D_{\text{Komp}} \cdot \vartheta_{\text{Komp}} = O \tag{8}$$

ergeben könnte, behoben, da ja bei der Airyschen Hypothese ϑ_{Komp} nur entweder -0.60 oder $+0.60$ sein kann; was gilt, geht eindeutig aus (8) hervor.

Mit Rücksicht auf spätere Betrachtungen legen wir Wert darauf, daß diese Grundbeziehung (8) für alle Fälle algebraisch richtig bleibt.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die Airysche Hypothese der Isostasie ganz eindeutig definiert ist, sobald Θ_{Sial}, Θ_{Sima} und T_0 festgelegt sind, während bei der Prattschen Hypothese noch angegeben werden muß, ob man den Fall a1, a2 oder b zugrunde legen will.

(Fortsetzung folgt)