Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 48 (1950)

Heft: 8

Artikel: Sur un théorème de la méthode des moindres carrés

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-207446

Darin bezeichnet a_i die dem (Brechungs-)Winkel α_i gegenüberliegende Seite, s_l und s_m die diesen Winkel einschließenden Netzseiten, a_{il}, a_{im} die Orthogonalprojektion der Seite a_i auf s_l und s_m und F_{lm}, die von $s_l\, s_m$ eingeschlossene Dreiecksfläche.

Das Formelsystem (13) geht in (7) über, wenn nur 2 Dreiecke (Grundfigur) betrachtet und die Bezeichnungen entsprechend geändert werden.

Sur un théorème de la méthode des moindres carrés

par A. Ansermet

Considérons un système de n équations à u inconnues ($n > u$):

$$F_i = F_i\,(x, y, z \,\ldots\ldots\, l_i + v_i) = 0 \qquad i = 1,2 \,\ldots\, n \qquad (1)$$

que l'on ramène à la forme linéaire grâce aux valeurs provisoires x_0, y_0, z_0 ..... des inconnues

$$x = x_0 + \xi \qquad y = y_0 + \eta \qquad z = z_0 + \zeta \quad \ldots\ldots$$

$$[vv] = \text{minimum} \qquad \text{(poids des } l_i \text{ égaux)}$$

Les équations primitives prendront la forme classique

$$F_i' = v_i + a_i\,\xi + b_i\,\eta + c_i\,\zeta + \ldots\ldots + f_i' = 0 \;(i = 1, 2, 3 \ldots n) \qquad (2)$$

où f_i est le terme absolu.

Le système d'équations normales peut s'écrire

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\,v_1 + a_2\,v_2 \ldots\ldots + a_n\,v_n = 0 = f_1\,(v_1, v_2 \ldots v_n) \\
b_1\,v_1 + b_2\,v_2 \ldots\ldots + b_n\,v_n = 0 = f_2\,(v_1, v_2 \ldots v_n) \\
c_1\,v_1 + c_2\,v_2 \ldots\ldots + c_n\,v_n = 0 = f_3\,(v_1, v_2 \ldots v_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_1\,v_1 + u_2\,v_2 \ldots\ldots + u_n\,v_n = 0 = f_u(v_1, v_2 \ldots v_n)
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Donc en tout $(n + u)$ équations à $(n + u)$ inconnues soit n résidus v et u inconnues ξ, η, ζ .....

Dans le numéro de juin 1948, M. le Prof. Dr Baeschlin a établi, avec toute la clarté désirable, dans quelles conditions le calcul des inconnues ξ, η, ζ ... devenait indéterminé. Le but de ces lignes est de signaler une solution qui est peut-être mieux à la portée de certains lecteurs.

Au lieu de considérer le déterminant fonctionnel relatif aux inconnues ξ, η, ζ .... nous grouperons les systèmes (2) et (3) à $(n + u)$ inconnues; le déterminant devient

$$D = \frac{\partial\,(F_1', F_2' \ldots\ldots F_n', f_1, f_2 \ldots\ldots f_u)}{\partial\,(\xi, \eta, \zeta \ldots\ldots v_1, v_2, \ldots\ldots v_n)}$$

La complication n'est qu'apparente; posons pour faciliter le raisonnement: $n = 5$, $u = 3$.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Le développement de ce déterminant symétrique est simple et élégant; il suffit d'appliquer le théorème connu de Laplace (voir par exemple Kowalewski, G., Einführung in die Determinantentheorie, 1909, p. 37). On considère les mineurs d'ordre u ($u = 3$)

$$M = \begin{vmatrix} a_k & b_k & c_k \\ a_l & b_l & c_l \\ a_m & b_m & c_m \end{vmatrix}$$ où les indices k, l, m sont choisis à volonté dans la série 1, 2, 3 .... n

Pour $n = 5$ on a en permutant $(k, l, m) = (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5)$ et $(3, 4, 5)$.

Désignons par $\overline{M}$ les mineurs complémentaires (ordre $= n = 5$)

$$D = \Sigma\, M . \overline{M}.$$

Par exemple le complémentaire de

$$M = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{vmatrix} \quad \text{est} \quad \overline{M} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} = M$$

Et finalement

$$D = \Sigma \begin{vmatrix} a_k & b_k & c_k \\ a_l & b_l & c_l \\ a_m & b_m & c_m \end{vmatrix}^2$$

Bien entendu on aboutit aux mêmes conclusions que M. le Prof. D^r^ Baeschlin et au même théorème.