Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 48 (1950)

Heft: 8

Artikel: Sur un théorème de la méthode des moindres carrés

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-207446

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Darin bezeichnet a_i die dem (Brechungs-)Winkel α_i gegenüberliegende Seite, s_l und s_m die diesen Winkel einschließenden Netzseiten, $a_{i\,l}$, $a_{i\,m}$ die Orthogonalprojektion der Seite a_i auf s_l und s_m und $F_{l\,m}$, die von $s_l\, s_m$ eingeschlossene Dreiecksfläche.

Das Formelsystem (13) geht in (7) über, wenn nur 2 Dreiecke (Grundfigur) betrachtet und die Bezeichnungen entsprechend geändert werden.

Sur un théorème de la méthode des moindres carrés

par A. Ansermet

Considérons un système de n équations à u inconnues ($n > u$):

$$F_i = F_i\,(x, y, z \ldots\ldots l_i + v_i) = 0 \qquad i = 1,2 \ldots\ldots n \tag{1}$$

que l'on ramène à la forme linéaire grâce aux valeurs provisoires x_0, y_0, z_0 ..... des inconnues

$$x = x_0 + \xi \qquad y = y_0 + \eta \qquad z = z_0 + \zeta \ \ldots\ldots$$

$$[vv] = \text{minimum} \qquad \text{(poids des } l_i \text{ égaux)}$$

Les équations primitives prendront la forme classique

$$F_i' = v_i + a_i\,\xi + b_i\,\eta + c_i\,\zeta + \ldots\ldots + f_i' = 0 \ (i = 1, 2, 3 \ldots n) \tag{2}$$

où f_i est le terme absolu.

Le système d'équations normales peut s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,v_1 + a_2\,v_2 \ldots\ldots + a_n\,v_n = 0 = f_1\,(v_1, v_2 \ldots v_n) \\ b_1\,v_1 + b_2\,v_2 \ldots\ldots + b_n\,v_n = 0 = f_2\,(v_1, v_2 \ldots v_n) \\ c_1\,v_1 + c_2\,v_2 \ldots\ldots + c_n\,v_n = 0 = f_3\,(v_1, v_2 \ldots v_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1\,v_1 + u_2\,v_2 \ldots\ldots + u_n\,v_n = 0 = f_u(v_1, v_2 \ldots v_n) \end{array}\right\} \tag{3}$$

Donc en tout $(n + u)$ équations à $(n + u)$ inconnues soit n résidus v et u inconnues ξ, η, ζ .....

Dans le numéro de juin 1948, M. le Prof. Dr Baeschlin a établi, avec toute la clarté désirable, dans quelles conditions le calcul des inconnues ξ, η, ζ ... devenait indéterminé. Le but de ces lignes est de signaler une solution qui est peut-être mieux à la portée de certains lecteurs.

Au lieu de considérer le déterminant fonctionnel relatif aux inconnues ξ, η, ζ .... nous grouperons les systèmes (2) et (3) à $(n + u)$ inconnues; le déterminant devient

$$D = \frac{\partial\,(F_1', F_2' \ldots\ldots F_n', f_1, f_2 \ldots\ldots f_u)}{\partial\,(\xi, \eta, \zeta \ldots\ldots v_1, v_2, \ldots\ldots v_n)}$$

La complication n'est qu'apparente; posons pour faciliter le raisonnement: $n = 5$, $u = 3$.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Le développement de ce déterminant symétrique est simple et élégant; il suffit d'appliquer le théorème connu de Laplace (voir par exemple Kowalewski, G., Einführung in die Determinantentheorie, 1909, p. 37). On considère les mineurs d'ordre u ($u = 3$)

$$M = \begin{vmatrix} a_k & b_k & c_k \\ a_l & b_l & c_l \\ a_m & b_m & c_m \end{vmatrix}$$

où les indices k, l, m sont choisis à volonté dans la série 1, 2, 3 .... n

Pour $n = 5$ on a en permutant $(k, l, m) = (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5)$ et $(3, 4, 5)$.

Désignons par $\overline{M}$ les mineurs complémentaires (ordre $= n = 5$)

$$D = \Sigma\, M.\, \overline{M}.$$

Par exemple le complémentaire de

$$M = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{vmatrix} \quad \text{est} \quad \overline{M} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} = M$$

Et finalement

$$D = \Sigma \begin{vmatrix} a_k & b_k & c_k \\ a_l & b_l & c_l \\ a_m & b_m & c_m \end{vmatrix}^2$$

Bien entendu on aboutit aux mêmes conclusions que M. le Prof. Dr Baeschlin et au même théorème.