Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 48 (1950)

Heft: 8

Artikel: Geometrie mit Strecken [Schluss]

Autor: Rinner, Karl

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-207445

4° Approbation de la gestion de 1949, des comptes 1949 et du budget 1950.
5° Fixation du lieu et date de l'assemblée générale de 1951.
6° Problème de l'enseignement professionnel.
7° Révision des tarifs.
8° Problème de l'introduction d'une caisse de retraite pour le personnel des bureaux privés.
9° Divers et propositions individuelles.

Nous engageons vivement tous nos membres à répondre favorablement à l'invitation de la section de Zurich/Schaffhouse. Nos collègues et amis nous recevront bien et ils nous présentent un programme varié et intéressant.

Pour le Comité central:

Le Président: *M. Baudet.* Le Secrétaire: *E. Bachmann.*

Geometrie mit Strecken

Von Dr. Ing. habil. Karl Rinner, Graz

(Schluß)

Der Widerspruch $W = \Phi_0$ kann nach (6) berechnet werden; zweckmäßiger wird hierzu aber das nachstehende Formelsystem verwendet:

$$\left.\begin{aligned} W &= s_6 - \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ \Delta x &= \frac{2}{s_1}(F_{12} + F_{15}) \\ \Delta y &= \frac{1}{2\,s_1}(s_2^2 - s_3^2 + s_4^2 - s_5^2) \end{aligned}\right| \qquad (8)$$

Für $W = 0$ folgt hieraus auch eine zwischen Vierecksfläche und den Seiten s_i bestehende Identität, aus welcher sich eine allgemeingültige Flächenformel für das Viereck ableiten läßt:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{4\,s_1^2\,s_6^2 - (s_2^2 - s_3^2 + s_4^2 - s_5^2)} \qquad (9)$$

Für ein Parallelogramm vereinfachen sich die Formeln (7) beträchtlich. Wegen

$$f_2 = f_5 = 1,\; s_2 = s_4,\; s_3 = s_5,\; s_{32} = -s_{52},\; s_{25} = -s_{45}$$

wird

$$s_{31} + s_{41} = s_1,\; s_{32} - s_{62} = -s_2,\; s_{45} - s_{65} = -s_5$$

und damit folgt aus (7):

$$s_1\,v_1 - s_2\,v_2 - s_3\,v_3 - s_4\,v_4 - s_5\,v_5 + s_6\,v_6 + s_6\,W = 0 \qquad (10)$$

Im Falle eines quadratischen Viereckes wird $s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s$, $s_1 = s_6 = \sqrt{2}\, s$ und somit:

$$(v_1 + v_6)\sqrt{2} - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 + W\sqrt{2} = 0 \tag{11}$$

Zwei Beispiele sollen die Anwendung der Formeln (7) und (11) zeigen.

a) Allgemeines Viereck: Die Seiten s_i wurden gemessen, s_{ik} und f_i nach einer Skizze 1 : 10 000 (Abb. 3) graphisch ermittelt. Die Berechnung des Widerspruches erfolgte nach (8).

	s_i	s_{ik}		a_i	v_i	$s_i + v_i$
1	1210	31	760	+ 0,83	+ 0,72	1210,72
2	655	41	310	— 0,73	— 0,63	654,37
3	902	62	1045	— 0 86	— 0,74	901,26
4	1445	65	1820	— 0,46	— 0,40	1444,60
5	1680	f	1,87	+ 0,04	+ 0,03	1680,03
6	1946	f	0,62	+ 1,00	+ 0,86	1946,86

$W = -2{,}73 \qquad [aa] = 3{,}17$

$\Delta x = 1892{,}80 \qquad k = \dfrac{-W}{[aa]} = +0{,}86 \quad m_0 = \sqrt{[vv]} = \pm 1{,}5$

$\Delta y = 462{,}30$

b) Quadratisches Viereck:

	s_i	a_i	v_i	$s_i + v_i$
1	7065	— 1,000	— 4,3	7060,7
2	5010	0,707	+ 3,1	5013,1
3	4990	0,707	+ 3,1	4993,1
4	4995	0,707	+ 3,1	4998,1
5	4992	0,707	+ 3,1	4995,1
6	7085	— 1,000	— 4,3	7080,7

$W = +17{,}1 \quad [aa] = 4 \quad k = -4{,}28 \quad m_0 = \pm 8{,}5$

Nr. 3

Ein nur aus Strecken gebildetes Netz mit n Knoten ist durch $2n$–3 Strecken bestimmt. Bezeichnet s die Anzahl der im Netz vorhandenen Strecken, so bestehen $z = s - 2n + 3$ (innere) Bedingungsgleichungen. Z. B. ist im Falle der in Nr. 2 beschriebenen Grundfigur $s = 6$, $n = 4$ und somit $z = 1$.

Ist das Netz aus z Grundfiguren aufgebaut, deren jede mit der benachbarten eine Seite gemeinsam hat, so gibt jede der Grundfiguren Anlaß zu einer Gleichung (7) und die Netzausgleichung besteht in der gemeinsamen Ausgleichung der z Gleichungen (7). Sind darüber hinaus noch Diagonalen gemessen, so lassen sich die dadurch gegebenen Bedingungsgleichungen am einfachsten mit Hilfe von Polygonzügen, welche vom Anfangspunkt zum Endpunkt der Diagonale führen, angeben.

Als Beispiel hiefür sei eine einfache Aneinanderreihung von Grundfiguren (Kette) angeführt, in welcher die Diagonale $\overline{AB} = e$ gemessen wurde. Bezeichnen s die Seiten und t die von e (x-Achse) an gezählten Richtungswinkel des Zuges von A nach B, so besteht nach dem Projektionssatz die Bedingungsgleichung (Abb. 4):

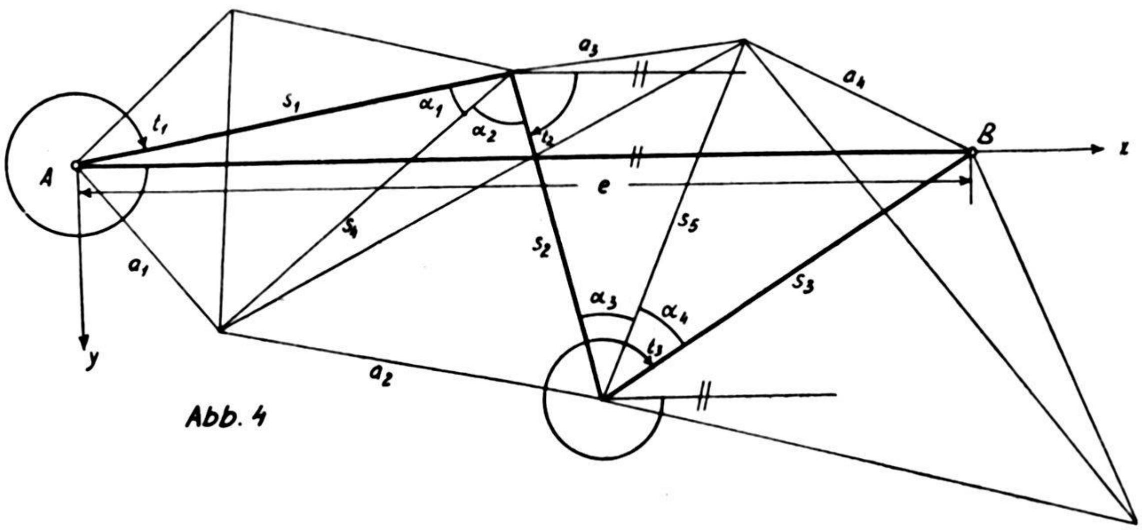

Abb. 4

$$\Phi\,(s) = e - \Sigma\, s_i \cos t_i = 0$$

$$t = t_1 + \Sigma \pm a_i \qquad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \text{ wenn } a_i \begin{matrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{matrix} \text{ vom Zug} \tag{12}$$

Die Winkel a_i können nach dem Cosinussatz aus den Dreiecken ($s_l\, s_m\, a_i$) berechnet werden.

$$\cos a_i = \frac{1}{2\, s_l\, s_m} \left(s^2{}_l + s^2{}_m - a^2{}_i\right)$$

Durch Entwicklung an der durch die Meßwerte bestimmten Näherungsstelle folgt:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + d\,\Phi, \qquad \Phi_0 = W \\ d\,\Phi &= de - \sum \frac{\Delta x}{s}\, ds - \Delta y\, dt \\ dt &= \Sigma \pm da_i \qquad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \text{ wenn } a_i \begin{matrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{matrix} \text{ vom Zug} \end{aligned} \tag{13}$$

$$2\, F_{zm}\; d\alpha_i = a_i\, da_i - a_{il}\, ds_i - a_{im}\, ds_m$$

Darin bezeichnet a_i die dem (Brechungs-)Winkel α_i gegenüberliegende Seite, s_l und s_m die diesen Winkel einschließenden Netzseiten, $a_{i\,l}$, $a_{i\,m}$ die Orthogonalprojektion der Seite a_i auf s_l und s_m und $F_{l\,m}$, die von $s_l\,s_m$ eingeschlossene Dreiecksfläche.

Das Formelsystem (13) geht in (7) über, wenn nur 2 Dreiecke (Grundfigur) betrachtet und die Bezeichnungen entsprechend geändert werden.

Sur un théorème de la méthode des moindres carrés

par A. Ansermet

Considérons un système de n équations à u inconnues ($n > u$):

$$F_i = F_i\,(x, y, z \,.\,.\,.\,.\,.\, l_i + v_i) = 0 \qquad i = 1,2 \,.\,.\,.\,.\, n \tag{1}$$

que l'on ramène à la forme linéaire grâce aux valeurs provisoires x_0, y_0, $z_0 \,.\,.\,.\,.\,.$ des inconnues

$$x = x_0 + \xi \qquad y = y_0 + \eta \qquad z = z_0 + \zeta \quad .\,.\,.\,.\,.$$

$$[vv] = \text{minimum} \qquad (\text{poids des } l_i \text{ égaux})$$

Les équations primitives prendront la forme classique

$$F_i' = v_i + a_i\,\xi + b_i\,\eta + c_i\,\zeta + \,.\,.\,.\,.\,. + f_i' = 0 \;(i = 1, 2, 3 \,.\,.\,.\, n) \tag{2}$$

où f_i est le terme absolu.

Le système d'équations normales peut s'écrire

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\,v_1 + a_2\,v_2 \,.\,.\,.\,.\,. + a_n\,v_n = 0 = f_1\,(v_1, v_2 \ldots v_n) \\
b_1\,v_1 + b_2\,v_2 \,.\,.\,.\,.\,. + b_n\,v_n = 0 = f_2\,(v_1, v_2 \ldots v_n) \\
c_1\,v_1 + c_2\,v_2 \,.\,.\,.\,.\,. + c_n\,v_n = 0 = f_3\,(v_1, v_2 \ldots v_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_1\,v_1 + u_2\,v_2 \,.\,.\,.\,.\,. + u_n\,v_n = 0 = f_u(v_1, v_2 \ldots v_n)
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Donc en tout $(n + u)$ équations à $(n + u)$ inconnues soit n résidus v et u inconnues ξ, η, $\zeta \,.\,.\,.\,.\,.$

Dans le numéro de juin 1948, M. le Prof. Dr Baeschlin a établi, avec toute la clarté désirable, dans quelles conditions le calcul des inconnues ξ, η, $\zeta \ldots$ devenait indéterminé. Le but de ces lignes est de signaler une solution qui est peut-être mieux à la portée de certains lecteurs.

Au lieu de considérer le déterminant fonctionnel relatif aux inconnues ξ, η, $\zeta \,.\,.\,.\,.$ nous grouperons les systèmes (2) et (3) à $(n + u)$ inconnues; le déterminant devient

$$D = \frac{\partial\,(F_1', F_2' \,.\,.\,.\,.\,.\, F_n', f_1, f_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, f_u)}{\partial\,(\xi, \eta, \zeta \,.\,.\,.\,.\, v_1, v_2, \,.\,.\,.\,.\,.\, v_n)}$$