

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 48 (1950)

Heft: 8

Artikel: Geometrie mit Strecken [Schluss]

Autor: Rinner, Karl

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-207445>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

- 4º Approbation de la gestion de 1949, des comptes 1949 et du budget 1950.
- 5º Fixation du lieu et date de l'assemblée générale de 1951.
- 6º Problème de l'enseignement professionnel.
- 7º Révision des tarifs.
- 8º Problème de l'introduction d'une caisse de retraite pour le personnel des bureaux privés.
- 9º Divers et propositions individuelles.

Nous engageons vivement tous nos membres à répondre favorablement à l'invitation de la section de Zurich/Schaffhouse. Nos collègues et amis nous recevront bien et ils nous présentent un programme varié et intéressant.

Pour le Comité central:

Le Président: *M. Baudet*. Le Secrétaire: *E. Bachmann*.

Geometrie mit Strecken

Von Dr. Ing. habil. Karl Rinner, Graz

(Schluß)

Der Widerspruch $W = \Phi_0$ kann nach (6) berechnet werden; zweckmäßiger wird hierzu aber das nachstehende Formelsystem verwendet:

$$\left. \begin{aligned} W &= s_6 - \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ \Delta x &= \frac{2}{s_1} (F_{12} + F_{15}) \\ \Delta y &= \frac{1}{2 s_1} (s_2^2 - s_3^2 + s_4^2 - s_5^2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Für $W = 0$ folgt hieraus auch eine zwischen Vierecksfläche und den Seiten s_i bestehende Identität, aus welcher sich eine allgemeingültige Flächenformel für das Viereck ableiten lässt:

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{4 s_1^2 s_6^2 - (s_2^2 - s_3^2 + s_4^2 - s_5^2)} \quad (9)$$

Für ein Parallelogramm vereinfachen sich die Formeln (7) beträchtlich. Wegen

$f_2 = f_5 = 1$, $s_2 = s_4$, $s_3 = s_5$, $s_{32} = -s_{52}$, $s_{25} = -s_{45}$
wird

$$s_{31} + s_{41} = s_1, s_{32} - s_{62} = -s_2, s_{45} - s_{65} = -s_5$$

und damit folgt aus (7):

$$s_1 v_1 - s_2 v_2 - s_3 v_3 - s_4 v_4 - s_5 v_5 + s_6 v_6 + s_6 W = 0 \quad (10)$$

Im Falle eines quadratischen Viereckes wird $s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s$, $s_1 = s_6 = \sqrt{2} s$ und somit:

$$(v_1 + v_6) \sqrt{2} - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 + W \sqrt{2} = 0 \quad (11)$$

Zwei Beispiele sollen die Anwendung der Formeln (7) und (11) zeigen.

a) Allgemeines Viereck: Die Seiten s_i wurden gemessen, s_{ik} und f_i nach einer Skizze 1 : 10 000 (Abb. 3) graphisch ermittelt. Die Berechnung des Widerspruches erfolgte nach (8).

	s_i	s_{ik}	a_i	v_i	$s_i + v_i$
1	1210	31 760	+ 0,83	+ 0,72	1210,72
2	655	41 310	- 0,73	- 0,63	654,37
3	902	62 1045	- 0,86	- 0,74	901,26
4	1445	65 1820	- 0,46	- 0,40	1444,60
5	1680	f 1,87	+ 0,04	+ 0,03	1680,03
6	1946	f 0,62	+ 1,00	+ 0,86	1946,86

$$W = - 2,73 \quad [aa] = 3,17$$

$$\Delta x = 1892,80 \quad k = \frac{-W}{[aa]} = + 0,86 \quad m_0 = \sqrt{[vv]} = \pm 1,5$$

$$\Delta y = 462,30$$

b) Quadratisches Viereck:

	s_i	a_i	v_i	$s_i + v_i$
1	7065	- 1,000	- 4,3	7060,7
2	5010		+ 3,1	5013,1
3	4990		+ 3,1	4993,1
4	4995	{ 0,707	+ 3,1	4998,1
5	4992		+ 3,1	4995,1
6	7085	- 1,000	- 4,3	7080,7

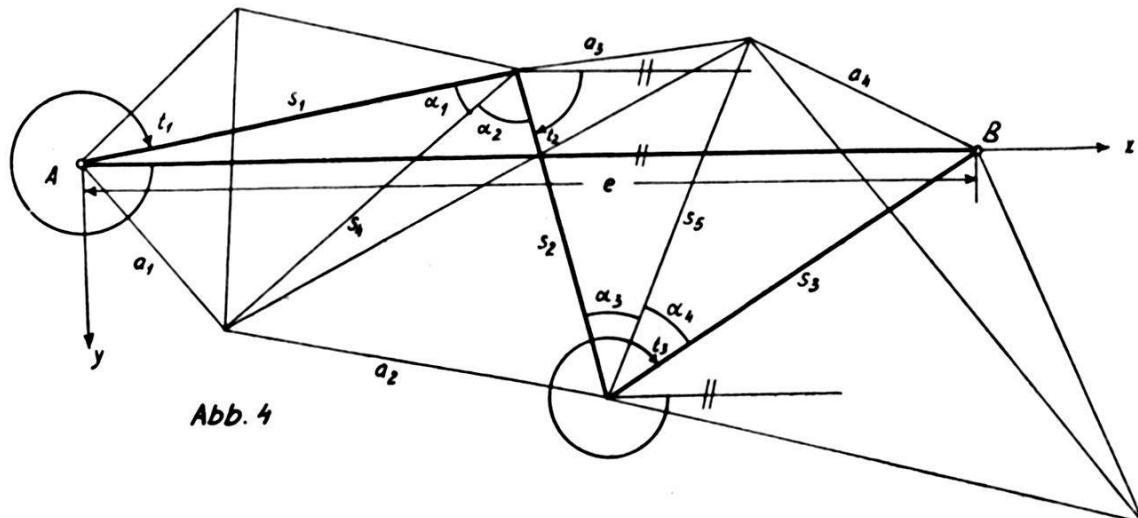
$$W = + 17,1 \quad [aa] = 4 \quad k = - 4,28 \quad m_0 = \pm 8,5$$

Nr. 3

Ein nur aus Strecken gebildetes Netz mit n Knoten ist durch $2n-3$ Strecken bestimmt. Bezeichnet s die Anzahl der im Netz vorhandenen Strecken, so bestehen $z = s - 2n + 3$ (innere) Bedingungsgleichungen. Z. B. ist im Falle der in Nr. 2 beschriebenen Grundfigur $s = 6$, $n = 4$ und somit $z = 1$.

Ist das Netz aus z Grundfiguren aufgebaut, deren jede mit der benachbarten eine Seite gemeinsam hat, so gibt jede der Grundfiguren Anlaß zu einer Gleichung (7) und die Netzausgleichung besteht in der gemeinsamen Ausgleichung der z Gleichungen (7). Sind darüber hinaus noch Diagonale gemessen, so lassen sich die dadurch gegebenen Bedingungsgleichungen am einfachsten mit Hilfe von Polygonzügen, welche vom Anfangspunkt zum Endpunkt der Diagonale führen, angeben.

Als Beispiel hiefür sei eine einfache Aneinanderreihung von Grundfiguren (Kette) angeführt, in welcher die Diagonale $\overline{AB} = e$ gemessen wurde. Bezeichnen s die Seiten und t die von e (x -Achse) an gezählten Richtungswinkel des Zuges von A nach B , so besteht nach dem Projektionssatz die Bedingungsgleichung (Abb. 4):



$$\Phi(s) = e - \sum s_i \cos t_i = 0$$

$$t = t_1 + \sum \pm a_i \quad \begin{array}{l} + \text{ wenn } a_i \text{ links} \\ - \text{ wenn } a_i \text{ rechts} \end{array} \text{ vom Zug} \quad (12)$$

Die Winkel a_i können nach dem Cosinussatz aus den Dreiecken $(s_l s_m a_i)$ berechnet werden.

$$\cos a_i = \frac{1}{2 s_l s_m} (s_l^2 + s_m^2 - a_i^2)$$

Durch Entwicklung an der durch die Meßwerte bestimmten Näherungsstelle folgt:

$$\Phi = \Phi_0 + d\Phi, \quad \Phi_0 = W$$

$$d\Phi = de - \sum \frac{\Delta x}{s} ds - \Delta y dt \quad (13)$$

$$dt = \sum \pm da_i \quad \begin{array}{l} + \text{ wenn } a_i \text{ links} \\ - \text{ wenn } a_i \text{ rechts} \end{array} \text{ vom Zug}$$

$$2 F_{zm} da_i = a_i da_i - a_{il} ds_i - a_{im} ds_m$$

Darin bezeichnet a_i die dem (Brechungs-)Winkel a_i gegenüberliegende Seite, s_l und s_m die diesen Winkel einschließenden Netzseiten, a_{il} , a_{im} die Orthogonalprojektion der Seite a_i auf s_l und s_m und F_{lm} , die von s_l s_m eingeschlossene Dreiecksfläche.

Das Formelsystem (13) geht in (7) über, wenn nur 2 Dreiecke (Grundfigur) betrachtet und die Bezeichnungen entsprechend geändert werden.

Sur un théorème de la méthode des moindres carrés

par A. Ansermet

Considérons un système de n équations à u inconnues ($n > u$):

$$F_i = F_i(x, y, z \dots l_i + v_i) = 0 \quad i = 1, 2 \dots n \quad (1)$$

que l'on ramène à la forme linéaire grâce aux valeurs provisoires $x_0, y_0, z_0 \dots$ des inconnues

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi & y &= y_0 + \eta & z &= z_0 + \zeta \dots \\ [vv] &= \text{minimum} & & & & (\text{poids des } l_i \text{ égaux}) \end{aligned}$$

Les équations primitives prendront la forme classique

$$F'_i = v_i + a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \dots + f'_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots n) \quad (2)$$

où f'_i est le terme absolu.

Le système d'équations normales peut s'écrire

$$\left. \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 = f_1(v_1, v_2 \dots v_n) \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n = 0 = f_2(v_1, v_2 \dots v_n) \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0 = f_3(v_1, v_2 \dots v_n) \\ \dots \dots \dots \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = 0 = f_u(v_1, v_2 \dots v_n) \end{array} \right\} \quad (3)$$

Donc en tout $(n + u)$ équations à $(n + u)$ inconnues soit n résidus v et u inconnues $\xi, \eta, \zeta \dots$

Dans le numéro de juin 1948, M. le Prof. Dr Baeschlin a établi, avec toute la clarté désirable, dans quelles conditions le calcul des inconnues $\xi, \eta, \zeta \dots$ devenait indéterminé. Le but de ces lignes est de signaler une solution qui est peut-être mieux à la portée de certains lecteurs.

Au lieu de considérer le déterminant fonctionnel relatif aux inconnues $\xi, \eta, \zeta \dots$ nous grouperons les systèmes (2) et (3) à $(n + u)$ inconnues; le déterminant devient

$$D = \frac{\partial(F'_1, F'_2, \dots, F'_n, f_1, f_2, \dots, f_u)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, \dots, v_1, v_2, \dots, v_n)}$$