

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 48 (1950)

Heft: 7

Artikel: Geometrie mit Strecken

Autor: Rinner, Karl

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-207444>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

möglich sind, müssen abgewartet werden, bis ein endgültiges Urteil über Wirkungsweise und Bedeutung der Maulwurfsdrainage gefällt werden kann.

Wo die Maulwurfsdrainage aber nur deshalb abgelehnt wird, weil sie die Bedeutung der „klassischen“ Drainage herabsetzen und damit eine Maßnahme aus dem kulturtechnischen Sektor in den der Bodenbearbeitung überführen könnte, so ist dies ein bedenkliches Zeichen dafür, daß man sich in solchen Kreisen nicht im klaren ist, was bei einer Drainage Mittel ist und was Zweck.

Geometrie mit Strecken

Von Dr. Ing. habil. Karl Rinner, Graz

Durch die Möglichkeit, große Strecken mit Hilfe von optischen oder elektrischen Wellen direkt messen zu können, hat Festpunktbestimmung durch Streckenmessung große Bedeutung erlangt. Unbeschadet der Ungenauigkeit der derzeit verwendeten Meßgeräte, erscheint es daher angebracht, die theoretischen Möglichkeiten zu untersuchen und Verfahren für die Geometrie mit Strecken bereitzustellen. Diese betreffen die bisher nicht beachteten Netzkonfigurationen, welche nur aus Strecken gebildet werden (Streckennetz) und jene, in welchen Strecken und Winkel gleichberechtigt verwendet werden.

Zur Einführung in die Problemstellung* werden im folgenden einige Aufgaben der Streckengeometrie beschrieben, und Verf. hofft damit Anregung zu einer weiteren Bearbeitung der einschlägigen Probleme zu geben.

Nr. 1

Das Dreieck, das die Grundfigur für die Geometrie mit Winkeln darstellt, hat in der Streckengeometrie eine untergeordnete Bedeutung, weil das durch 3 Seiten bestimmte Dreieck keine Überbestimmung enthält; doch ist es rechentechnisch wichtig. Aus diesem Grund folgen einige Be trachtungen über das durch 3 Seiten bestimmte Dreieck und den Bogen schnitt.

a) Die Fläche des durch 3 Seiten s_1, s_2, s_3 bestimmten Dreieckes ist durch die Heronsche Formel gegeben:

$$F = \sqrt{s(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} \quad (1)$$
$$2s = s_1 + s_2 + s_3$$

Seitenfehler ds_i bewirken einen Flächenfehler dF , der hieraus nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmt werden kann. Durch implizite Differenziation folgt erst:

* Siehe auch den Aufsatz d. Verf. „Geod. Probleme in der nautischen Vermessung“, Berlin 1948, Verlag für Technik und Kultur.

$$2 F dF = ds \frac{F^2}{s} + \sum d(s - s_i) \frac{F^2}{s - s_i}$$

$$2 ds = \sum ds_i \quad 2 d(s - s_i) = \sum \pm ds_k \quad \pm \text{für } k \neq i$$

Bezeichnet ρ den Radius des Inkreis und ρ_i den Radius des die Seite s_i berührenden Ankreises, so bestehen die Beziehungen

$$\rho = \frac{F}{s} \quad \rho_i = \frac{F}{s - s_i} \quad (2)$$

und mit diesen folgt:

$$dF = \frac{1}{4} \sum ds_i (\rho + \sum \pm \rho_k) \quad \pm \text{für } k \neq i$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (1) (2) folgt z. B. für den Koeffizienten von ds_1

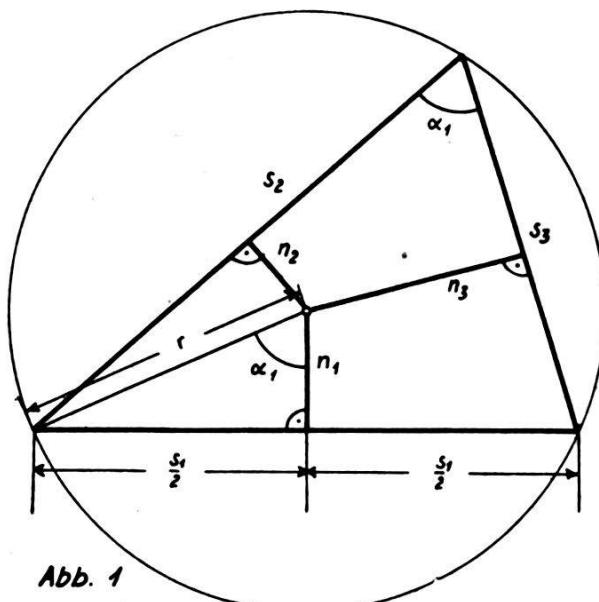
$$\frac{s_1 s_2 s_3}{4 F} \cdot \frac{-s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{2 s_2 s_3} = r \cos \alpha_1 = n_1$$

und durch zyklisches Vertauschen ein entsprechender Ausdruck für die Koeffizienten von ds_2 und ds_3 . Darin bedeuten r den Radius des Umkreises und α_i den der Seite s_i gegenüberliegenden Dreieckswinkel, während n_i den Normalabstand des Umkreismittelpunktes von der Seite s_i bezeichnet. Somit folgt für den bestimmten Fehler der Dreiecksfläche die einfache Beziehung:

$$dF = n_1 ds_1 + n_2 ds_2 + n_3 ds_3 \quad (3)$$

Für den mittleren Flächenfehler ergibt sich, wenn m_i die mittleren Seitenfehler sind:

$$m_F = \pm \sqrt{n_1^2 m_1^2 + n_2^2 m_2^2 + n_3^2 m_3^2} \quad (4)$$



Ein Seitenfehler geht in das Produkt mit dem Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite in den Flächenfehler ein. Sein Einfluß verschwindet, wenn dieser Abstand gleich Null wird und dies ist nur dann der Fall, wenn die fehlerhafte Seite Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes ist.

b) Der mittlere Fehler eines durch einfachen Bogenschnitt bestimmten Punktes läßt sich auf Grund des obigen Ergebnisses leicht ermitteln. Bezeichnet h_1 die Höhe auf die Verbindungsgerade s_1 der gegebenen

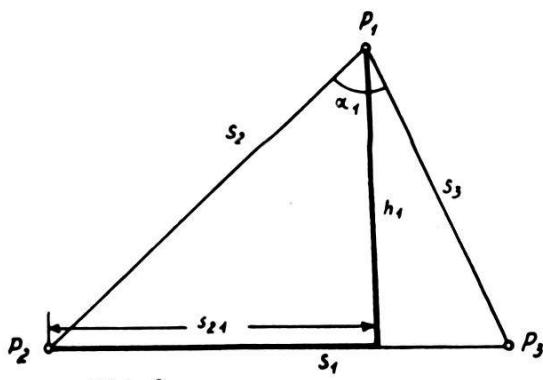


Abb. 2

Punkte $P_2 P_3$ (Abb. 2) und s_{21} die Projektion von s_2 auf s_1 , so folgen aus den Beziehungen

$$s_1 h_1 = 2F \quad 2 s_1 s_{21} = s_1^2 + s_2^2 - s_3^2$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned} s_1 dh_1 &= (2n_1 - h_1) ds_1 + 2n_2 ds_2 + 2n_3 ds_3 \\ s_1 ds_{21} &= s_{31} ds_1 + s_2 ds_2 - s_3 ds_3 \end{aligned}$$

Mit $m_1 = 0$ und $m_2 = m_3 = \mu$ folgt hieraus für den mittleren Punktfehler des durch $s_2 s_3$ bestimmten Punktes:

$$M^2 = m_{h1}^2 + m_{s_{21}}^2 = \left(\frac{\mu}{s_1} \right)^2 (4 n_2^2 + 4 n_3^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

Unter Beachtung von $n_i : (s_i/2) = \cot \alpha_i$ (Abb. 1) ergibt sich hieraus:

$$M^2 = \mu^2 \left[\left(\frac{s_2}{s_1 \sin \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{s_3}{s_1 \sin \alpha_3} \right)^2 \right]$$

oder nach dem Sinus-Satz schließlich:

$$M = \pm \frac{\mu}{\sin \alpha_1} \sqrt{2} \quad (5)$$

Der mittlere Punktfehler eines durch Bogenschnitt bestimmten Punktes wird also am kleinsten, wenn die beiden Bogen ($s_2 s_3$) sich rechtwinklig schneiden.

Nr. 2

Ein Viereck, in dem 4 Seiten und beide Diagonalen gemessen werden, enthält eine Überbestimmung, aus welcher die gemessenen Strecken verbessert werden können. Ein solches Viereck stellt daher die Grundfigur der Streckengeometrie dar und entspricht dem Dreieck der Winkelgeometrie.

Mit den aus Abb. 3 ersichtlichen Bezeichnungen folgt für die durch die Überbestimmung gegebene Bedingungsgleichung:

$$\left. \begin{aligned} \phi(s_i) &= s_6 - \sqrt{s_2^2 + s_5^2 - 2 s_2 s_5 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} \\ s_3^2 &= s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos \alpha_1 \\ s_4^2 &= s_1^2 + s_5^2 - 2 s_1 s_5 \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Entwicklung an der durch die Meßwerte festgelegten Näherungsstelle ergibt die lineare Form:

$$\phi \equiv \phi_0 + d\phi = 0$$

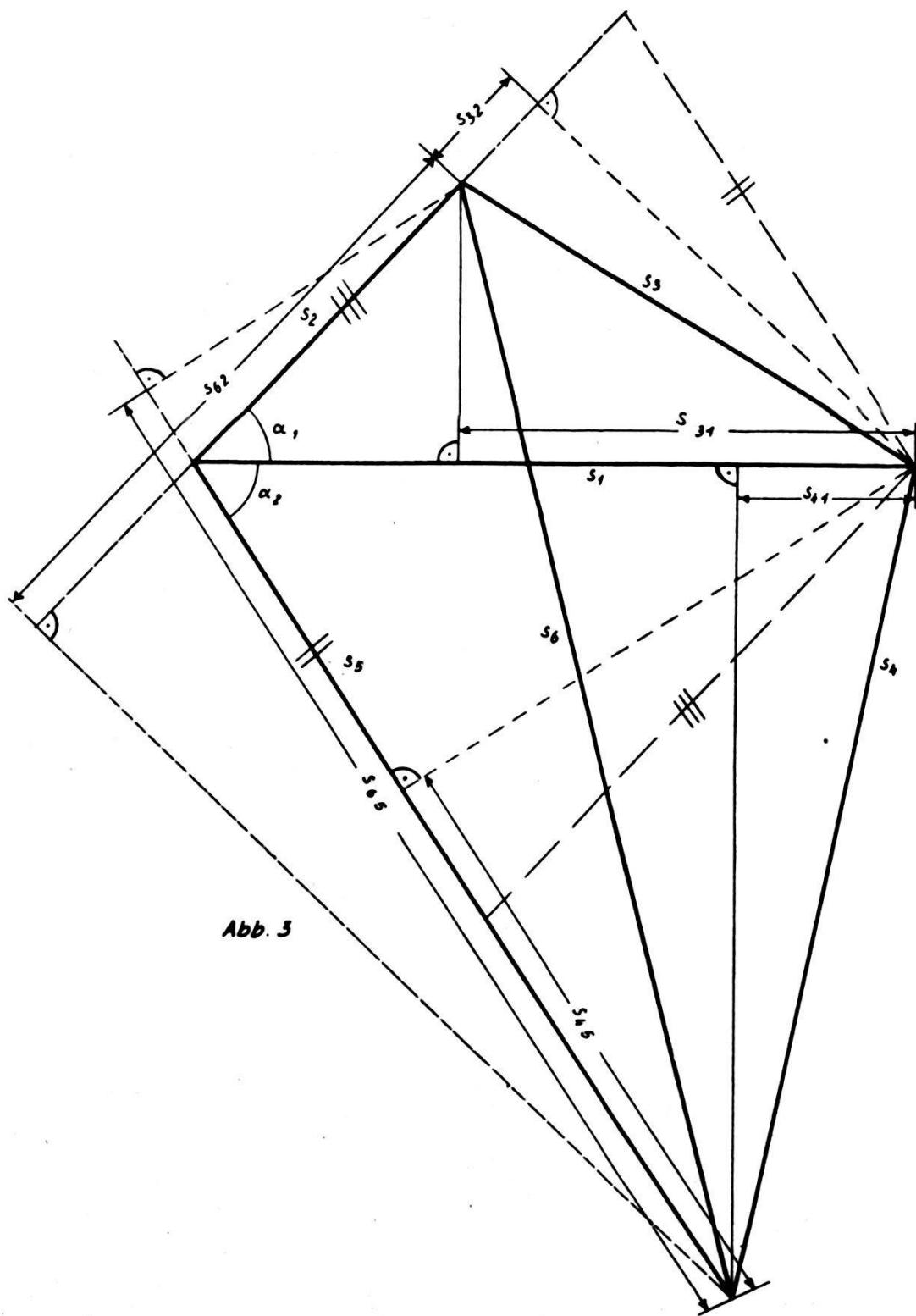
Bezeichnen F_{ik} die Fläche des von den Seiten $s_i s_k$ eingeschlossenen Dreieckes und s_{ik} die orthogonale Projektion der Seite s_i auf s_k , so gelten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} d\phi &= ds_6 - \frac{s_{62}}{s_6} ds_2 - \frac{s_{65}}{s_6} ds_5 - \frac{2F_{25}}{s_6} (d\alpha_1 + d\alpha_2) \\ 2F_{12} d\alpha_1 &= -s_{31} ds_1 - s_{32} ds_2 + s_3 ds_3 \\ 2F_{25} d\alpha_2 &= -s_{41} ds_1 + s_4 ds_4 - s_{45} ds_5 \end{aligned}$$

und aus diesen folgt die Fehlerbedingungsgleichung:

$$\left. \begin{aligned} \sum a_i v_i + W &= 0 \\ a_1 &= \frac{1}{s_6} (f_2 s_{31} + f_5 s_{41}) & a_3 &= -f_2 \frac{s_3}{s_6} \\ a_2 &= \frac{1}{s_6} (f_2 s_{32} - s_{62}) & a_4 &= -f_5 \frac{s_4}{s_6} \\ a_5 &= \frac{1}{s_6} (f_5 s_{45} - s_{65}) & a_6 &= 1 \\ f_2 &= \frac{F_{25}}{F_{21}} & f_5 &= \frac{F_{52}}{F_{51}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Der Quotient f_2 der über der Seite s_2 stehenden Dreiecke ($s_2 s_3 s_1$) und ($s_2 s_6 s_5$) ist gleich dem Quotienten der zu s_2 gehörigen Höhen dieser Dreiecke, oder auch gleich dem Quotienten aus s_5 (oder s_3) und dem zwischen



$s_2 s_4$ liegenden Stück der Parallelen zu s_5 (oder s_6) durch den Schnittpunkt von $s_3 s_1$ (oder $s_5 s_6$). Entsprechendes gilt auch für den Flächenquotienten f_b . Diese Werte sowie die Projektionen s_{ik} lassen sich daher in einfacher Weise einer maßstäblichen Figur entnehmen. Dabei ist zu beachten, daß s_{ik} in der Richtung von s_k positiv, in der Gegenrichtung aber negativ zu zählen ist.

(Schluß folgt)