**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 48 (1950)

**Heft:** 5

**Artikel:** Die Genauigkeit der Polygonknotenpunkte

**Autor:** Salonen, Eero

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-207437

2 cos $z$ abgetragen, und auf der Diagonalen erhalten wir anstelle von cos $A$ nunmehr cos $t$ (Fig. 5).

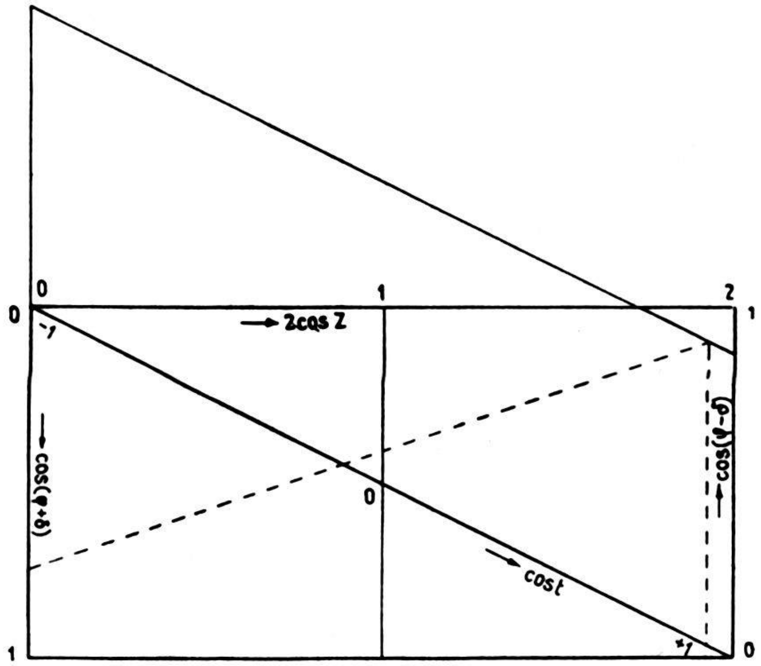


Fig. 5

Da der Aufbau und die Maßstabsverhältnisse der beiden Diagramme völlig übereinstimmen, lassen sie sich ohne weiteres in ein einziges vereinen, ohne die Übersichtlichkeit nennenswert zu beeinträchtigen.

# Die Genauigkeit der Polygonknotenpunkte

*Von Dr.-Ing. Eero Salonen, Helsinki*

Da die Knotenpunkte der Polygonmessung im allgemeinen als ziemlich genau, ja sogar als eine Art Surrogat für die Dreieckspunkte angesehen werden, haben wir Grund, die Genauigkeit derselben fehlertheoretisch zu prüfen.

Im folgenden ist eine solche Untersuchung ausgeführt, indem die Genauigkeit des Knotenpunktes mit der Genauigkeit eines in der Mitte eines mit entsprechender Präzision gemessenen Polygonzuges befindlichen Punktes verglichen ist[1].

Bei der Untersuchung verfahren wir so, daß wir fehlertheoretisch entwickeln, wie der mittlere Fehler des Knotenpunktes wächst, wenn die Zahl der Züge wächst. Danach werden diese mittleren Fehler mit den mitt-

[1] Der Verfasser hat in etwas einfacherer Form eine ähnliche Genauigkeitsuntersuchung „Monikulmiomittauksen solmupisteiden tarkkuudesta“ (Über die Genauigkeit der Knotenpunkte der Polygonmessung) in der Zeitschrift „Maanmittaus“ 1949, S. 18–24, dargestellt.

leren Fehlern des Knotenpunktes „zweier Züge“ verglichen. Die Genauigkeit eines solchen Knotenpunktes ist ja natürlich ungefähr dieselbe wie die Genauigkeit eines Punktes in der Mitte eines solchen Polygonzuges, in dem die Seitenzahl gleich der Summe zweier in den Knotenpunkt führender Züge ist[1].

Bei der Entwicklung der Fehler stützen wir uns anfangs auf die Formeln von O. Eggert[2]. Zur Vereinfachung der Aufgabe wird man im folgenden – wie auch in der Untersuchung Eggerts – auf gestreckte Polygonzüge von gleicher Länge beschränken, bei denen auch alle Seiten gleich lang sein sollen. Es soll auch eine weitere Annahme gemacht werden, die eine symmetrische Darstellung der Formeln ermöglicht. Wir wollen annehmen, daß im Knotenpunkt nicht die Winkel zwischen den hier zusammenlaufenden Schlußstrecken der einzelnen Züge gemessen sind, sondern es soll ein beliebiges Hilfsziel eingeführt werden, nach dem für jeden Zug im Knotenpunkt der Abschlußwinkel gemessen wird. Auf diese Weise werden die Messungen der einzelnen Züge vollständig unabhängig voneinander. Wenn diese Voraussetzung auch praktisch meistens nicht erfüllt sein wird, so hat dies auf die Fehlertheorie kaum einen nennenswerten Einfluß.

Es mögen $z$ Züge mit $n$ Strecken, also $n + 1$ Punkten vorliegen. Der Abschlußrichtungswinkel ist als Mittel aus den $z$ einzelnen Bestimmungen zu bilden, wobei eine Berücksichtigung der Gewichte wegfällt. Bezeichnen wir die wahren Fehler der gemessenen Winkel im ersten Zug mit $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2 \ldots \varepsilon'_{n+1}$ und im Zuge $v$ $\varepsilon_1^{(\nu)}, \varepsilon_2^{(\nu)} \ldots \varepsilon_{n+1}^{(\nu)}$, so sind die wahren Fehler der Abschlußrichtungswinkel der einzelnen Züge

$$\left.\begin{aligned} a_e' &= \varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \varepsilon_3' + \ldots + \varepsilon'_{n+1} \\ a_e'' &= \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_3'' + \ldots + \varepsilon''_{n+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_e^{(\nu)} &= \varepsilon_1^{(\nu)} + \varepsilon_2^{(\nu)} + \varepsilon_3^{(\nu)} + \ldots + \varepsilon_{n+1}^{(\nu)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

und der Fehler des Mittelwerts ist

$$\left.\begin{aligned} a_m = \frac{1}{z} \Big\{ & \varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \varepsilon_3' + \ldots + \varepsilon'_{n+1} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varepsilon_1^{(\nu)} + \varepsilon_2^{(\nu)} + \varepsilon_3^{(\nu)} + \ldots + \varepsilon_{n+1}^{(\nu)} \Big\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = \frac{1}{z} & \Sigma [\varepsilon] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

[1] Siehe „Maanmittaus“ 1949, S. 20.

[2] O. Eggert: Fehlertheorie der Polygonknotenpunkte, Zeitschrift für Vermessungswesen 1949, S. 62–69.

Die Abweichung des Abschlußrichtungswinkels eines einzelnen Zuges vom Mittelwert ist der Winkelabschlußfehler $f_\beta^{(\nu)}$ dieses Zuges. Wir erhalten

$$f_\beta^{(\nu)} = a_m - a_e^{(\nu)} = \frac{1}{z} \Sigma [\varepsilon] - [\varepsilon^{(\nu)}] \tag{3}$$

Zur Berechnung der wahren Fehler $\eta_m$ und $\xi_m$ der Koordinaten $y$ und $x$ des Knotenpunktes wird angenommen, daß die wahren Fehler der Strecken $\lambda_1^{(\nu)}, \lambda_2^{(\nu)} \ldots \lambda_n^{(\nu)}$ und die wahren Fehler der Richtungswinkel $\delta_1^{(\nu)}, \delta_2^{(\nu)} \ldots \delta_n^{(\nu)}$ sind. Wenn der Richtungswinkel der als gerade angenommenen Züge im ersten Zug mit $a'$ und im Zuge $\nu$ mit $a^{(\nu)}$ bezeichnet wird und die Seitenlänge $s$ ist, erhalten wir für die Abweichung $\eta^{(\nu)}$ von $y$ und die Abweichung $\xi^{(\nu)}$ von $x$ des Endpunktes eines einzelnen Zuges die Werte

$$\left.\begin{aligned} \eta^{(\nu)} &= \sin a^{(\nu)} [\lambda^{(\nu)}] + \cos a^{(\nu)} s [\delta^{(\nu)}] \\ \xi^{(\nu)} &= \cos a^{(\nu)} [\lambda^{(\nu)}] - \sin a^{(\nu)} s [\delta^{(\nu)}] \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Die wahren Fehler $\eta_m$ und $\xi_m$ der Koordinaten $y$ und $x$ des Knotenpunktes sind die Mittelwerte dieser (4) Fehlerelemente. Also:

$$\left.\begin{aligned} \eta_m = \frac{1}{z} \Big\{ &\sin a' [\lambda'] + \cos a' s [\delta'] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sin a^{(\nu)} [\lambda^{(\nu)}] + \cos a^{(\nu)} s [\delta^{(\nu)}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \end{aligned}\right| \; z \text{ Stück}$$

$$= \frac{1}{z} \left\{ \sum_{\nu=1}^{z} \sin a^{(\nu)} [\lambda^{(\nu)}] + \cos a^{(\nu)} s [\delta^{(\nu)}] \right. \tag{5}$$

$$\xi_m = \frac{1}{z} \left\{ \sum_{\nu=1}^{z} \cos a^{(\nu)} [\lambda^{(\nu)}] - \sin a^{(\nu)} s [\delta^{(\nu)}] \right.$$

Bei der Berechnung eines einzelnen Zuges ($v$) wird der Abschlußfehler $f_\beta^{(\nu)}$ (Formel 3) gleichmäßig auf alle Winkel, deren Zahl $n + 1$ ist, verteilt. Der Wert $v$ der Verbesserung des Winkels ist also in jedem einzelnen Zug

$$v^{(\nu)} = \frac{1}{n+1} f_\beta^{(\nu)}$$

oder, wenn die Formel (3) in Betracht genommen wird

$$v^{(\nu)} = \frac{1}{z(n+1)} \Sigma [\varepsilon] - \frac{1}{n+1} [\varepsilon^{(\nu)}] \tag{6}$$

Die wahren Fehler $\delta^{(\nu)}$ der Richtungswinkel eines einzelnen Zuges sind:

$$\delta_1^{(\nu)} = \varepsilon_1^{(\nu)} + v^{(\nu)}$$

$$\delta_2^{(\nu)} = \varepsilon_1^{(\nu)} + \varepsilon_2^{(\nu)} + 2\, v^{(\nu)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta_n^{(\nu)} = \varepsilon_1^{(\nu)} + \varepsilon_2^{(\nu)} + \ldots + \varepsilon_n^{(\nu)} + n \cdot v^{(\nu)}$$

$$\therefore$$

$$[\delta^{(\nu)}] = n\,\varepsilon_1^{(\nu)} + (n-1)\,\varepsilon_2^{(\nu)} + (n-2)\,\varepsilon_3^{(\nu)} + \ldots + \varepsilon_n^{(\nu)} + \frac{n(n+1)}{2}\, v^{(\nu)}$$

Und wenn für $v^{(\nu)}$ der Wert (6) eingesetzt wird

$$[\delta^{(\nu)}] = \frac{n}{2}\,\varepsilon_1^{(\nu)} + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\varepsilon_2^{(\nu)} + \left(\frac{n}{2} - 2\right)\varepsilon_3^{(\nu)} + \ldots + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\varepsilon_n^{(\nu)} - \frac{n}{2}\,\varepsilon_{n+1}^{(\nu)} + \frac{n}{2z}\,\Sigma[\varepsilon] \tag{7}$$

Diese Werte $[\delta]$ setzen wir in der Gleichung (5) ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned}
\eta_m &= \frac{1}{z}\sum_{\nu=1}^{z} \sin\alpha^{(\nu)}\,[\lambda^{(\nu)}] + \frac{s}{z}\sum_{\nu=1}^{z}\cos\alpha^{(\nu)}\left\{\frac{n}{2}\,\varepsilon_1^{(\nu)} + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\varepsilon_2^{(\nu)} + \right.\\
&\qquad \left. + \ldots + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\varepsilon_n^{(\nu)} - \frac{n}{2}\,\varepsilon_{n+1}^{(\nu)} + \frac{n}{2z}\,\Sigma[\varepsilon]\right\}\\
\xi_m &= \frac{1}{z}\sum_{\nu=1}^{z} \cos\alpha^{(\nu)}\,[\lambda^{(\nu)}] - \frac{s}{z}\sum_{\nu=1}^{z}\sin\alpha^{(\nu)}\left\{\frac{n}{2}\,\varepsilon_1^{(\nu)} + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\varepsilon_2^{(\nu)} + \right.\\
&\qquad \left. + \ldots + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\varepsilon_n^{(\nu)} - \frac{n}{2}\,\varepsilon_{n+1}^{(\nu)} + \frac{n}{2z}\,\Sigma[\varepsilon]\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Wir machen nun weiter die Annahme, daß die Züge symmetrisch um den Knotenpunkt herum verteilt sind. Es ist dann

$$\sum_{\nu=1}^{z} \cos\alpha^{(\nu)} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{z} \sin\alpha^{(\nu)} = 0$$

infolgedessen fallen in dem vorstehenden Ausdruck (8) für $\eta_m$ und $\xi_m$ alle Glieder $\frac{n}{2z}\,\Sigma[\varepsilon]$ weg, und es bleibt übrig

$$\left.\begin{aligned}\eta_m &= \frac{1}{z}\sum_{\nu=1}^{z}\sin a^{(\nu)}\,[\lambda^{(\nu)}] + \frac{s}{z}\sum_{\nu=1}^{z}\cos a^{(\nu)}\left\{\frac{n}{2}\,\varepsilon_1^{(\nu)} + \left(\frac{n}{2}-1\right)\varepsilon_2^{(\nu)} + \right.\\ &\qquad \left. + \ldots - \left(1-\frac{n}{2}\right)\varepsilon_n^{(\nu)} - \frac{n}{2}\,\varepsilon_{n+1}^{(\nu)}\right\}\\ \xi_m &= \frac{1}{z}\sum_{\nu=1}^{z}\cos a^{(\nu)}[\lambda^{(\nu)}] - \frac{s}{z}\sum_{\nu=1}^{z}\sin a^{(\nu)}\left\{\frac{n}{2}\,\varepsilon_1^{(\nu)} + \left(\frac{n}{2}-1\right)\varepsilon_2^{(\nu)} + \right.\\ &\qquad \left. + \ldots - \left(1-\frac{n}{2}\right)\varepsilon_n^{(\nu)} - \frac{n}{2}\,\varepsilon_{n+1}^{(\nu)}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Jetzt gehen wir von den wahren Fehlern zu mittleren Fehlern über und nehmen an, daß der mittlere Fehler der Strecken $m_s$ und der Winkel $m_w$ ist. So erhalten wir als mittlere Fehler $M_y$ und $M_x$ der Koordinaten des Knotenpunktes.

$$M^2_y = \frac{n}{z^2}\,m_s^2\sum_{\nu=1}^{z}\sin^2 a^{(\nu)} + \frac{s^2}{z^2}\,m_w^2\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{n}{2}-2\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \ldots + \left(1-\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right\}\sum_{\nu=1}^{z}\cos^2 a^{(\nu)}$$

$$M^2_x = \frac{n}{z^2}\,m_s^2\sum_{\nu=1}^{z}\cos^2 a^{(\nu)} + \frac{s^2}{z^2}\,m_w^2\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{n}{2}-2\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \ldots + \left(1-\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right\}\sum_{\nu=1}^{z}\sin^2 a^{(\nu)}$$

Wenn $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{n}{2}-2\right)^2 + \ldots + \left(1-\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 =$

$= \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{12}$, dann wird

$$\left.\begin{aligned}M_y^2 &= \frac{n}{z^2}\,m_s^2\sum_{\nu=1}^{z}\sin^2 a^{(\nu)} + \frac{s^2}{z^2}\,m_w^2\,\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{12}\sum_{\nu=1}^{z}\cos^2 a^{(\nu)}\\ M_x^2 &= \frac{n}{z^2}\,m_s^2\sum_{\nu=1}^{z}\cos^2 a^{(\nu)} + \frac{s^2}{z^2}\,m_w^2\,\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{12}\sum_{\nu=1}^{z}\sin^2 a^{(\nu)}\end{aligned}\right. \quad (10)$$

Wenn beachtet wird, daß

$$\sin^2 a^{(\nu)} + \cos^2 a^{(\nu)} = 1$$

ergibt sich als mittlerer Fehler des Knotenpunktes

$$M = \pm\sqrt{M_y^2 + M_x^2}$$

$$M = \pm \sqrt{n\, m_s^2 + \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{12}\, s^2\, m_w^2} : \sqrt{z} \qquad (11)$$

Der Formel (11) gemäß wären also *die Genauigkeiten der Knotenpunkte in gleichlangen und gleichseitigen und mit derselben Präzision gemessenen Zügen direkt proportional der Quadratwurzel der Zahl der Züge.*

Da der „Knotenpunkt zweier Züge“, was die Genauigkeit betrifft, einem Polygonpunkt in der Mitte solch eines gewöhnlichen Polygonzuges entspricht, der sowohl Koordinaten- als Winkelanschluß hat, *ist also ein im allgemeinen in Frage kommender Knotenpunkt mit 3...4 Zügen nicht mehr als ungefähr 20...40 % genauer als ein gewöhnlicher Polygonpunkt.*

Interessant wäre es, auf Grund des Vermessungsmaterials zu konstatieren, wie groß die Genauigkeit derKnotenpunkte ist. Dies könnte so ausgeführt werden, daß im Fixpunktnetz als Knotenpunkt ein Dreieckspunkt gewählt wird, für den mittels von anderen Dreieckspunkten kommenden Zügen, nach der Knotenpunktsmethode sowie auch als gewöhnliche Züge berechnet, die Koordinaten ausgerechnet werden, die dann mit den bei der Dreiecksmessung erhaltenen Koordinaten verglichen werden. Um irgendwelche Gewißheit der Sache zu bekommen, müßten mehrere solche Knotenpunktberechnungen ausgeführt werden, wodurch die Untersuchung ein ansehnliches Maß Arbeit erfordert.

Auf oben beschriebene Weise sind im Polygonnetz von Helsinki einige Knotenpunkte mit vier Zügen berechnet und die in folgender Tabelle angegebenen Resultate erzielt worden:

| Anfangspunkt | Knotenpunkt | Endpunkt | Summe der Strecken | | Anzahl der Berechnungswinkel | | Punktfehler als gewöhnl. Polygonpunkt $f$ | Punktfehler als Knotenpunkt $f_k$ | $f : f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nr. | Nr. 0 | Nr. 0 | m | m | | | mm | mm | |
| 27 | 289 | 288 | 615 | 1065 | 7 | 10 | 6 | 18 | 0,33 |
| 283 | 289 | 26 | 1295 | 1225 | 10 | 9 | 35 | | 1,94 |
| 24 | 382 | 384 | 1290 | 907 | 14 | 10 | 25 | 22 | 1,14 |
| 374 | 382 | 373 | 504 | 716 | 6 | 8 | 36 | | 1,64 |
| 377 | 381 | 290 | 1286 | 2176 | 15 | 20 | 83 | 93 | 0,89 |
| 573 | 381 | 384 | 2236 | 2017 | 17 | 19 | 125 | | 1,34 |
| 378a | 291a | 284 | 1330 | 1046 | 14 | 7 | 19 | 14 | 1,36 |
| 288 | 291a | 425 | 1303 | 1506 | 11 | 16 | 44 | | 3,14 |
| Durchschnittlich | | | 1282 m | | 12 | | 47 | 37 | 1,47 ±0,29 |

Dieser aus einem ziemlich beschränkten Observationsmaterial erhaltene Mittelwert 1,47 $\pm$ 0,29 der Beziehungen zwischen den Fehlern der gewöhnlichen Polygonpunkte und denen der Knotenpunkte mit 4 Zügen stimmt – vielleicht zufällig – verhältnismäßig gut mit der oben theoretisch entwickelten Relationszahl 1,4 überein. Beim Vergleich dieser Zahlen ist jedoch zu berücksichtigen, daß auf die erhaltenen scheinbaren Fehler der Polygonpunkte auch die Ungenauigkeit jener Dreieckspunkte einwirkt, die Anfangspunkte und Knotenpunkte der Züge gewesen sind, welche Ungenauigkeit in dem besagten Dreiecksnetz ungefähr einem mittleren Punktfehler von $\pm$ 10 mm entspricht.

Die Formel (11) kann auch von Nutzen sein, wenn beurteilt wird, in welchem Verhältnis die Genauigkeit der Seitenmessung zu der der Winkelmessung stehen soll, damit deren Wirkung ungefähr ebenso groß ist – d.h., daß die Terme $n \cdot m_s^2$ und $\frac{n(n+1)(n+2)}{12} s^2 m_w^2$ ungefähr gleich sind. Wenn z. B. $s = 100$ m, $m_s = \pm 10$ mm und $m_w = \pm 30''$, so bekommen wir

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $n \cdot m_s^2 =$ | 300 | 400 | 500 | *600* | 700 | 800 | 900 | 1000 |
| $\frac{n(n+1)(n+2)}{12}\left(\frac{s\, m_w}{\rho''}\right)^2 =$ | 110 | 220 | 385 | *630* | 920 | 1320 | 1830 | 2420 |

Da in der Praxis bei einem Knotenpunkt oft Züge mit 5 · · · 7 Seiten in Frage kommen, stehen also die dargestellten Genauigkeiten ungefähr im richtigen Verhältnis zueinander.

# Die optischen Mittel zur Berichtigung des Wildschen Reduktions-Distanzmessers RDH

*Von E. Berchtold, Heerbrugg*

## I

Der Reduktions-Distanzmesser RDH ist das Ergebnis einer Weiterentwicklung des bekannten Boßhardt-Zeißschen Reduktions-Distanzmessers. Mit dem RDH können an der waagrechten Latte nicht nur die Horizontaldistanzen, sondern auch die Höhenunterschiede gemessen werden. Die Abb. 1 zeigt die Anordnung der optischen Teile in einem senkrechten Schnitt durch das waagrechte Fernrohr.

Dem Fernrohrobjektiv 5 sind vorgelagert: das rhombische Prisma 4 und die Drehkeile 2 und 3 sowie das Abschlußglas 1. Das Prisma 4 überdeckt nur die obere Objektivhälfte. Es bewirkt eine Parallelversetzung der eintreffenden Lichtstrahlen, aber keine Winkeländerung.