# Genauigkeitsuntersuchung über das Verfahren von Bohnenberger-Collins für das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtisch

Autor(en): **Baeschllin, C.F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **48 (1950)**

Heft 4

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-207434

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Die nivellitische Refraktion ist proportional zum Temperaturgradienten, zum Quadrat der Zielweite und annähernd proportional zur gemessenen Höhendifferenz.

Bei dem finnischen Landesnivellement wurde die Temperaturdifferenz zwischen den Höhen von 0.5 und 2.5 m mit einem Widerstandsthermometer gemessen und auf Grund dieser Temperaturdifferenzen die nivellitische Refraktion berechnet und in den Nivellementsergebnissen berücksichtigt. Die angewandten Zielweiten bewegten sich zwischen 40 und 60 m; die Arbeit ist bei möglichst kleinem Temperaturgradienten ausgeführt worden. Unter solchen Verhältnissen beträgt die mittlere nivellitische Refraktion +0.06 mm auf eine gemessene Höhendifferenz von +1 m.

Wenn man größere Zielweiten anwendet oder die Messungen bei größeren Temperaturgradienten, d. h. um Mittag und in der Nacht ausführt, steigt die nivellitische Refraktion wesentlich über den oben angegebenen Wert. In jedem Fall hat sie eine wesentliche Bedeutung in Gegenden, wo größere Höhenunterschiede zu nivellieren sind, wie z. B. in der Schweiz.

Bei negativem Temperaturgradienten verursacht die Luftrefraktion einen zufälligen Fehler, das Flimmern, das durch Verkürzung der Zielweite zu bekämpfen ist.

Bei positivem Temperaturgradienten kommt langsames Schweben des Zielbildes vor, was dadurch zu vermeiden ist, daß man nicht zu früh am Morgen und nicht zu spät am Abend arbeitet.

## Genauigkeitsuntersuchung über das Verfahren von Bohnenberger-Collins für das Rückwärtseinschneiden mit dem Meßtisch

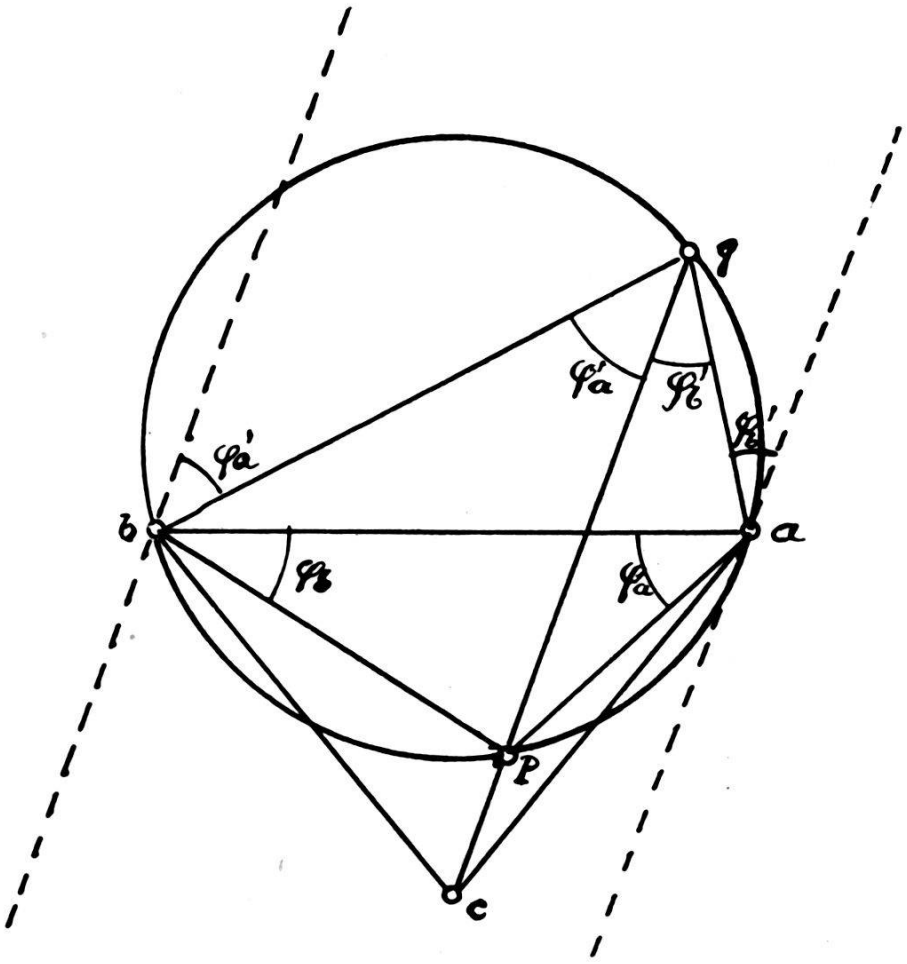
*von C. F. Baeschlin, Zollikon*

Das Verfahren von *Bohnenberger-Collins* ist in der neuesten Lehrbuchliteratur beschrieben in *M. Näbauer*, Vermessungskunde, 3. Auflage, 1949, Seiten 179 und 180, und in *B. G. Manton*, Highway Surveying and Setting out, London 1948, p. 183 and 184, also in je einer bedeutenden deutschen und englischen Publikation. Dieses Verfahren besteht darin, den Collinschen Hilfspunkt durch Vorwärtseinschneiden von zwei Tischpunkten aus zu bestimmen, womit dann die Orientierung des Meßtisches nach dem dritten Punkt erfolgen kann.

Da das Verfahren in der Schweiz nicht allgemein bekannt sein dürfte, sei es kurz beschrieben.

*a*, *b*, *c* sei das gegebene Tischdreieck, *p* der zu bestimmende Neupunkt. Man legt die Kippregelkante an *b a* an, so daß die Ziellinie von *b* nach *a* berichtet ist. Der Tisch wird so gedreht, daß die Ziellinie durch den Feldpunkt *A* geht. Bei dieser Tischorientierung, die gegenüber der rich-

tigen um den Winkel $\varphi_a$ verdreht ist, wird die Kippregel nach dem Feldpunkt $C$ gerichtet und längs der Linealkante mit Hilfe des Parallellineals die Linie durch $b$ gezogen (Linie $b\ q$). Ein zweites Mal legen wir die Linealkante so an $a\ b$ an, daß die Ziellinie von $a$ gegen $b$ gerichtet ist und drehen den Tisch so, daß die Ziellinie gegen den Feldpunkt $B$ geht. Hier ist der




Figur 1

Tisch gegenüber der richtigen Orientierung um den Winkel $\varphi_b$ verdreht ($\varphi_b$ hat das entgegengesetzte Vorzeichen von $\varphi_a$). Bei dieser zweiten Orientierung des Tisches zielen wir mit der Kippregel gegen den Feldpunkt $C$; längs der Linealkante ziehen wir die Gerade $a\ q$ durch $a$. Wie aus der Figur 1 zu ersehen ist, liegt der so vorwärts eingeschnittene Punkt $q$ auf dem Kreis durch $a$, $b$ und $p$, weil nach der Konstruktion $\varphi'_a = \varphi_a$ und $\varphi'_b = \varphi_b$ ist. Die Wirkungen der bei den Tischdrehungen entstehenden Exzentrizitäten werden vernachlässigt. Im allgemeinen ist dies ohne weiteres zulässig, obwohl das ein Nachteil des Bohnenbergerschen Verfahrens gegenüber dem Lehmannschen ist. Nachdem man den Collinschen Hilfspunkt $q$ erhalten hat, legt man die Linealkante an die Punkte $q$ und $c$ an und dreht den Tisch, bis die Ziellinie nach dem Feldpunkt $C$ gerichtet

ist. Damit ist der Meßtisch definitiv orientiert. Bei dieser Orientierung zielt man nach $A$ und zieht mit Hilfe des Parallellineals die Tischlinie $a\,p$; so erhält man $p$ durch Seitwärtsabschneiden. Analog kann $b$, $q$ gezogen werden. Wenn fehlerlos operiert worden ist, müssen sich die 3 Geraden $a\,p$, $b\,p$, $c\,p$ in einem Punkt, dem definitiven Tischpunkt $p$ schneiden. Ist aber die Orientierung nicht genau gelungen, so wird ein kleines fehlerzeigendes Dreieck entstehen, aus dem man nach den Lehmannschen Sätzen den definitiven Tischpunkt $p$ bestimmen müßte.

Es soll unsere Aufgabe sein, den mittleren Fehler in der Orientierung des Meßtisches beim Verfahren von Bohnenberger zu berechnen und ihn mit dem bei der Lehmannschen Methode entstehenden mittleren Orientierungsfehler zu vergleichen.

Man erkennt ohne weiteres, daß das Bohnenbergersche Verfahren nur anwendbar ist, wenn der Collinsche Hilfspunkt $q$ auf das Meßtischblatt fällt; das Lehmannsche Verfahren ist dagegen immer verwendbar.

Die genauigkeitstheoretische Schwäche des Bohnenbergerschen Verfahrens liegt darin, daß man bei der Erhebung der Winkel $\varphi_a'$ und $\varphi_b'$ den Tisch mit Hilfe der eventuell kurzen Tischlinie $a\,b$ orientieren muß. Die definitive Orientierung des Tisches stützt sich auf die je nach den Umständen kürzere oder längere Tischlinie $q\,c$. Es könnte scheinen, daß man die beiden ersten Orientierungsfehler dadurch vermindern könnte, wenn man beim ersten Anlegen des Lineales an $b$ und $a$ an den Enden des Lineales Randmarken zieht. Damit würde bei der Bestimmung von $\varphi_b'$ sehr genau dieselbe, wenn auch falsche Lage von $a\,b$ verwendet. Wenn durch falsches Erfassen von $b\,a\,\varphi_a'$ zu groß wird, ergibt sich $\varphi_b'$ um denselben Betrag zu klein; der Collinsche Hilfspunkt $q$ verschiebt sich dabei systematisch nach links. Es ist daher zu empfehlen, das Anlegen der Linealkante beidemal unabhängig vorzunehmen, da die zufälligen Orientierungsfehler dann $q$ z. T. auch in der Richtung von $c\,p$ verschieben können, womit keine Desorientierung von $q\,c$ entsteht. Im Durchschnitt vieler Fälle ergibt das unabhängige Verfahren mit zufälligen Orientierungsfehlern einen kleineren mittleren Fehler der Tischorientierung.

Wir machen die Annahme, daß beim Anlegen der Linealkante an einen scharf gestochenen Tischpunkt ein mittlerer Abstand der Linealkante vom genauen Punkt von $M$ Millimeter im Sinne eines mittleren Fehlers entstehe. Nach den Bestimmungen der Eidg. Landestopographie wiedergegeben von Dr. K. *Kobelt* in seiner Dissertation „Genauigkeitsuntersuchung der graphischen Triangulation", Gebr. Lehmann & Co., Zürich, 1917, Seite 20, ist

$$M = \pm (0.077 \pm 0.008) \text{ mm für den Maßstab } 1:10000$$

$$M = \pm (0.066 \pm 0.007) \text{ mm für den Maßstab } 1:25000$$

$$M = \pm (0.054 \pm 0.006) \text{ mm für den Maßstab } 1:50000$$

Da für die Praxis auch größere Maßstäbe als 1:10000 in Betracht kommen und wir zu beachten haben, daß die Bestimmungen auf der Eidg.

Landestopographie von sehr geübten Topographen vorgenommen worden sind, rechnen wir für unsere Untersuchungen mit

$$M = \pm 0.100 \text{ mm}$$

Es handelt sich nun zunächst darum, daraus den mittleren Orientierungsfehler beim Anlegen der Linealkante an die beiden Punkte $a$ und $b$ zu bestimmen. Da die beiden Anlegefehler an $a$ und $b$ voneinander unabhängig sind, ist nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz der mittlere Querfehler für $b$ in bezug auf das fehlerlos vorausgesetzte $a$

$$\pm \sqrt{2}\, M$$

Der mittlere Orientierungsfehler wird daher, wenn wir die Distanz von $a$ bis $b$ mit $\overline{a\,b}$ mm bezeichnen

$$\mu_{a\,b} = \pm \frac{\sqrt{2}\, M}{\overline{a\,b}}\, \rho' \text{ (sexagesimale Minuten)}$$

oder indem wir die Zahlenwerte einsetzen

$$\mu_{a\,b} = \pm \frac{0.141 \cdot 3438}{\overline{a\,b}^{\,\text{mm}}} = \frac{486 \cdot 2}{a\,b} \qquad (1)$$

Tabelle I für den mittleren Orientierungsfehler

| $\overline{a\,b}$ | Mittlerer Orientierungsfehler | | |
|---|---|---|---|
| | in Radiaus | in sex. Minuten | in cent. Minuten |
| mm | | | |
| 10 | 0.0141 | 48′.6 | 90$^c$.0 |
| 50 | 0.0028 | 9.6 | 18.0 |
| 100 | 0.0014 | 4.9 | 9.0 |
| 200 | 0.0007 | 2.4 | 4.5 |
| 300 | 0.00047 | 1.6 | 3.0 |

$a\,q$ und $b\,q$ werden also um den Punkt $a$, resp. $b$ verdreht sein, mit einem der Distanz $\overline{a\,b}$ entsprechenden Fehler $\mu$; das ergibt bei $q$ einen mittleren Querfehler

$$q_a' = \overline{a\,q}\,\mu; \qquad q_b' = \overline{b\,q}\,\mu$$

$$q_a' = \frac{\overline{a\,q}}{\overline{a\,b}}\, 0.141; \quad q_b' = \frac{\overline{b\,q}}{\overline{a\,b}}\, 0.141$$

Wir müssen aber damit rechnen, daß die Linealkante nicht genau durch $a$ und $b$ geht; es besteht hier vielmehr eine mittlere Querverschiebung $M$.

Somit wird der gesamte mittlere Querfehler

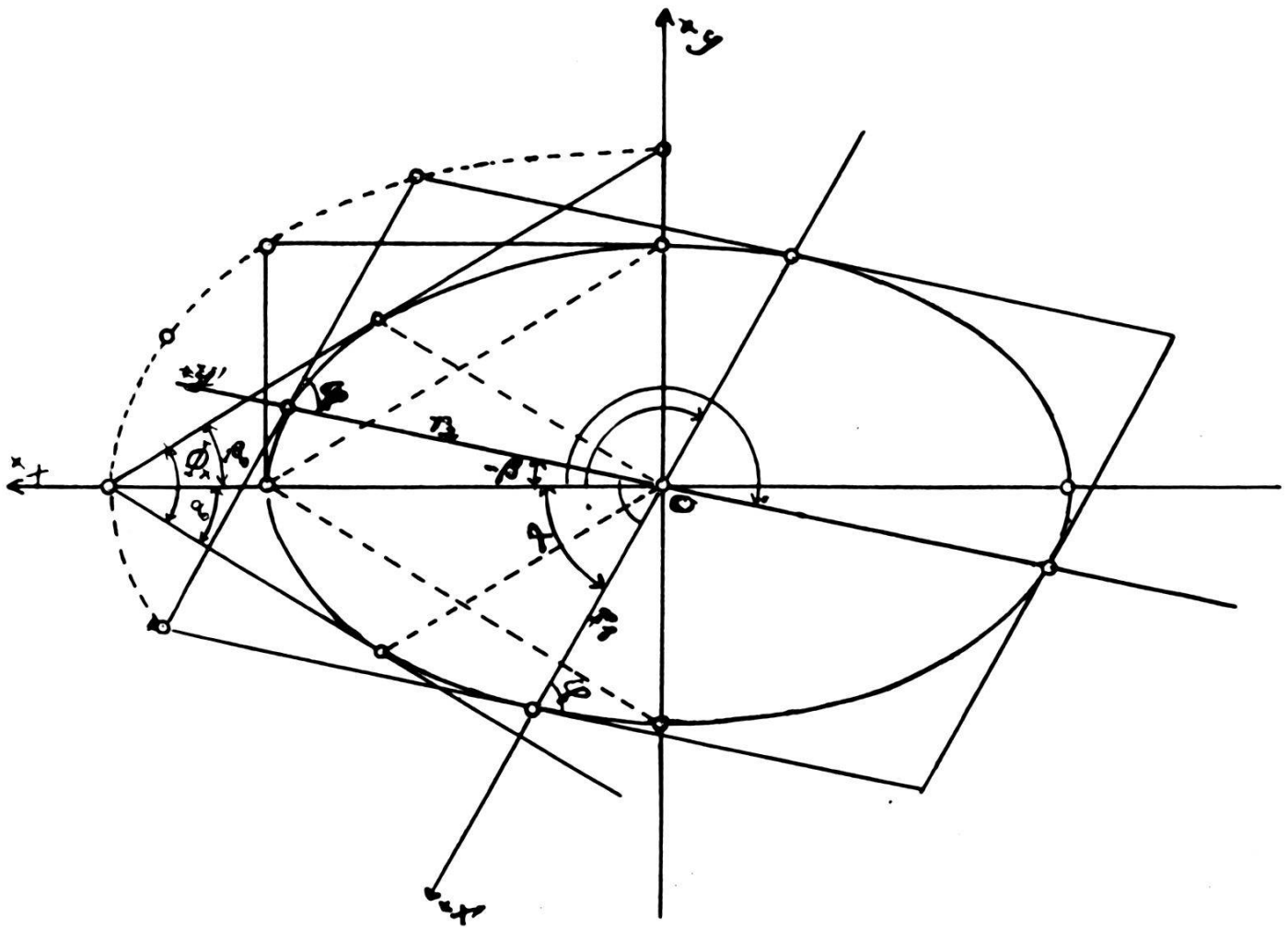
$$\begin{aligned} \text{Quer zu } a\,q \qquad & q_a = M\sqrt{2\left(\frac{\overline{a\,q}}{\overline{a\,b}}\right)^2 + 1} \\ \text{Quer zu } b\,q \qquad & q_b = M\sqrt{2\left(\frac{\overline{b\,q}}{\overline{a\,b}}\right)^2 + 1} \end{aligned} \tag{2}$$

Aus diesen mittleren Parallelverschiebungen $q_a$ und $q_b$ der Bestimmungsgeraden $a\,q$ und $b\,q$ läßt sich die mittlere Fehlerellipse des Punktes $q$ bestimmen. Der Winkel, unter dem sich die beiden Bestimmungsgeraden bei $q$ schneiden, sei $\varphi$

Es ist für die Figur 2

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b$$

Die beiden Parallelenpaare im Abstand $2q_a$ und $2q_b$ stellen konjugierte Tangenten, die Parallelen durch $q$ zwei konjugierte Durchmesser der mittleren Fehlerellipse von $q$ dar.



Figur 2

Bezeichnen wir die halben konjugierten Durchmesser mit $r_1$ und $r_2$, so erkennen wir aus der Figur 2

$$r_1 = \frac{q_a}{\sin \varphi}; \qquad r_2 = \frac{q_b}{\sin \varphi} \tag{3}$$

Es handelt sich nun darum, aus $r_1$, $r_2$ und $\varphi$ die Lage der großen Achse wie auch die beiden Halbachsenlängen $a$ und $b$ zu bestimmen.

Aus der Theorie der Ellipse entnehmen wir die 2 bekannten Beziehungen

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2 + b^2 \tag{4}$$

$$r_1 r_2 \sin \varphi = a b \tag{5}$$

Wir multiplizieren (5) mit Zwei und addieren es so zu (4), resp. subtrahieren es davon; damit erhalten wir

$$r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \sin \varphi = (a + b)^2 \tag{6a}$$

$$r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \sin \varphi = (a - b)^2 \tag{6b}$$

Daraus folgt

$$a + b = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \sin \varphi} = A \tag{6a}'$$

$$a - b = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \sin \varphi} = B \tag{6b}'$$

Durch Addieren und Subtrahieren dieser beiden Gleichungen finden wir

$$a = \frac{A + B}{2} \tag{7a}$$

$$b = \frac{A - B}{2} \tag{7b}$$

Ersetzen wir in (6a)′ und (6b)′ $r_1$ durch $q_a$, $r_2$ durch $q_b$ nach (3), so erhalten wir

$$A = a + b = \frac{\sqrt{q_a^2 + q_b^2 + 2 q_a q_b \sin \varphi}}{\sin \varphi} \tag{6a}''$$

$$B = a - b = \frac{\sqrt{q_a^2 + q_b^2 - 2 q_a q_b \sin \varphi}}{\sin \varphi} \tag{6b}''$$

Aus (7) folgt noch

$$\frac{(A - B)^2}{(A + B)^2} = \frac{b^2}{a^2} \tag{8}$$

Für die weitere Behandlung der mittleren Fehlerellipse machen wir die folgenden Festsetzungen:

Von den beiden supplementären Winkeln, welche die beiden konjugierten Durchmesser $2\,r_1$ und $2\,r_2$ miteinander bilden, bezeichnen wir stets denjenigen mit $\varphi$, der kleiner als $90^0$ ist. Im Grenzfall der Achsen ist $\varphi = 90^0$. Den Winkel $< 90^0$, zwischen der großen Achse und dem Durchmesser $2\,r_1$ bezeichnen wir im Sinne eines Absolutwertes mit $\alpha$, den Winkel $< 90^0$ zwischen der großen Achse und dem Durchmesser $2\,r_2$ nennen wir $\beta$, ebenfalls im Sinne eines Absolutwertes. Es ist dann stets

$$\alpha + \beta = \varphi \tag{9}$$

Aus der Theorie der konjugierten Durchmesser einer Ellipse entnehmen wir die Beziehung

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2} \tag{10}$$

Dabei ist der Winkel der großen Halbachse mit dem größeren der beiden Werte $r_1$ oder $r_2$ der kleinere. Wenn $r_1 = r_2$ ist, ergibt sich

$$\alpha = \beta = \frac{\varphi}{2} \tag{11}$$

Aus (9) und (10) ergibt sich

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha} = \frac{b^2}{a^2}$$

Ordnen wir nach Potenzen von $\operatorname{tg}\alpha$, so folgt

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha + \frac{b^2}{a^2} = 0 \tag{12}$$

Das ist eine in $\operatorname{tg}\alpha$ quadratische Gleichung; deren beide Wurzeln werden

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\left\{\frac{a^2 - b^2}{a^2} \operatorname{tg}\varphi \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2\varphi - 4\,\frac{b^2}{a^2}}\right\}$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2a^2}\left\{(a^2 - b^2) \operatorname{tg}\varphi \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \operatorname{tg}^2\varphi - 4\,a^2\,b^2}\right\} \tag{13}$$

Es scheint auf den ersten Blick, daß $\operatorname{tg}\alpha$ imaginär werden könne, so daß keine reellen Lösungen für $\alpha$ resultieren könnten. Dem ist aber

nicht so; bei gegebenen Werten von $a$ und $b$ kann nämlich $\varphi$ nicht unter einen gewissen Wert gehen, den wir mit $\Phi$ bezeichnen wollen.

Wir bezeichnen die beiden Wurzeln von (13) mit tg $\alpha$ und mit tg $\beta$. Es sei

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2a^2}\left\{(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\varphi + \sqrt{(a^2 - b^2)^2\operatorname{tg}^2\varphi - 4\,a^2\,b^2}\right\} \quad (14a)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2a^2}\left\{(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\varphi - \sqrt{(a^2 - b^2)^2\operatorname{tg}^2\varphi - 4\,a^2\,b^2}\right\} \quad (14b)$$

Nach den Sätzen von Vieta haben wir dann

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2};\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi \quad (15)$$

Aus der 2. Gleichung (15) folgt durch Division beider Seiten durch $1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}\operatorname{tg}\varphi$$

Setzen wir hier auf der rechten Seite $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}$, so finden wir

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi \quad (16)$$

Da $\alpha$, $\beta$ und $\varphi$ nach unseren Festsetzungen alle im ersten Quadranten liegen, folgt aus (16)

$$\alpha + \beta = \varphi \quad (17)$$

Aus (15a) und (17) geht hervor, daß der hier eingeführte Winkel $\beta$ der sich aus (14b) ergibt, identisch dem in der Figur 2 eingezeichneten Winkel $\beta$ zwischen $r_2$ und $a$ ist. Aus (15) ergibt sich

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}\alpha\right) = \frac{a^2\operatorname{tg}\alpha + b^2\operatorname{cotg}\alpha}{a^2 - b^2} \quad (18)$$

Daraus können wir das Minimum von tg $\varphi$ bestimmen. Es muß

$$\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{d\alpha} = \frac{\frac{a^2}{\cos^2\alpha} - \frac{b^2}{\sin^2\alpha}}{a^2 - b^2} = 0$$

oder

$$\frac{a^2}{\cos^2\alpha} = \frac{b^2}{\sin^2\alpha}$$

sein. Bezeichnen wir den Wert von $\alpha$, für den $\varphi$ ein Minimum, gleich $\Phi$ wird, mit $\alpha_0$, so gilt

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_0 = \frac{b^2}{a^2}$$

oder da $\alpha_0$ wie alle Werte von $\alpha$ im ersten Quadranten liegt

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{b}{a} \tag{19}$$

Für diesen Wert $\alpha_0$ von $\alpha$ wird nach (18)

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{a^2 \frac{b}{a} + b^2 \frac{a}{b}}{a^2 - b^2} = \frac{2 a b}{a^2 - b^2} \tag{20}$$

Für diesen kleinsten Wert $\Phi$ von $\varphi$ (man erkennt leicht, daß es sich um ein Minimum handelt, da $\left(\frac{d^2 (\operatorname{tg} \varphi)}{d \alpha^2}\right) < 0$ ist) nimmt der Radikand für $\varphi = \Phi$
von (14) den Wert Null an, da

$$(a^2 - b^2)^2 \frac{4 a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2} - 4 a^2 b^2 = 0$$

Wenn $\varphi > \Phi$, wird der Radikand stets positiv. Die Formel (13) für $\operatorname{tg} \alpha$ hat also stets 2 reelle Wurzeln, die für $\varphi = \Phi$ zusammenfallen.

Dann wird

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2} \frac{2 a b}{a^2 - b^2} = \frac{b}{a}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}$$

Denn es ist

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \frac{\sin \Phi}{1 + \cos \Phi}$$

Da aber nach (20)

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{2 a b}{a^2 - b^2}$$

wird

$$\cos \Phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi}}; \sin \Phi = \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi}}$$

Setzen wir diese Werte in die Formel für $\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}$ ein, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} \Phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi}}} = \frac{\operatorname{tg} \Phi}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi}}$$

Setzt man rechts $\operatorname{tg} \Phi$ nach (20) ein, so folgt

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \frac{\dfrac{2\,a\,b}{a^2 - b^2}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{4\,a^2\,b^2}{(a^2 - b^2)^2}}} = \frac{\dfrac{2\,a\,b}{a^2 - b^2}}{1 + \sqrt{\dfrac{(a^2 - b^2)^2 + 4\,a^2\,b^2}{(a^2 - b^2)^2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{2\,a\,b}{a^2 - b_2}}{1 + \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}} = \frac{2\,a\,b}{a^2 - b^2 + a^2 + b^2} = \frac{b}{a}$$

Es ist also wirklich

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} \beta_0 \tag{21}$$

Aus der Figur 2 erkennt man, wie man diesen Wert $\Phi$ und $\alpha_0, \beta_0$ für eine gegebene Ellipse bestimmen kann.

Die Schnittpunkte der konjugierten Durchmesser liegen also für diesen Fall auf den beiden Achsen. Ohne Beweis sei bemerkt, daß die Schnittpunkte konjugierter Tangenten einer Ellipse auf einer zu ihr ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{2}\,a$ und $\sqrt{2}\,b$ liegen.

Damit sind wir nun in der Lage, die Fehlerellipse des vorwärts eingeschnittenen Collinschen Hilfspunktes $q$ zu bestimmen. Die Richtung von dem Punkte $q$ nach $c$ gibt uns den Querfehler bei $q$ für diese Richtung.

Wenn $\psi$ der Winkel von $q\,c$ mit der großen Achse der Fehlerellipse ist, beträgt der mittlere Querfehler

$$M_{qc} = \sqrt{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi} \tag{22}$$

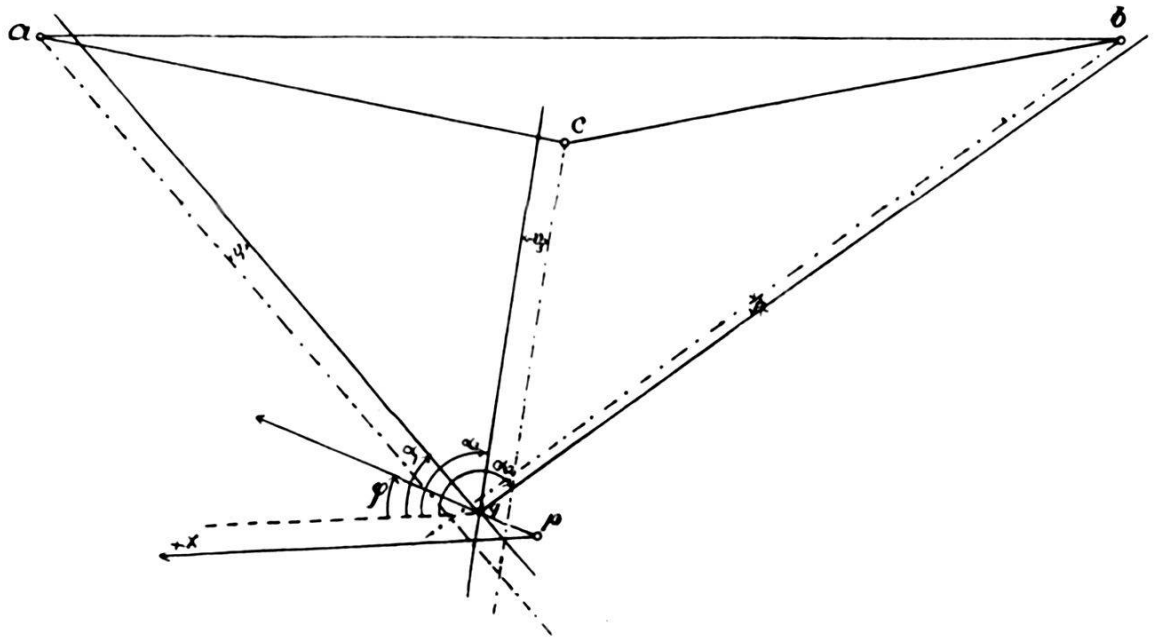
Damit finden wir den mittleren Orientierungsfehler der Geraden $q\,c$, wenn wir beachten, daß wir beim Anlegen an $c$ einen mittleren Fehler $M$ machen

$$\omega_{qc} = \frac{\sqrt{m^2_{qc} + M^2}}{\overline{q\,c}} \tag{23}$$

Wir müssen nun zur Vergleichung noch den mittleren Orientierungsfehler des Tisches bei Verwendung der Lehmannschen Sätze bestimmen.

Diese Aufgabe ist in der vorhin zitierten Publikation von Dr. K. Kobelt behandelt worden.

Wir wollen die Grundidee hier wiedergeben. Wir denken uns mit Hilfe des Lehmannschen Verfahrens, wenn nötig nach Wiederholungen, *einen* Punkt $q$ erreicht, in dem sich die drei Strahlen durch die entsprechenden Feld- und Tischpunkte einwandfrei schneiden. Die *Richtung* der




Figur 3

Tischlinien nehmen wir als fehlerlos an, einerseits, weil die Zielfehler mit dem Kippregelfernrohr nach den Feldpunkten von der Größenordnung der Sexagesimalsekunde sind, die graphische Interpretation einer Linie aber Richtungsfehler von der Größenordnung einer Sexagesimalminute erzeugt, andererseits, weil wir die gezeichneten Tischlinien als Gerade annehmen dürfen. Dagegen müssen wir annehmen, daß die durch $q$ gehenden Linien nicht genau durch die Tischpunkte $a$, $b$, $c$ gehen, daß sie vielmehr einen Querabstand $v_1$, $v_2$, $v_3$ von $a$, $b$, $c$ haben. Dabei zählen wir $v$ positiv, wenn von $q$ aus gesehen die Linie durch $q$ rechts vom betreffenden Tischpunkt durchgeht. In der Figur 3 sind $v_1$ und $v_2$ positiv, $v_3$ negativ. Ziehen wir nun Parallele zu den Tischlinien, die genau durch die Tischpunkte $a$, $b$, $c$ gehen (strichpunktierte Linien), so erhalten wir ein fehlerzeigendes Dreieck, woraus hervorgeht, daß der Tisch noch einer Orientierungsverbesserung $\omega$ bedarf. Bezeichnen wir die Abstände des fehlerlosen Punktes $p$ von den strichpunktierten Tischlinien mit $d_1$, $d_2$, $d_3$, so ist, wenn $S_1$, $S_2$, $S_3$ die Distanzen des Punktes $p$ zu den Tischpunkten darstellen, bekanntlich

$$d_1 = \omega S_1;\ d_2 = \omega S_2;\ d_3 = \omega S_3$$

Es genügt, die Distanzen des Punktes $q$ statt $S_1$, $S_2$, $S_3$ zu nehmen.

Wir denken uns durch $p$ als Ursprung ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem $p\,x$, $p\,y$ gelegt. Die Distanz $p\,q$ bezeichnen wir mit $\rho$, die Amplitude mit $\varphi$. Die Winkel der Tischlinien durch $q$ mit der Parallelen zur $X$-Achse durch $q$ bezeichnen wir mit $a_1$, $a_2$, $a_3$. Die Koordinaten von $q$ werden

$$x = \rho \cos \varphi;\ y = \rho \sin \varphi$$

Die Abstände des Punktes $p$ von den Tischlinien durch $q$ sind, bzw.:

$$\rho \sin (a_1 — \varphi);\ \rho \sin (a_2 — \varphi);\ \rho \sin (a_3 — \varphi)$$

oder

$$\rho\,[\sin a_1 \cos \varphi — \cos a_1 \sin \varphi];\ \rho\,[\sin a_2 \cos \varphi — \cos a_2 \sin \varphi];$$

$$\rho\,[\sin a_3 \cos \varphi — \cos a_3 \sin \varphi]$$

$$x \sin a_1 — y \cos a_1;\ x \sin a_2 — y \cos a_2;\ x \sin a_3 — y \cos a_3$$

Diese Abstände von den Linien durch $q$ gehen in die Abstände durch die strichpunktierten Linien über durch Zufügung von $v$. Damit bekommen wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} d_1 &= x \sin a_1 — y \cos a_1 + v_1 = \omega\, S_1 \\ d_2 &= x \sin a_2 — y \cos a_2 + v_2 = \omega\, S_2 \\ d_3 &= x \sin a_3 — y \cos a_3 + v_3 = \omega\, S_3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fehlergleichungen

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= y \cos a_1 — x \sin a_1 + \omega\, S_1 \quad \text{Gewicht } 1 \\ v_2 &= y \cos a_2 — x \sin a_2 + \omega\, S_2 \quad \text{Gewicht } 1 \\ v_3 &= y \cos a_3 — x \sin a_3 + \omega\, S_3 \quad \text{Gewicht } 1 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Da zur Bestimmung der drei Unbekannten $x$, $y$, $\omega$ nur drei Beobachtungen vorliegen, bekommt man eine widerspruchsfreie Bestimmung, indem man

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

setzt. Um die Bestimmung der mittleren Fehler der drei Unbekannten $x$, $y$, $\omega$ nach der Theorie der Äquivalenz zu bestimmen, bilden wir aus den Gleichungen (24) die Normalgleichungen, bzw. die Gewichtsnormalgleichungen. Da wir nur den mittleren Fehler von $\omega$ bestimmen wollen, stellen wir das Gewichtsgleichungssystem bezüglich $\omega$ auf. Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} [\cos^2 a]\,[a\gamma] + [— \sin a \cos a]\,[\beta\gamma] + [S \cos a]\,[\gamma\gamma] \pm 0 &= 0 \\ [— \sin a \cos a]\,[a\gamma] + [\sin^2 a]\,[\beta\gamma] — [S \sin a]\,[\gamma\gamma] \pm 0 &= 0 \\ [S \cos a]\,[a\gamma] — [S \sin a]\,[\beta\gamma] + [S\,S]\,[\gamma\gamma] — 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Indem man diese Gleichungen nach dem Gaußschen Algorithmus reduziert, erhält man $[S\,S \cdot 2]$. Dann wird der mittlere Fehler von $\omega$

$$m_\omega = M \sqrt{\frac{1}{[SS \cdot 2]}} \tag{26}$$

Da ja $M$ der mittlere Fehler der in (24) auftretenden Gewichtseinheit ist, d. h. der mittlere Fehler eines Abstandes der Linealkante von einem Punkt. Damit ist auch diese Frage gelöst.

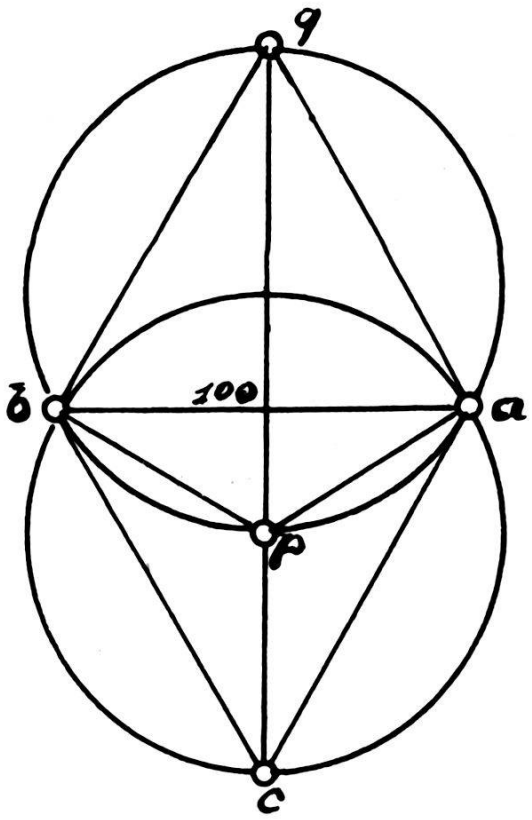
Wir wollen nun noch zwei Beispiele behandeln.

*1. Beispiel.* Das Tischdreieck ist ein gleichseitiges Dreieck mit den Seiten 100 mm. Der gesuchte Punkt $p$ liegt im Mittelpunkt des Dreieckes. Dieser Fall ist bekanntlich für das Rückwärtseinschneiden am günstigsten.

Wir wählen $p\,q$ als $+\,x$-Achse. Dann wird

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \phantom{-}60^0 \\ \alpha_2 &= -60^0 \\ \alpha_3 &= \phantom{-}180^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 = S_3 = 57.74 \text{ mm} \\ q\,c &= 171.44 \text{ mm} \\ q\,p &= 113.70 \text{ mm} \end{aligned}$$




Figur 4

Die Fehlergleichungen werden

$$\begin{aligned} +\,0.500\,y - 0.866\,x + 57.74\,\omega &= 0 \\ +\,0.500\,y + 0.866\,x + 57.74\,\omega &= 0 \\ -\,1.000\,y \pm 0.000\,x + 57.74\,\omega &= 0 \end{aligned}$$

Die Gewichtsnormalgleichungen für $\omega$ werden:

$$\begin{aligned} +\,1.500\,y \pm 0\,x \quad \pm 0 \cdot \omega \quad \pm 0 &= 0 \\ \pm\,0.000\,y + 1.500\,x \pm 0 \cdot \omega \quad \pm 0 &= 0 \\ \pm\,0.000\,y \pm 0.000\,x + 10\,000\,\omega - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt $\qquad [c\,c \cdot 2] = 10\,000$

$$m_\omega = 0.1 \sqrt{\frac{1}{10\,000}} = \pm\,0.001 \text{ in Radians}$$

$$m_\omega = 0.001 \cdot 3438 = \pm\,3.438 \text{ (Minuten sex.)}$$

Dies ist der mittlere Orientierungsfehler nach dem Lehmannschen Verfahren. Nach dem Verfahren von Bohnenberger hat die Fehlerellipse von $q$ die Halbachsen

$$a = 0.241 \text{ mm}$$
$$b = 0.141 \text{ mm}$$

Die große Achse liegt in Richtung von $q\,c$, $m_c$ ist daher gleich $b$.

Der Querfehler wird

$$\sqrt{b^2 + M^2} = \pm 0.171 \text{ mm}$$

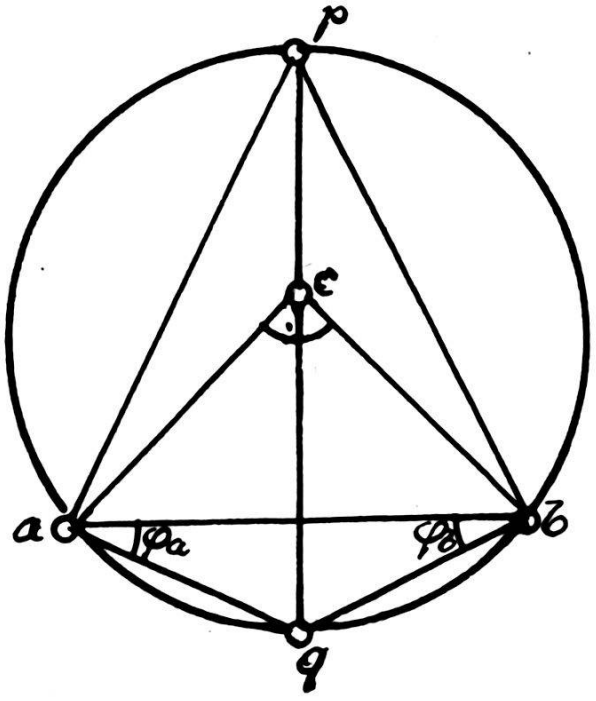
Da $q\,c = 171.44$ mm ist, wird der mittlere Orientierungsfehler

$$m_\omega = \frac{0.171}{171} = 0.001 \text{ in Radians}$$

$$m_\omega = 0.001 \cdot 3438 = 3'44 \text{ (Minuten sex.)}$$

Für diesen günstigsten Fall des Rückwärtseinschneidens liefern also beide Verfahren denselben mittleren Orientierungsfehler; sie sind also hier gleich günstig.

*2. Beispiel.*




Figur 5

$a\,b = 100$ mm; Winkel bei $c = 90^0$
$p\,c = 50$ mm
$q\,c = 75$ mm
$a\,q = b\,q = 55.90$ mm
$\varphi_a = \varphi_b = 26^0\,34'$ $\varphi = 53^0\,08'$

Damit wird für die mittlere Fehlerellipse in $q$

$$a = 0.2371 \text{ mm}; \quad b = 0.1185 \text{ mm}$$

Die große Achse liegt senkrecht zu $q\,p$. Hier ist also $m_c = a$; damit wird

$$m_\omega = \frac{\sqrt{0.\overline{2371}^2 + \overline{0.1}^2}}{75.00}\, 3438 = 11.80 \text{ (Minuten sex)}$$

nach Bohnenberger.

Die Gewichtsnormalgleichungen für $\omega$ werden, wenn man $q\,c$ als $+\,x$-Achse wählt

$$\begin{aligned} 2.60\,[\alpha\gamma] \pm 0.00\,[\beta\gamma] + 250.00\,[\gamma\gamma] \pm 0 &= 0 \\ \pm 0.00\,[\alpha\gamma] + 0.400\,[\beta\gamma] \pm 0.00\,[\gamma\gamma] \pm 0 &= 0 \\ + 250.00\,[\alpha\gamma] \pm 0.00\,[\beta\gamma] + 27500\,[\gamma\gamma] - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Damit wird $[cc \cdot 2] = 3461$

$$m_\omega = \pm 0.1 \sqrt{\frac{1}{3461}}\, 3438 = \pm 5'84 \text{ (Minuten sex)}$$

nach Lehmann.

In diesem Falle wird also $m_\omega$ nach Bohnenberger mehr als doppelt so groß wie nach Lehmann. Ich habe auch noch einige andere Fälle durchgerechnet und stets den mittleren Orientierungsfehler nach Bohnenberger beträchtlich größer als nach Lehmann gefunden. Die einzige Ausnahme stellt der Fall des Beispieles 1 dar.

Ich glaube daher berechtigt zu sein, den folgenden Satz aufzustellen:

*Das Lehmannsche Verfahren für das Rückwärtseinschneiden mit dem Meßtisch ist weitaus günstiger als das Verfahren von Bohnenberger, selbst wenn man die Exzentrizitätseinflüsse vernachlässigt, die beim Lehmannschen Verfahren Null sind.*

Da andere in der Literatur angegebene Verfahren, wie etwa die sogenannte Pauspapiermethode oder die Methode mit zwei fehlerzeigenden Dreiecken bestimmt ungünstiger sind als das Lehmannsche Verfahren, ziehe ich den Schluß, daß wohl das Lehmannsche Verfahren überhaupt das günstigste sei. Es kann daher allen Praktikern angelegentlich empfohlen werden, trotzdem es vielleicht etwas mehr Zeit in Anspruch nimmt als das Bohnenbergersche Verfahren, das aber versagt, wenn der Collinsche Hilfspunkt nicht auf das Zeichenblatt fällt. Wenn die provisorische Orientierung des Meßtisches mit der Boussole bestimmt wird, kommt man bei nicht gar zu ungünstigen Fällen meist direkt zu dem Schlußresultat, indem sich nach der Bestimmung des Orientierungswinkels (bzw. des Lehmannschen Punktes) die drei Tischlinien auf Stichgenauigkeit in einem Punkte schneiden, was bei der Anwendung des Ver-

fahrens von Bohnenberger im allgemeinen nicht der Fall ist. Es bleibt dann wohl für den seriösen Topographen nichts anderes übrig als nach Lehmann weiterzufahren, da er das Rückwärtseinschneiden erst dann als abgeschlossen betrachten kann, wenn kein fehlerzeigendes Dreieck mehr entsteht, weil sonst die Höhenbestimmung eine unbefriedigende Genauigkeit liefert.

Zollikon, im Januar 1950 *F. Baeschlin.*

## Ein numerisches Verfahren des Folgebildanschlusses für gebirgiges Gelände

Von *H. Kasper*, Heerbrugg

Es gibt Auswerter, die bei der gegenseitigen Orientierung von Senkrechtaufnahmen rechnerische Verfahren den optisch-mechanischen vorziehen. Sie verwenden meist ein Formalverfahren, welches erstmalig B. *Hallert* publiziert hat [1]. Eine numerische Variante mit Restparallaxenabschätzung empfahlen auch M. *Zeller* und A. *Brandenberger* [2].

G. *Schut* [3] verglich kürzlich diese Verfahren mit dem graphischen Orientierungsverfahren von G. *Poivilliers* und kam zu dem Ergebnis, daß sie für *ebene* Modelle genauigkeitsmäßig und wirtschaftlich dem letzteren eindeutig überlegen sind. Wenn jedoch das Gelände nicht relativ eben ist, verliere die numerische Methode rasch an Genauigkeit, und es sei die Poivilliersche vorzuziehen.

Wendet man die Aerotriangulation im Gebirge oder bei größeren Maßstäben im Hügelland an, so sind die Höhenunterschiede relativ zur Flughöhe oft so beträchtlich, daß alle für die Ebene abgeleiteten Formeln versagen. Es ist jedoch auch in diesen Fällen nicht notwendig, die verschiedenen schwerfälligen graphischen Verfahren heranzuziehen, sondern man kann für nicht ebenes Gelände recht gut brauchbare Formeln zur *numerischen* Orientierung ableiten.

Geht man davon aus, daß dieselben sechs charakteristischen Punkte in der Bildebene gewählt werden wie bei dem rechnerischen Verfahren von *Hallert* und die vier Randpunkte gleiche Bildordinaten haben, so ist absolut genommen das Verhältnis

$$\boxed{\frac{y'}{f} = \frac{y}{z} = k} \qquad \text{(I)}$$

konstant. Von dieser Vereinfachung machte schon L. *Pauwen* bei seinem hauptsächlich für Weitwinkelaufnahmen auf Film gedachten Orientierungsverfahren mit 15 Punkten Gebrauch [4]. Bei Aufnahmen auf Platten, wie sie z. B. mit der Präzisions-Plattenkammer Wild RC 7 auch für großmaßstäbliche Aerotriangulationen gemacht werden, wird man jedoch keine Bilddeformationen wie bei Film zu befürchten haben und mit den üblichen sechs Punkten für die gegenseitige Orientierung auskommen.