Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 47 (1949)

Heft: 9

Artikel: Über die Formeln für die Fehlergrenzen der Polygonmessung

Autor: Salonen, Eero

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-206581

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Jeder Ortsname, jeder Flurname im engern Sinn besitzt einen historischen Wert und kann uns, wenn wir ihn zu deuten wissen, über ältere Natur- und Kulturzustände (Kultur im weitesten Sinne des Wortes) unterrichten, wo andere historische Quellen versagen. Sogar ganz unbedeutende Flurnamen, die weder im Topographischen Atlas noch in den sogenannten Übersichtsplänen der Grundbuchvermessung enthalten sind und infolge von Güterzusammenlegungen auszusterben drohen, sollten daher systematisch gesammelt werden, wie dies auf Veranlassung der historischen Vereine seinerzeit (wenn auch nicht vollständig) für die Kantone Thurgau (1870–1871), Aargau (–1898), St. Gallen und Appenzell (1908–1911) geschehen ist. Leider sind aber diese Materialien in Archiven und Bibliotheken vergraben und nicht, wie das *Rätische Namenbuch* für Graubünden[1] der Forschung leicht zugänglich. Es wäre daher wünschenswert, wenn sämtliche Orts- und Flurnamen der deutschsprachigen Schweiz, in gleicher Weise, wie dies z. B. auch für die Westschweiz geschehen ist, mit genauer Angabe der mundartlichen Aussprache, des Namengebrauchs und der heutigen Bedeutung gemeindeweise erhoben würden, sei es im Zusammenhang mit der Namenerhebung für die schweizerische Grundbuchvermessung oder unabhängig davon. Eine solche Namensammlung, vereinigt zu einem deutschschweizerischen Namenbuch, würde wohl noch mehr Namen vom Typus *Tschabäni* ans Licht bringen und noch manche andere, die ebenso aufschlußreich sein können. Wir haben gesehen, wie wichtig bei etymologisch auf den ersten Blick unklaren Namen ein großes Vergleichsmaterial ist und daß manche Deutung auch durch benachbarte, derselben kulturellen Schicht angehörenden Namen gestützt werden kann.

Johannes Hubschmid,
Linguist an der eidg. Landestopographie

Über die Formeln für die Fehlergrenzen der Polygonmessung

Von Eero Salonen, Helsinki

Allgemeines

Die Formeln für die Fehlergrenzen der Polygonmessung werden im allgemeinen so gebildet, daß für die Längen- und Winkelmessung mittlere Fehler angenommen oder auf der Basis ausgeführter Messungen bestimmt werden, durch deren Zusammenwirken im Polygonzuge die gemäß der allgemeinen Fehlertheorie verursachten Winkel- und Koordinatenabschlußfehler als Fehlergrenzen genommen sind. (Siehe Jordan-Eggert 1914, S. 484–486, und Ulbrich 1932.) Außerdem wurden im allgemeinen bei den Fehlergrenzen auch die angenommenen Koordinatenfehler des Anfangs- und des Endpunktes beachtet sowie die Beschaffenheit des Ge-

[1] Hg. von R. v. Planta und A. Schorta, Paris-Zürich-Leipzig 1939.

ländes[1]. Es ist die Regel, daß die auf die oben beschriebene Weise abgeleiteten Formeln für die Fehlergrenzen bei langen Zügen größere Abschlußfehler zulassen als bei kurzen, während in für die Vermessung ungünstigem Gelände größere Abschlußfehler als in günstigem Gelände toleriert werden.

Bei Vermessungen, die in langen Zügen und in ungünstigem Gelände ausgeführt werden, können die nach den so aufgestellten Formeln zugelassenen Abschlußfehler so groß werden, daß sich die Frage stellt, inwieweit die Genauigkeit bei solchen Polygonzügen noch groß genug sei, daß sie dem Zweck entspricht, für den die Vermessung ausgeführt wird.

Um die Fragen abzuklären, werden nachstehend die Fehler bei der Längen- und Winkelmessung und deren Wirkung in Polygonzügen sowie die Größe der nach der Ausgleichung der Abschlußfehler übrigbleibenden Fehler behandelt; schließlich wird eine Fehlerformel gebildet, die sich abweichend von den oben erwähnten Gesichtspunkten für die Aufstellung solcher Formeln, auf die Genauigkeit gründet, die der Vermessungszweck fordert.

Über den durch die Längenmessung verursachten Längsfehler

Wenn in einem gestreckten Polygonzug die ausschließlich durch systematische Fehler verursachten Längsabschlußfehler proportional den Seitenlängen verteilt werden, verbleibt ersichtlich nach der Ausgleichung in den Polygonpunkten kein durch die Längenmessung verursachter Querfehler.

Wenn aber ein allein von zufälligen Fehlern verursachter Längsfehler im Größenverhältnis der Seitenlängen ausgeglichen wird, ist in der Mitte des Zuges ein Längsfehler zu erwarten, der ungefähr die Hälfte des auszugleichenden Längsabschlußfehlers ist.

Dies kann z. B. auf folgende Weise abgeleitet werden:

Der Polygonzug möge geradlinig und gleichseitig sein. Wenn dessen erste Seite einen zufälligen Fehler ε_1 hat, verursacht dieser einen ebenso großen Fehler in den Koordinaten aller folgenden Punkte. Gleichfalls wirkt der Fehler ε_2 der folgenden Seite auf die Koordinaten aller danach folgenden Punkte, indem er sie in der Richtung des Zuges verschiebt. Am Ende eines n-seitigen Zuges ist also der durch die Fehler ε der Seiten verursachte Längsfehler

$$f_l = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n \tag{1}$$

Bei der Ausgleichung dieses Längsfehlers proportional zur Länge der Seiten ist einem Punkt am Ende der ersten Seite eine Verbesserung $\frac{f^l}{n}$ und einem Punkt am Ende der Seite r eine Verbesserung

[1] Es ist auch ein Vorschlag gemacht worden, daß bei den Fehlergrenzen die angewandten Meßgeräte beachtet werden sollten. (Siehe Schulze 1928, S. 673, und Rompf 1933, S. 267.)

(2) $$\frac{r}{n} f_l = \frac{r}{n} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)$$

zuzufügen.

Nach der Formel (1) besteht in diesem Punkt vor der Ausgleichung ein Längsfehler

(3) $$(f_l) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{r-1} + \varepsilon_r$$

Wenn dieser Fehler bei der Ausgleichung die Verbesserung (2) erfährt, bleibt im Punkt nach der Ausgleichung ein Längsfehler.

(4) $$\begin{aligned}(f_l) - \frac{r}{n} f_l &= \frac{n}{n} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{r-1} + \varepsilon_r) \\ &\quad - \frac{r}{n} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_r + \ldots + \varepsilon_n) \\ &= \frac{n-r}{n} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_r) - \frac{r}{n} (\varepsilon_{r+1} + \ldots + \varepsilon_n)\end{aligned}$$

Wenn angenommen wird, daß alle Seiten mit einer so großen Genauigkeit gemessen sind, daß für jede Seite der mittlere Fehler m ist, bekommt der mittlere Längsfehler in einem Punkt am Ende der Seite r einer n-seitigen gebrochenen Linie nach der Ausgleichung den Wert

(5) $$M_r = \pm \sqrt{\left(\frac{n-r}{2}\right)^2 r m^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2 (n-r) m^2} = \pm m \sqrt{\frac{r(n-r)}{n}}$$

Der Ausdruck (5) erhält den größten Wert, wenn $r = \frac{n}{2}$ ist, oder in einem Punkt in der Mitte des Zuges, wo nach der Ausgleichung der mittlere Längsfehler

(6) $$M_{\frac{n}{2}} = \pm \frac{m}{2} \sqrt{n}$$

Auf dieselbe Weise aus der Formel (1) abgeleitet, wird am Ende des Zuges der mittlere Längsfehler

(7) $$M_n = \pm m \sqrt{n}$$

wodurch nach der Ausgleichung der Längsfehler proportional den Seitenlängen in der Zugmitte ein mittlerer Längsfehler zu erwarten ist, der halb so groß ist wie der mittlere Längsfehler am Zugende.

Die dargestellten Werte geben also die Größe der Längsfehler des Zuges an, vorausgesetzt, daß die Fehler zufällig sind. Wenn auf ebenso große Abschlußfehler auch systematische Fehler eingewirkt haben, sind nach der Ausgleichung die Längsfehler kleiner, je nachdem wie stark die systematischen Fehler vorherrschen.

Über den durch die Winkelmessung verursachten Querfehler

Die Fehler der Winkelmessung werden zum größeren Teil von den Zentrierungsfehlern des Theodolits und der Signale[1] sowie von der Störung des Theodolits und den beim Zielen und beim Ablesen des Winkels begangenen Fehlern verursacht und sind bei der Polygonmessung meist zufällig. Um eine Vorstellung von deren Einwirkung auf die Genauigkeit der Polygonmessung zu bekommen, wird nachstehend der von ihnen verursachte Querfehler in einem fast gestreckten Zug untersucht, in dem die Längen (s) der Seiten gleich sind.

Die Behandlung wird auf z. B. bei Stadtvermessungen häufig vorkommende Fälle in folgender Art eingerichtet:

1. Der Zug hat Koordinatenanschluß, aber keinen Winkelanschluß.
2. Der Zug hat sowohl Koordinaten- wie Winkelanschluß.

Der Zug hat Koordinatenanschluß, aber keinen Winkelanschluß

Züge, die Koordinatenanschluß, aber keinen Winkelanschluß haben, kommen z. B. vor, wenn man gezwungen ist, die Polygonmessung an einen durch Vorwärtseinschneiden bestimmten Turm oder einen anderen Hochpunkt anzuschließen, der sich an einem solchen Platz befindet, von wo aus kein anderer Dreieckspunkt sichtbar ist. Nach Ausgleichung der Koordinatenabschlußfehler kann die Größe des übrigbleibenden Querfehlers in der Mitte eines solchen Zuges auf folgende Weise festgestellt werden.

Es wird angenommen, daß die Punkte des Zuges vom Anfangspunkt P_1 aus gerechnet der Reihenfolge nach P_2, P_3, ... P_n und die dabei begangenen Winkelfehler ε_1, ε_2, ε_3, .. ε_n seien. Zufolge der Wirkung des Fehlers ε_1 des im Anfangspunkt P_1 befindlichen Brechungswinkels, weicht der ganze Zug von der richtigen Richtung ab, so daß der Querfehler am Ende der Seite $P_1 P_2$, im Punkt P_2 $\frac{s}{\rho}\varepsilon_1$ ist, im Punkt P_3 $2\frac{s}{\rho}\varepsilon_1$, im Punkt P_4 $3\frac{s}{\rho}\varepsilon_1$ und im Punkt P_n $(n-1)\frac{s}{\rho}\varepsilon_1$. Ein im Punkt P_2 begangener Winkelfehler ε_2 vergrößert wieder den Querfehler von diesem Punkt an so, daß der Querfehler im Punkt P_n einen Zuschuß $(n-2)\frac{s}{\rho}\varepsilon_2$ erfährt. Auf dieselbe Weise kann konstatiert werden, daß der Querfehler des Punktes P_n durch den Fehler ε_3 den Zuschuß $(n-3)\frac{s}{\rho}\varepsilon_3$ erfährt, durch den Fehler ε_4 den Zuschuß $(n-4)\frac{s}{\rho}\varepsilon_4$ usw., wonach also alle Winkelfehler ε im Punkt P_n einen Querfehler

[1] Siehe Jordan-Eggert 1914, S. 458—460, wo die Einwirkung der genannten Umstände auf den Winkelfehler beschrieben ist.

$$(8) \qquad f_q = \frac{s}{\rho}(n-1)\,\varepsilon_1 + (n-2)\,\varepsilon_2 + \ldots + 2\,\varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1}$$

verursachen.

Vorausgesetzt, daß alle Winkel mit so großer Genauigkeit gemessen sind, daß der mittlere Fehler m ist, bekommt man aus der Formel (8) im Punkt P_n das Quadrat des mittleren Querfehlers des Zuges

$$(9) \qquad M_q^2 = \frac{s^2 m^2}{\rho^2}\left\{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2\right\}$$

woraus, wenn man beachtet, daß in der Parenthese die Summe der Quadratzahlen von 1 bis $n - 1$ vorkommt, sich

$$(10) \qquad M_q = \pm \frac{sm}{\rho}\sqrt{\frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6}} \quad \text{ergibt.}$$

Wenn die Länge des ganzen Zuges $L = (n-1)\,s$ ist, und s in die Formel (10) eingesetzt wird, erhält man

$$(11) \qquad M_q = \pm L\,\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n\,(2n-1)}{6\,(n-1)}}$$

Wenn es sich um einen Zug mit nicht sehr wenigen Punkten handelt, kann die Eins im Zähler und Nenner unbeachtet bleiben, wodurch die Formel folgende einfache Form annimmt (siehe Jordan-Eggert 1914, S. 477–478).

$$(12) \qquad M_q = \pm L\,\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n}{3}}$$

Lassen wir die Anzahl n der Brechungswinkel im Zug eine ungerade Zahl sein, so ist die Ordnungszahl des Polygonpunktes in der Mitte des Zuges $\frac{n+1}{2}$. Gemäß der oben gebildeten Formel (8) ist vor der Ausgleichung der Koordinatenabschlußfehler im Punkt P_n ein Querfehler vorhanden

$$(13) \qquad \begin{aligned} f_q = \frac{s}{\rho}\Bigg\{&(n-1)\,\varepsilon_1 + (n-2)\,\varepsilon_2 + (n-3)\,\varepsilon_3 + \ldots + \left(\frac{n+1}{2}+1\right)\varepsilon_{\frac{n+1}{2}-2} \\ &+ \left(\frac{n+1}{2}\right)\varepsilon_{\frac{n+1}{2}-1} + \left(\frac{n+1}{2}-1\right)\varepsilon_{\frac{n+1}{2}} + \ldots + 2\,\varepsilon_{n-2} + 1\,\varepsilon_{n-1}\Bigg\} \end{aligned}$$

Wenn dieser Querfehler auf gewöhnliche Weise proportional den Seitenlängen ausgeglichen wird, ist dem Punkt $P_{\frac{n+1}{2}}$ in der Mitte des

Zuges die Verbesserung $\frac{f_q}{2}$ zuzufügen. Nach der Formel (8) besteht in diesem Punkt ein Querfehler

$$(14)\qquad (f'_q) = \frac{s}{\rho}\left\{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\varepsilon_1 + \left(\frac{n+1}{2}-2\right)\varepsilon_2 + \ldots + 2\,\varepsilon_{\frac{n+1}{2}-2} + 1\,\varepsilon_{\frac{n+1}{2}-1}\right\}$$

Nach der Ausgleichung bleibt also in der Mitte des Zuges der Querfehler

$$(15)\qquad f'_q = \frac{f_q}{2} - (f'_q)$$

Durch einsetzen von f_q und (f'_q) aus den Formeln (13) und (14) erhält man

$$(16)\qquad f'_q = \frac{s}{2\rho}\left\{1\,\varepsilon_2 + 2\,\varepsilon_3 + \ldots + \left(\frac{n-1}{2}-2\right)\varepsilon_{\frac{n+1}{2}-2} + \left(\frac{n-1}{2}-1\right)\varepsilon_{\frac{n+1}{2}-1} + \left(\frac{n-1}{2}\right)\varepsilon_{\frac{n+1}{2}} + \left(\frac{n-1}{2}-1\right)\varepsilon_{\frac{n+1}{2}+1} + \ldots + 2\,\varepsilon_{n-2} + 1\,\varepsilon_{n-1}\right\}$$

Vorausgesetzt, daß alle Winkel mit einer so großen Genauigkeit gemessen sind, daß der mittlere Fehler des Winkels m ist, bekommt das Quadrat des mittleren Querfehlers in der Zugmitte den Wert

$$(17)\qquad M'^2_q = \frac{s^2 m^2}{4\rho^2}\left\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \left(\frac{n-1}{2}-1\right)^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 + 1^2\right\}$$

Wenn man beachtet, daß der Ausdruck in der Parenthese die doppelte Summe der Quadratzahlen von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ weniger $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ ist, ergibt sich

$$(18)\qquad M'^2_q = \frac{s^2 m^2}{4\rho^2}\left\{\frac{(n-1)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)(n-1+1)}{6} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{s^2 m^2}{4\rho^2}\left\{\frac{(n-1)(n^2-2n+3)}{12}\right\} \ldots$$

$$M'_q = \pm \frac{sm}{\rho} \sqrt{\frac{(n-1)\left\{(n-1)^2+2\right\}}{48}} \tag{19}$$

Durch einsetzen von $s = \frac{L}{n-1}$ nimmt dies die Form an

$$M'_q = \pm L \frac{m}{\rho} \sqrt{\frac{(n-1)^2+2}{48\,(n-1)}} \tag{20}$$

und wenn —1 und +2 im Zähler sowie —1 im Nenner unbeachtet gelassen werden, erhalten wir die approximative Form

$$M'_q = \pm L \frac{m}{\rho} \sqrt{\frac{n}{48}} \tag{21}$$

Aus den Koeffizienten der Formel (16) geht hervor, daß die Fehler der Winkel in der Zugmitte am meisten auf den nach der Ausgleichung übrigbleibenden Querfehler einwirken. Die Koeffizienten dieser Winkelfehler sind nämlich merkbar größer als die Koeffizienten der Winkelfehler an den Enden des Zuges, welche von beiden Enden an symmetrisch von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ wachsen. Es muß auch bemerkt werden, daß in der Formel der Fehler des im Anfangspunkt des Zuges befindlichen Winkels gar nicht vorkommt, weshalb derselbe in einem Zug dieser Art nicht auf den Querfehler einwirkt. Der im Anfangspunkt gemessene Winkel hat also keinerlei Bedeutung für die innere Genauigkeit des Zuges, er ist aber doch notwendig, weil der Zug mit seiner Hilfe gleich im endgültigen Koordinatensystem berechnet werden kann, und der entstehende Koordinatenabschlußfehler zeigt, ob bei der Messung oder Ausrechnung grobe Fehler unterlaufen sind.

Vor der Ausgleichung ist am Ende des Zuges der mittlere Querfehler M_q, den die Formel (12) angibt, und nach der Ausgleichung bleibt in dessen Mitte gemäß der oben abgeleiteten Formel (21) der mittlere Querfehler M'_q. Wenn diese miteinander verglichen werden, konstatiert man, daß

$$M'_q : M_q = \sqrt{\frac{n}{48}} : \sqrt{\frac{n}{3}} = 1 : 4 \tag{22}$$

Demgemäß ist also zu erwarten, daß der mittlere Querfehler in der Mitte der Züge nach der Ausgleichung ungefähr ¼ des mittleren Querfehlers an den Enden der Züge ist.

Dies bedeutet auch, daß die Querabschlußfehler in solchen Zügen auf dem Vermessungsgebiet unter einer gewissen Grenze bleiben, zu erwarten ist, daß sich auch die in den Vermessungsresultaten übrigbleibenden Querfehler unter einer gewissen Grenze halten, deren Größe ca. ¼ der oberen Grenze der Querabschlußfehler ist.

Der Zug hat sowohl Koordinaten- wie Winkelanschluß

Züge, die sowohl Koordinaten- wie Winkelanschluß haben, sind bei der Stadtvermessung die allgemeinsten. Die Größe des mittleren Querfehlers in der Mitte eines solchen Zuges ist nach Jordan-Eggert (1914, S. 483)

$$M'_q = \pm L \frac{m}{\rho} \sqrt{\frac{n^4 + 2n^2 - 3}{192\, n\, (n-1)^2}} \tag{23}$$

oder als Näherungswert

$$M'_q = \pm L \frac{m}{\rho} \sqrt{\frac{n}{192}} \tag{24}$$

Weil die Ausgleichung des Winkelfehlers vor der Berechnung der Koordinaten ausgeführt wird, ist am Ende des in Rede stehenden Zuges (Jordan-Eggert, 1914, S. 480) ein mittlerer Querfehler

$$M_q = \pm L \frac{m}{\rho} \sqrt{\frac{n}{12}} \tag{25}$$

wonach

$$M'_q : M_q = \sqrt{\frac{n}{192}} : \sqrt{\frac{n}{12}} = 1 : 4 \tag{26}$$

Also gilt auch für einen derartigen Zug dasselbe, was oben [vgl. mit der Formel (22)] von den nach der Ausgleichung übrigbleibenden und an den Zugenden vorkommenden Querfehlern gesagt ist.

Die Abhängigkeit der Genauigkeit des Zuges von dem Punktabschlußfehler

Im Vorhergehenden ist die Einwirkung der Fehler der Längen- und Winkelmessung auf die Genauigkeit des Zuges getrennt behandelt worden. In einem fast gerade verlaufenden Zug wird hauptsächlich durch die Längenmessung ein Längsfehler verursacht, so daß $M'_l : M_l = 1 : 2$, und durch die Winkelmessung ein Querfehler so, daß $M'_q : M_q = 1 : 4$ ist. [Siehe die Formeln (6), (7), (22) und (26).]

Die Längs- und Querfehler zusammen verursachen den Punktfehler f. Wenn der mittlere Punktfehler am Ende des Zuges mit M bezeichnet wird und nach der Ausgleichung in der Mitte desselben mit M', ist

$$M' = \sqrt{M'^2_l + M'^2_q} \tag{27}$$

$$M = \sqrt{M_l^2 + M_q^2} = \sqrt{4\, M'^2_l + 16\, M'^2_q} \quad \therefore \tag{28}$$

$$M = 2 \sqrt{\frac{M'^2_l + 4\, M'^2_q}{M'^2_l + M'^2_q}}\, M' \tag{29}$$

Auf die Abhängigkeit des in der Zugmitte übrigbleibenden Fehlers von dem mittleren Punktfehler am Zugende wirkt also der Umstand, wie sich die Längs- und Querfehler zueinander verhalten.

Wenn angenommen wird, daß $M'_l = 0$ ist, oder daß in der Längenmessung gar kein Fehler vorliegt, ergibt sich

$$M = 4\,M' \tag{30}$$

und wenn angenommen wird, daß $M'_q = 0$ ist oder also die Winkelmessung als fehlerfrei betrachtet wird, ist

$$M = 2\,M' \tag{31}$$

Wenn die Formeln (30) und (31) in Betracht gezogen werden, kann man hieraus schließen, daß

$$2\,M' < M < 4\,M' \tag{32}$$

wonach sich M' zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}\,M$ und $\frac{1}{4}\,M$ bewegt.

In der Praxis sind jedoch (siehe Salonen, 1945, S. 186–187) die Längsfehler und die Querfehler ungefähr gleich groß, weshalb dann $M'_l = M'_q$ zu setzen ist; aus der Formel (29) folgt dann, daß in diesem Falle

$$M = \sqrt{10}\;M' \approx 3\,M' \tag{33}$$

Das will sagen, daß in einem annähernd geraden Polygonzug der nach der Ausgleichung übrigbleibende mittlere Punktfehler so von dem mittleren Punktabschlußfehler[1] am Zugende abhängig ist, daß der erstere ungefähr $^1/_3$ des letzteren ausmacht. Daraus folgt, *daß die Punktabschlußfehler als Maßstab für die Genauigkeit der Züge betrachtet werden können, so daß, wenn die Punktabschlußfehler sich auf dem Vermessungsgebiet unter einer gewissen Grenze halten, zu erwarten ist, daß auch die in den Zügen nach der Ausgleichung übrigbleibenden Punktfehler unter einer gewissen Grenze bleiben, deren Größe ungefähr $^1/_3$ des erstgenannten Grenzwertes ist.*

Obenerwähntes gilt also für ziemlich gerade Züge. Wenn der Zug gebrochen ist, wirken auf den Längsfehler auch die Fehler der Winkelmessung und auf den Querfehler auch die Fehler der Längenmessung. Um einen Begriff von dem Verhältnis der Fehler an den Enden und in der Mitte gebrochener Züge zu bekommen, sind in nachfolgender Tabelle Zahlenwerte für die Größe der eben genannten Fehler in solchen Zügen ausgerechnet, die in der Mitte eine Brechung machen. Bei den Beispielen ist vorausgesetzt, daß die Seitenlänge $s = 100$ m, $m_s = \pm 10$ mm und $m_w = \pm 20''$ ist.

Die Fehler in der Mitte der Züge sind mit Hilfe der von Eggert (Jordan-Eggert, 1914, S. 493) gebildeten Formeln[2]

---

[1] Der mittlere lineare Abschlußfehler.

[2] Die Formel (15).

$$(34) \qquad M'_l{}^2 = \frac{n-1}{4} \cos^2 \varphi \, m_s{}^2 + \frac{n\,(n^2-1)}{48} s^2 \sin^2 \varphi \, m_w{}^2$$

$$(35) \qquad M'_q{}^2 = \frac{n-1}{4} \sin^2 \varphi \, m_s{}^2 + \frac{n^4+2n^2-3}{192\,n} s^2 \cos^2 \varphi \, m_w{}^2$$

und die Fehler an den Enden der Züge mit Hilfe der von Eggert (1912, S. 507)[1] gebildeten Formeln

$$(36) \qquad M_l{}^2 = (n-1) \cos^2 \varphi \, m_s{}^2 + \frac{n^4+2\,n^2-3}{48\,n} s^2 \sin^2 \varphi \, m_w{}^2$$

$$(37) \qquad M_q{}^2 = (n-1) \sin^2 \varphi \, m_s{}^2 + \frac{n\,(n^2-1)}{12} s^2 \cos^2 \varphi \, m_w{}^2$$

worin m_s der mittlere Fehler einer Seite berechnet worden, m_w der mittlere Fehler des Winkels und φ die Abweichung der Anfangs- und Endhälfte des Zuges von der Richtung zwischen dem Anfangs- und Endpunkt ist. Die Abweichung vom gestreckten Winkel ist also für den in der Zugmitte befindlichen Winkel 2φ.

n	φ^g	M_l mm	M_q mm	M mm	M'_l mm	M'_q mm	M' mm	$\frac{M'}{M}$ %
5	0.0	20.0	9.9	22.3	10.0	2.6	10.3	46
5	16.7	19.3	10.9	22.2	9.7	3.5	10.4	47
5	33.3	17.5	12.2	21.9	9.0	5.5	10.5	48
5	50.0	14.6	15.8	21.5	7.9	7.3	10.7	50
9	0.0	28.2	24.3	37.3	14.1	6.2	15.4	41
9	16.7	27.4	24.6	36.9	14.0	7.0	15.7	43
9	33.3	25.2	25.4	36.8	13.7	8.9	16.0	44
9	50.0	21.8	26.3	34.2	13.2	10.9	17.1	50
17	0.0	40.0	63.5	75.0	20.0	15.9	25.6	34
17	16.7	39.5	62.2	73.6	21.0	16.2	26.5	36
17	33.3	38.1	58.5	69.8	23.5	17.1	29.0	42
17	50.0	36.2	53.0	64.2	26.5	18.1	32.1	50

Aus den angeführten Zahlenbeispielen geht hervor, daß der mittlere Punktfehler am Ende des Zuges kleiner wird, wenn der Zug von der gestreckten Richtung abweicht, und daß andererseits der in der Mitte übrigbleibende mittlere Punktfehler so wächst, daß wenn der Zug einen rechten Winkel bildet, der letztere ca. 50 % vom ersteren ist. Wenn man die Formeln (34), (35), (36) und (37) prüft, konstatiert man, daß wenn φ =

[1] Die Formeln (25) und (26).

50^g ist, das Verhältnis 1 : 2 zwischen den in Rede stehenden mittleren Punktfehlern in der Mitte und am Ende des Zuges besteht, einerlei wie sich die Genauigkeit der Längenmessung zu derjenigen der Winkelmessung verhält. Demnach dürfte man den abschließenden Satz ziehen können, daß *bei den in der Praxis bei der Stadtvermessung vorkommenden Zugformen M' zwischen $^1/_3\,M$ und $\frac{1}{2}\,M$ ist.*

Der Verfasser hat die Anwendung der oben theoretisch abgeleiteten Ungleichung $\frac{1}{2}\,M < M' < {}^1/_3\,M$ in der Praxis untersucht, indem aus den Polygonnetzen der Städte Helsinki, Tampere und Jyväskylä solche Züge ausgewählt worden sind, die von einem Dreieckspunkt zu einem anderen über einen mitten zwischen diesen Punkten liegenden Dreieckspunkt gehen. Jeder Zug ist durch den mittelsten Dreieckspunkt ausgerechnet, der dabei als Polygonpunkt betrachtet ist. Durch den Vergleich der Koordinaten, die aus der Polygon-Messung und -Rechnung für den mittleren Punkt erhalten worden sind, mit den Koordinaten der Dreiecksmessung für diesen Punkt wurde die Genauigkeit des zwischen den äußersten Dreieckspunkten verlaufenden Zuges untersucht. (Siehe Salonen, S. 173–174, 188–190.)

Auf diese Weise wurde konstatiert, daß die Punktfehler per Zug im Durchschnitt die folgenden sind:

		Abschlußfehler	Zugmitte	
		M	M'	$\frac{M'}{M}$
In den Zügen von Jywäskylä	(z = 7)	319 mm	131 mm	41 %
In den Zügen von Tampere	(z = 9)	93 mm	49 mm	52 %
In den Zügen von Helsinki	(z = 19)	71 mm	33 mm	47 %

Die Verhältnisse dieser Zahlen stimmen also recht gut mit der im Vorhergehenden aufgestellten Theorie überein.

Die Fehler der Polygonzüge sind entsprechend dem Vorhergehenden schon so klein, daß ein merkbarer Teil der auf dieser Basis bestimmten scheinbaren Fehler von den Dreieckspunkten verursacht wird, deren mittlerer Punktfehler z. B. in Helsinki ungefähr $\pm$ 15 mm ist.

Um eine Vorstellung zu erhalten, wie große Fehler die Polygonmessung allein verursache, wurden geschlossene Polygone untersucht, die auf folgende Weise aus dem Polygonnetz von Helsinki gewählt und ausgerechnet worden sind: Aus dem Polygonnetz sind Glieder von der ungefähren Form einer Acht gewählt worden, die ausgehend von dem in der Mitte gelegenen Anfangspunkt ununterbrochen an beiden Schlingen entlang gehend zurück zum Anfangspunkt ausgerechnet wurden, ohne daß in dem in der Mitte befindlichen Anfangspunkt eine Winkel- und Koordinatenausgleichung vorgenommen worden ist. Auf diese Weise kann man nach Ausrechnung der Koordinaten die ausgeglichenen Koordinaten des in der Mitte des Polygons befindlichen Punktes mit den Koordinaten des (Anfangs- und) Endpunktes vergleichen und dadurch einen Begriff von der Genauigkeit der Mitte des Zuges nach der Ausgleichung bekommen. Es ist ersichtlich, daß in solchen Kontrollpunkten die systematischen Fehler der Längenmessung in den Schlingen nicht sichtbar werden,

da ihre Wirkung sich zum großen Teil gegenseitig aufhebt. Dagegen kommt in den Kontrollpunkten die Wirkung der zufälligen Fehler der Winkel- und Längenmessung zum Vorschein.

In den auf diese Weise ausgerechneten geschlossenen Polygonen ($z = 9$) ist $\frac{[f]}{z} = 30$ mm, $\frac{[f']}{z} = 14$ mm und $\frac{[f']}{[f]} \cdot 100 = 47\,\%$, weshalb die dargestellte Theorie in der Praxis auch für die oben beschriebene Zugform Anwendung finden dürfte.

Das Verhältnis der Punktfehler ist auch so bestimmt worden, daß man in jedem Zug ausgerechnet hat, wieviel Prozent f' von f ausmacht, und von den auf diese Weise erhaltenen Prozentzahlen wurde der Durchschnitt und dessen mittlerer Fehler bestimmt. Die Resultate sind folgende:

in den Zügen von Jywäskylä	$39 \pm 6\,\%$
in den Zügen von Tampere	$74 \pm 26\,\%$ und
in den Zügen von Helsinki	$45 \pm 8\,\%$

sowie in geschlossenen Polygonen in Helsinki $44 \pm 11\,\%$.

Diese Zahlen stimmen also auch verhältnismäßig gut mit dem im Vorhergehenden theoretisch Festgestellten überein (die Züge von Tampere ausgenommen, in welchen die Prozentzahl von einem Zug verursacht worden ist, in dem diese Prozentzahl wahrscheinlich durch einen Zufall im Verhältnis zu den übrigen Zügen verhältnismäßig groß ist).

Im Vorhergehenden ist also sowohl theoretisch als auch auf der Basis des beobachteten Materials die Ungleichung $\frac{1}{2} M > M' > \frac{1}{3} M$ bestätigt. Diese einfache Regel kann daher passend als Formel für die Fehlergrenzen verwendet werden, wenn man nach einer Punktgenauigkeit strebt, die für einen gewissen Zweck erforderlich ist, indem für den größten zugelassenen Abschlußfehler eines Zuges der doppelte Wert jenes Punktfehlers angenommen wird, der in Anbetracht des in Rede stehenden Zwecks als Fehler der Polygonpunkte gewünscht wird.

Wenn z. B. für die Polygonpunkte eine solche Genauigkeit gewünscht wird, daß ihr mittlerer Punktfehler kleiner als 25 mm sei, muß als größter erlaubter Punktfehler 3.25 mm festgelegt werden, und als größter zugelassener Punktabschlußfehler des Zuges dessen doppelter Wert[1], oder 150 mm.

Diese Genauigkeit ist z. B. mit den heutigen Verfahren erreichbar und eine solche Genauigkeit ist auch ungefähr für diejenigen Aufgaben der Stadtvermessung erforderlich, welche die größte Präzision voraussetzen (Salonen 1945). Deswegen sollte bei der Stadtvermessung als Regel angenommen werden, daß bei der Polygonmessung die Punktabschlußfehler der Züge kleiner sein müssen als 150 mm.

Literaturverzeichnis

Eggert O., 1912: Die zulässigen Abschlußfehler der Polygonzüge. Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 495—508.

[1] Indem man sicherheitshalber von den oben abgeleiteten Grenzwerten, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$, den letzteren benutzt.

Jordan-Eggert, 1914: Handbuch der Vermessungskunde II. Stuttgart.
Rompf W., 1933: Streckenmessung mit dem Reduktionstachymeter Boßhart-Zeiß. Allgemeinen Vermessungsnachrichten, S. 264—267.
Salonen E., 1945: Kaupunkimittauksent ehtävistä ja tarkkuudesta Suomen oloja silmällä pitäen. (Über die Aufgaben und die Genauigkeit der Stadtvermessung mit Berücksichtigung der finnischen Verhältnisse.) Helsinki.
Schulze Fr., 1928: Die Winkelmessung, Die Winkelmessungsgenauigkeit und der Winkelfehler in Polygonzügen für Stadt- und Flurmessungen. Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 649—658, 667—673, 681—686.
Ulbrich K., 1932: Der Winkelabschlußfehler in Polygonzügen. Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 369—386.

Wirtschaftliches Koordinatenrechnen

Dr.-Ing. Karl Rinner

Nr. 1

Die Kartierung polar oder orthogonal aufgenommener Katasterpunkte kann nicht unmittelbar erfolgen, da lediglich örtliche, in verschiedenen Systemen liegende Koordinaten gemessen werden und nicht Koordinatenwerte eines einzigen Systems. Dies ist erst möglich, wenn entweder die gemessenen örtlichen Koordinaten in ein einheitliches System transformiert werden oder Ursprung und Achsen jedes örtlichen Systems in einem solchen System berechnet sind.

Das zweite Verfahren hat den Vorteil, daß die Meßwerte unmittelbar aufgetragen werden, die Kartierung also rasch durchgeführt und überprüft werden kann. Die Genauigkeit der kartierten Punktlagen ist jedoch geringer als bei der Kartierung in einem Guß, und es besteht auch keine Möglichkeit, die Flächen rechnerisch zu ermitteln. Aus diesem Grunde wird in Österreich grundsätzlich die Transformation in ein einheitliches System durchgeführt und so erreicht, daß alle aufgenommenen Punkte mit gleichbleibender Genauigkeit im Plan dargestellt werden. Die Wirtschaftlichkeit hängt jedoch von dem Aufwand ab, der mit der Transformation der Meßwerte verbunden ist[1].

Um diese Transformation in einfacher Weise ausführen zu können und so ein wirtschaftliches Koordinatenrechnen zu ermöglichen, wurde in Österreich nach den Angaben der Dipl.-Ing. *L. Avanzini* und *H. Bohrn* von der *Firma Rost*, Wien, eine eigene Rechenmaschine entwickelt. Im folgenden wird eine Darstellung der Grundprinzipien dieser als «Coorapid» (rapider Koordinatenrechner) bezeichneten Maschine gegeben. Wegen einer ausführlichen Beschreibung wird auf die Prospekte der Firma Rost, Wien, verwiesen.

[1] Dies wird augenscheinlich, wenn beachtet wird, daß bis 1939 im Österreichischen Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen jährlich 250000 bis 300000 Punkte transformiert werden mußten.