

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 46 (1948)

Heft: 4

Artikel: Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerharten Festpunkten [Schluss]

Autor: Ackerl, Franz

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-205582>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR
VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK

Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter f. Kulturtechnik: E. RAMSER, Prof. f. Kulturtechnik ETH., Freiestr. 72, Zürich

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

NR. 4 • XLVI. JAHRGANG

der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“
Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats

13. APRIL 1948

INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zelle.
Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

ABONNEMENTE:

Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich

Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für

Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich

Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz.

Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerhaften Festpunkten

Von Prof. Dr. Franz Ackerl, Wien.

(Schluß)

Mit den Erfahrungen, die bei der Reduktion der ursprünglich recht unübersichtlichen Ausdrücke für die Koeffizienten { I } bis { VI } zu den überaus kurzen Formeln (56a) führten, konnten auch die Gl. (65a) und (66a) sehr vereinfacht werden. Wir wollen den Gang der Zusammenfassung für die Gl. (65a) an Hand der Abb. 2 verfolgen.

Für das zweite Glied auf der rechten Seite erhalten wir

$$(x^2 + y^2)(x_A^2 + y_A^2) = (x^2 x_A^2 + y^2 y_A^2) + (x^2 y_A^2 + y^2 x_A^2)$$

und weiters mit dem zweiten Faktor des letzten Gliedes

$$(x_A x + y_A y)^2 = (x^2 x_A^2 + y^2 y_A^2) + 2 x_A x y_A y,$$

so daß

$$(x^2 + y^2)(x_A^2 + y_A^2) = (x_A x + y_A y)^2 - 2 x_A x y_A y + (x^2 y_A^2 + y^2 x_A^2),$$

oder auch

$$(x^2 + y^2)(x_A^2 + y_A^2) = (x_A x + y_A y)^2 + (x y_A - y x_A)^2. \quad (67a)$$

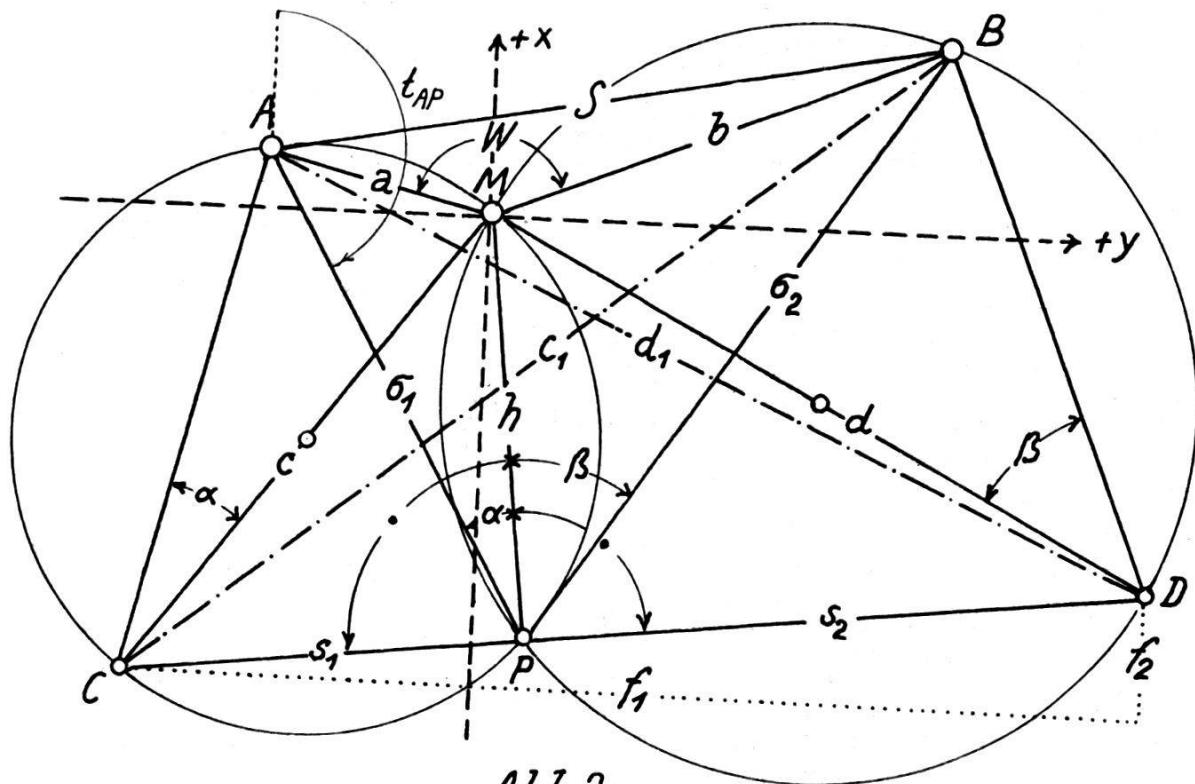


Abb. 2

Durch Einsetzung dieses Ergebnisses in das zweite Glied von (65a) entsteht:

$$\left\{ \text{VII} \right\} s^2 \sin^4 \alpha = (x_A x_D + y_A y_D)^2 + (x_A x + y_A y)^2 + (x y_A - y x_A)^2 - 2 (x_A x_D + y_A y_D) (x_A x + y_A y).$$

Nach Zusammenfassung der beiden ersten Glieder mit dem letzten ergibt sich:

$$\left\{ \text{VII} \right\} s^2 \sin^4 \alpha = \{(x_A x_D + y_A y_D) - (x_A x + y_A y)\}^2 + (x y_A - y x_A)^2. \quad (68a)$$

Die Summanden in der geschwungenen Klammer stellen wir auf die folgende Art dar:

$$2 x_A x_D = x_A^2 + x_D^2 - (x_A - x_D)^2, \quad 2 y_A y_D = y_A^2 + y_D^2 - (y_A - y_D)^2$$

$$2 (x_A x_D + y_A y_D) = (x_A^2 + y_A^2) + (x_D^2 + y_D^2) - [(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2]$$

und durch eine ähnliche Rechnung finden wir:

$$2 (x_A x + y_A y) = (x_A^2 + y_A^2) + (x^2 + y^2) - [(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2].$$

Aus der Abb. 2 entnehmen wir die folgenden Beziehungen:

$$(x_A^2 + y_A^2) = a^2, \quad (x_D^2 + y_D^2) = d^2, \quad (x^2 + y^2) = h^2,$$

$$(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = d_1^2, \quad (x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 = \sigma_1^2,$$

so daß sich ergibt

$$(x_A x_D + y_A y_D) = \frac{1}{2} (a^2 + d^2 - d_1^2), \quad (x_A x + y_A y) = \frac{1}{2} (a^2 + h^2 - \sigma_1^2)$$

$$\text{und } \{(x_A x_D + y_A y_D) - (x_A x + y_A y)\} = \frac{1}{2} (d^2 - h^2 - d_1^2 + \sigma_1^2).$$

Zufolge Abb. 2 haben wir $h^2 = d^2 - s_2^2$ bzw. auch noch

$$d_1^2 = \sigma_1^2 + s_2^2 - 2\sigma_1 s_2 \cos (90^\circ + a) = \sigma_1^2 + s_2^2 + 2\sigma_1 s_2 \sin a,$$

und finden schließlich

$$\{(x_A x_D + y_A y_D) - (x_A x + y_A y)\}^2 = \sigma_1^2 s_2^2 \sin^2 a. \quad (69a)$$

Das zweite Glied von (68a) deuten wir durch die Fläche des Dreiecks $A M P$, nämlich:

$$\begin{aligned} 2 F_{AMP} &= y_A (x - x_M) + y_M (x_A - x) + \frac{y (x_M - x_A)}{x_M = y_M = 0} \\ &= y_A x - y x_A = \sigma_1 h \sin a, \end{aligned}$$

$$\text{so daß } (x y_A - y x_A)^2 = \sigma_1^2 h^2 \sin^2 a. \quad (70a)$$

Mit (69a) und (70a) geht (68a) über in

$$\{\text{VII}\} s^2 \sin^4 a = \sigma_1^2 \sin^2 a (s_2^2 + h^2) = \sigma_1^2 \sin^2 a d^2, \quad \{\text{VII}\} = \sigma_1^2 \frac{d^2}{s^2 \sin^2 a}.$$

Beachten wir nun noch das Dreieck $A M C$, woraus $\sin a = \frac{a}{c}$, so

erhalten wir als Schlußergebnis:

$$\{\text{VII}\} = \frac{c^2 d^2}{a^2 s^2} \sigma_1^2. \quad (71a)$$

In ähnlicher Weise entsteht aus Gleichung (66a):

$$\{\text{VIII}\} = \frac{c^2 d^2}{b^2 s^2} \sigma_2^2. \quad (72a)$$

Den Gleichungen (25a) bzw. (26a)–(28a) entsprechend ist somit der Beitrag μ_0 der Beobachtungsfehler m_α, m_β zum Lagefehler M_P des Neupunktes P bestimmt durch:

$$\mu_0^2 = \mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 = \{\text{VII}\} m_\alpha^2 + \{\text{VIII}\} m_\beta^2, \quad (73a)$$

$$\mu_0^2 = \frac{c^2 d^2}{s^2} \left(\frac{\sigma_1^2}{a^2} m_\alpha^2 + \frac{\sigma_2^2}{b^2} m_\beta^2 \right). \quad (74a)$$

Wir wollen nun noch die Formel (74a) mit jener vergleichen, die von Eggert in [4] (S. 450) und [5] (S. 135) auf einem anderen Weg abgeleitet worden war. An Hand der Abb. 3, mit den hier gewählten Bezeichnungen, lautet das Ergebnis von Eggert:

$$\mu^2_0 = \frac{1}{(4\Delta^2)} (m^2_1 m^2_a + m^2_3 m^2_\beta), \quad (75)$$

$$r_1 = \frac{1}{\sigma_1}, \quad r_2 = \frac{1}{h}, \quad r_3 = \frac{1}{\sigma_2}, \quad (76)$$

$$(2\Delta) = r_1 r_2 \sin \alpha + r_2 r_3 \sin \beta - r_1 r_3 \sin (\alpha + \beta), \quad (77)$$

$$m^2_1 = r^2_2 + r^2_3 - 2 r_2 r_3 \cos \beta, \quad m^2_3 = r^2_1 + r^2_2 - 2 r_1 r_2 \cos \alpha.$$

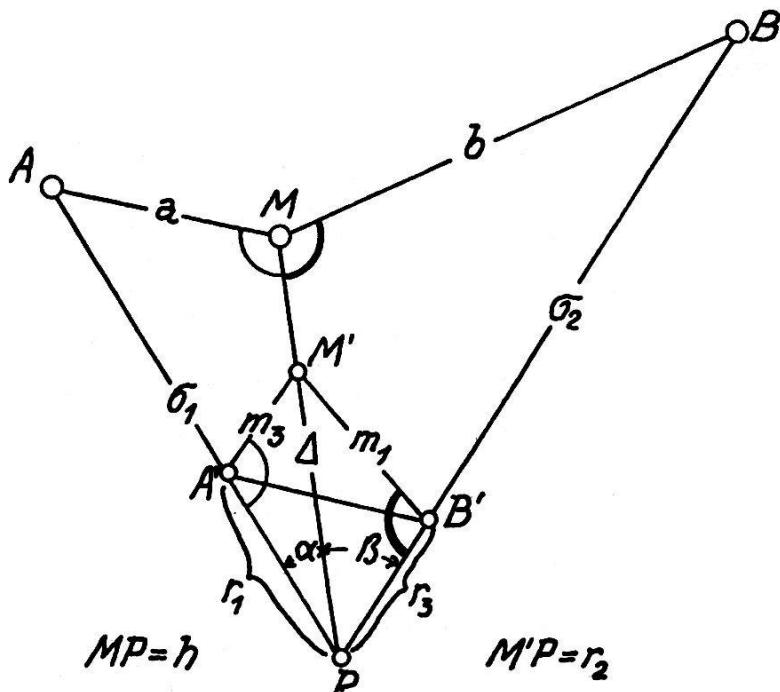


Abb. 3

Zum Nachweis der Identität von (74a) und (75) benützen wir die Ähnlichkeit der Dreiecke, die zufolge der mit (76) eingeführten reziproken Abbildung der Punkte A, M, B nach A', M', B' entstehen. Entnimmt man aus der Abb. 3 die folgenden Beziehungen

$$\sigma_1 : r_2 = h : r_1 = a : m_3, \quad \sigma_2 : r_2 = h : r_3 = b : m_1,$$

so findet man

$$m_3 = \frac{r_1 a}{h} = \frac{a}{\sigma_1 h}, \quad m^2_3 = \frac{a^2}{\sigma_1^2 h^2}, \quad m_1 = \frac{r_3 b}{h} = \frac{b}{\sigma_2 h}, \quad m^2_1 = \frac{b^2}{\sigma_2^2 h^2}, \quad (78)$$

und nach einer längeren, hier nicht mitgeteilten Entwicklung erhalten wir:

$$(4 \Delta^2) = \frac{a^2 b^2 s^2}{c^2 d^2 h^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}. \quad (79)$$

Durch Einsetzung von (78) und (79) in die Formel (75) ergibt sich die zu beweisende Übereinstimmung mit (74a).

Während für die Lösung von *Eggert*, zur Entnahme der Größen m_1 , m_3 und der Fläche Δ , immer erst die Bildpunkte A' , M' , B' konstruiert, oder aber die Rechnungen zu (77) durchgeführt werden müssen, können die Argumente für unsere Lösung (74a) sogleich aus einem guten Netzplan abgegriffen werden.

Zum Abschluß wollen wir die Ergebnisse in einer Art zusammenstellen, die sich sowohl für die praktische Verwendung, wie auch für eine im Lauf befindliche Erweiterung der Untersuchung von ähnlichen räumlichen Problemen, als nützlich erweist.

Wir fassen die mit den Gl. (56a) gegebenen Koeffizienten $\{ \}$ als jene Fehlereinflüsse E_i auf, die durch die Einheiten der Koordinaten- oder Winkelfehler erzeugt werden und bestimmen einen Betrag G als typisches Kennzeichen jeder geometrischen Figur. Damit erhalten wir aus (56a), (71a), (72a) die folgende Übersicht:

$$\left. \begin{aligned} G^2 &= \frac{c^2 d^2 S^2}{a^2 b^2 s^2}, \\ \{I\} = (E^2 x_A) &= G^2 \frac{b^2}{S^2} \sin^2 t_{AP}, & \{II\} = (E^2 y_A) &= G^2 \frac{b^2}{S^2} \cos^2 t_{AP}, \\ \{III\} = (E^2 x_B) &= G^2 \frac{a^2}{S^2} \sin^2 t_{BP}, & \{IV\} = (E^2 y_B) &= G^2 \frac{a^2}{S^2} \cos^2 t_{BP}, \\ \{V\} = (E^2 x_M) &= G^2 \frac{S^2}{S^2} \sin^2 t_M, & \{VI\} = (E^2 y_M) &= G^2 \frac{S^2}{S^2} \cos^2 t_{MP}, \\ \{VII\} = (E^2 \alpha) &= G^2 \frac{b^2}{S^2} \sigma_1^2, & \{VIII\} = (E^2 \beta) &= G^2 \frac{a^2}{S^2} \sigma_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Damit kann der Lagefehler des Neupunktes für gegebene Koordinatenfehler m_{x_i} , m_{y_i} der bekannten Punkte und für die Winkelfehler m_α , m_β aus (25a) ermittelt werden.

Trennt man den Beitrag der Koordinatenfehler M^2_K von dem der Winkelfehler M^2_0 nach $M^2_P = M^2_K + M^2_0$, so ergibt sich mit der schon vor Gl. (57a) getroffenen Annahme: $m_{x_i} = m_{y_i} = m_i$, $m^2_i = \frac{M^2_i}{2}$ und mit den Formeln (57a)–(59a):

$$M^2_K = \mu^2_A + \mu^2_B + \mu^2_M = \frac{G^2}{2 S^2} (b^2 M^2_A + a^2 M^2_B + S^2 M^2_M). \quad (81)$$

Hingegen berechnet man mit der Annahme gleicher Winkelfehler ($m_\alpha = m_\beta = m$) aus (73a) bzw. (74a):

$$M^2_0 = \mu^2_\alpha + \mu^2_\beta = \frac{G^2}{S^2} (b^2 \sigma^2_1 + a^2 \sigma^2_2) m^2. \quad (82)$$

Für die weitere Vereinfachung, daß alle gegebenen Punkte den gleichen Lagefehler $M_A = M_B = M_M = M$ aufweisen, erhalten wir aus (81):

$$M^2_K = \frac{G^2}{2 S^2} (a^2 + b^2 + S^2) M^2, \quad (83)$$

übereinstimmend mit Gl. (61a), die den Lagefehler von P ohne den Einfluß der Winkelfehler angibt.

Aus der Reihe von möglichen Schlußfolgerungen, die in einer späteren Veröffentlichung behandelt werden, soll hier noch untersucht werden, für welchen Winkelfehler m der Einfluß M^2_K der fehlerhaften Festpunkte in einem bestimmten Verhältnis steht zum Einfluß M^2_0 der Beobachtungsfehler.

Mit dem Ansatz $M^2_K = \lambda^2 M^2_0$ ergibt sich aus (83) und (82)

$$m^2 = \frac{b^2 + a^2 + S^2}{2 \lambda^2 (b^2 \sigma^2_1 + a^2 \sigma^2_2)} M^2. \quad (84)$$

Setzen wir hier entsprechend Abb. 2: $S^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos W$, so finden wir

$$m^2 = \frac{(a^2 + b^2) - a b \cos W}{\lambda^2 (b^2 \sigma^2_1 + a^2 \sigma^2_2)} M^2. \quad (85)$$

Mit der Annahme $a = b = g$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ entsteht

$$m^2 = \frac{M^2}{2 \lambda^2 \sigma^2} (2 - \cos W). \quad (86)$$

Wenn also der Einfluß der Beobachtungsfehler z. B. höchstens gleich groß sein soll ($\lambda^2 = 1$) wie der Einfluß der fehlerhaften Festpunkte, so ergibt sich

$$m^2 = \frac{M^2}{2 \sigma^2} (2 - \cos W). \quad (87)$$

Für die bei einer Verbindung von Kreta mit Afrika etwa geltenden Bedingungen: $W = 180^\circ$, $M = \pm 1$ (Meter), $\sigma = 36 \cdot 10^4$ (Meter) erhalten wir den zulässigen Maximalwert $m = \pm 0.68''$.

Die am Beginn erwähnten Untersuchungen über den Einfluß der Lagefehler der Festpunkte auf die Ergebnisse der Grundaufgaben geo-

däischer Punktbestimmungen sind als eine für praktische Zwecke anwendbare Vorstufe zu betrachten zur Beantwortung der allgemeinen Frage: „Welche mittleren Fehlerellipsen der Neupunkte sind zu erwarten, wenn die mittleren Fehlerellipsen der gegebenen Punkte bekannt sind?“

Die für den Fall fehlerfreier Winkelbeobachtungen bereits vorliegenden Entwicklungen werden, nach Einbeziehung des Einflusses der Beobachtungsfehler, als vollständige Zusammenfassung mitgeteilt werden.

Die indirekte Distanzmessung mit Radar

E. Bachmann, dipl. Ing.

Der Geometer hat zu allen Zeiten den Distanzmeßwerkzeugen seine besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Er war aktiv an der Normalisierung der Maßsysteme beteiligt, hat durch stetiges Verbessern die Meßlatte und das Meßband in ihre heutige Gebrauchsform gebracht und seit ca. 150 Jahren die indirekte Distanzmessung mit allen Mitteln gefördert.

Von der genialen Idee des einfachen Fadendistanzmessers von Reichenbach bis zu den modernen selbstreduzierenden Doppelbildentfernungsmessern war ein weiter Weg. Im Laufe der Entwicklung wurde die Meßbasis (Latte) von der senkrechten in die horizontale Lage verlegt, die Basis selbst aus Invar hergestellt und der feste distanzmessende Winkel anstatt durch Fäden, mit optischen Mitteln erzeugt. Das Grundprinzip der Distanzmessung ist aber im Laufe der Entwicklung immer das gleiche geblieben.

Die Meßgenauigkeit konnte durch diese Verbesserungen um das 10–20fache gesteigert werden und der mittlere Fehler der optischen Distanzmessung ist heute ca. 1/6000 der gemessenen Entfernung. Der Meßbereich der Feldmeßarbeiten ist mit ca. 150–200 m ungefähr gleich geblieben. Für militärische Zwecke, wo größere Entfernungen festgestellt werden müssen, wurden bis heute sogenannte Telemeter verwendet, die je nach ihrer Aufgabe eine Basislänge von 1–10 m aufwiesen und Entfernungen bis max. 30 km bestimmen konnten. Die Genauigkeit solcher Riesentelemeter gibt die englische Marine mit 1 % der Entfernung an. Der Telemeter zeigt somit auf 30 km einen mittleren Fehler von ± 300 m.

Während des Krieges wurde von den Engländern und Amerikanern ein neues Distanzmeßgerät entwickelt, welches anfänglich nur zur Frühwarnung vor feindlichen Flugzeugen und ungefähren Entfernungsbestimmung dienen sollte, dann aber bald als unentbehrliches und kriegsentscheidendes Distanzmeßgerät bei der Fliegerabwehr, der Marine, der Flugwaffe und der schweren Artillerie eingeführt wurde. Dieses Orientierungs- und Distanzmeßgerät erhielt den kurzen, schon heute zum Schlagwort ausgereiften Namen «RADAR». Radar ist die Abkürzung für das englische «Radio, Direction And Range», oder auf Deutsch «Radio, Richtung und Distanz». Das Radar mißt, wie es schon die Bezeichnung andeut-