Elementare Ableitung der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung [Schluss]

Autor(en): **Bachmann, W.K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **45 (1947)**

Heft 11

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-204734

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR

VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK

Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. **C. F. BAESCHLIN,** Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter f. Kulturtechnik: **E. RAMSER,** Prof. f. Kulturtechnik ETH., Freiestr. 72, Zürich

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

NR. 11 • XLV. JAHRGANG
der „Schweizerischen Geometer-Zeitung"
Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats
11. NOVEMBER 1947
INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zeile. Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

ABONNEMENTE:
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich
Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich
Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

Elementare Ableitung der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung

von Prof. Dr. W. K. Bachmann

(Schluß)

Wir wollen jetzt noch die wahren Restparallaxen in den 6, zur gegenseitigen Orientierung verwendeten, Punkten berechnen, was durch Einführung der wahren Fehler $(bz_B)_M - (bz_B)_0$, $(\varphi_B)_M - (\varphi_B)_0$ usw. der Unbekannten in die Parallaxengleichungen geschehen kann. Wir erhalten so, wenn wir diese Parallaxen mit dem Index M bezeichnen,

$$pv_1 = - bd\kappa_B - dby_B + hdw_B$$

$$(pv_1)_M = - b\left\{(\kappa_B)_M - (\kappa_B)_0\right\} - \left\{(by_B)_M - (by_B)_0\right\} + h\left\{(w_B)_M - (w_B)_0\right\}.$$

Berücksichtigen wir nun die Gleichungen (3), (4) und (5), so finden wir

$$(pv_1)_M = + (v_1 - v_2') + v_2' - \frac{h^2}{a^2}\left\{\frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} + \frac{h^2}{a^2}\left\{\frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\}$$

(6) $$\boxed{(pv_1)_M = + v_1}$$

$$(pv_2)_M = -\left\{(by_B)_M - (by_B)_0\right\} + h\left\{(w_B)_M - (w_B)_0\right\}$$

$$(pv_2)_M = +v_2' - \frac{h^2}{a^2}\left\{\frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} + \frac{h^2}{a^2}\left\{\frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\}$$

(7) $$\boxed{(pv_2)_M = +v_2'}$$

$$pv_3 = -bd\kappa_B - dby_B + h\left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right)dw_B - \frac{ab}{h}d\varphi_B + \frac{a}{h}dbz_B$$

$$(pv_3)_M = \begin{cases} (+v_1 - v_2') + v_2' - \dfrac{h^2}{a^2}\left\{\dfrac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} + \dfrac{-v_4 + v_6 + v_3 - v}{2} \\ + \dfrac{h^2}{a^2}\left(1 + \dfrac{a^2}{h^2}\right)\left\{\dfrac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} + \dfrac{v_4 - v_6}{2} \end{cases}$$

$$(pv_3)_M = v_1 + \frac{v_3 - v_5}{2} + \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}$$

(8) $$\boxed{(pv_3)_M = \frac{v_3 - v_5 + v_4' + v_6'}{2} + v_1 - v_2}$$

$$pv_4 = -dby_B + h\left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right)dw_B + \frac{a}{h}dbz_B$$

$$(pv_4)_M = \begin{cases} +v_2' - \dfrac{h^2}{a^2}\left\{\dfrac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} + \dfrac{v_4 - v_6}{2} \\ + \dfrac{h^2}{a^2}\left(1 + \dfrac{a^2}{h^2}\right)\left\{\dfrac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} \end{cases}$$

(9) $$\boxed{(pv_4)_M = \frac{v_4 - v_6 + v_4' + v_6'}{2} + v_2' - v_2}$$

$$pv_5 = -bd\kappa_B - dby_B + h\left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right)dw_B + \frac{ab}{h}d\varphi_B - \frac{a}{h}dbz_B$$

$$(pv_5)_M = \begin{cases} +v_1 - v_2' + v_2' - \dfrac{h^2}{a^2}\left\{\dfrac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} + \dfrac{v_6 - v_4}{2} \\ + \dfrac{h^2}{a^2}\left(1 + \dfrac{a^2}{h^2}\right)\left\{\dfrac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} + \dfrac{v_4 - v_6 + v_5 - v_3}{2} \end{cases}$$

(10)
$$(pv_5)_M = \frac{v_5 - v_3 + v_4' + v_6'}{2} + v_1 - v_2$$

$$pv_6 = -dby_B + h\left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right) dw_B - \frac{a}{h} dbz_B$$

$$(pv_6)_M = \begin{cases} + v_2' - \frac{h^2}{a^2}\left\{\frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} + \frac{v_6 - v_4}{2} \\ + \frac{h^2}{a^2}\left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right)\left\{\frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}\right\} \end{cases}$$

(11)
$$(pv_6)_M = \frac{v_6 - v_4 + v_6' + v_4'}{2} + v_2' - v_2$$

Wir haben die hier erhaltenen Resultate in der nachfolgenden Tabelle I zusammengestellt, und zwar auf gleiche Art, wie es teilweise von Prof. Kasper schon gemacht worden ist.

Anhand dieser Tabelle können wir nun, durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes, die mittleren Fehler μ_{φ_B}, μ_{bz_B} usw. der Orientierungsunbekannten, sowie die mittleren Restparallaxen $\mu_{pv_1} \ldots . \mu_{pv_6}$ berechnen, sobald wir den mittleren Fehler μ der Gewichtseinheit, das heißt, den mittleren Fehler des Wegstellens einer Vertikalparallaxe im *Objektraum*, kennen. Man erhält so

$$\mu^2 bz_B = \left\{\frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2}\right\}\mu^2 = \frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}\mu^2$$

und der Gewichtskoeffizient $Q_{bz_B\, bz_B}$ von bz_B wird somit

(12)
$$Q_{bz_B\, bz_B} = \frac{\mu^2 bz_B}{\mu^2} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}.$$

Die weiteren Gleichungen der Tabelle I ergeben sodann

$$\mu^2 \varphi_B = \left\{\frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2b^2} + \frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2b^2} + \frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2b^2} + \frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2b^2}\right\}\mu^2$$

(13)
$$Q_{\varphi_B\varphi_B} = \frac{h^2}{a^2b^2}$$

Tabelle I

Gl. No.		Wahre Vertikalparallaxen — Beobachtungsfehler								
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_2'	v_4'	v_6'
(1)	$(bz_B)_M - (bz_B)_0 =$	.	.	.	$+\frac{1}{2}\frac{h}{a}$	.	$-\frac{1}{2}\frac{h}{a}$	.	.	.
(2)	$(\varphi_B)_M - (\varphi_B)_0 =$	.	.	$-\frac{1}{2}\frac{h}{ab}$	$+\frac{1}{2}\frac{h}{ab}$	$+\frac{1}{2}\frac{h}{ab}$	$-\frac{1}{2}\frac{h}{ab}$	.	.	.
(3)	$(w_B)_M - (w_B)_0 =$	.	$-\frac{h}{a^2}$	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2}\frac{h}{a^2}$	$+\frac{1}{2}\frac{h}{a^2}$
(4)	$(by_B)_M - (by_B)_0 =$	.	$-\frac{h^2}{a^2}$	.	.	.	.	-1	$+\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}$	$+\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}$
(5)	$(\kappa_B)_M - (\kappa_B)_0 =$	$-\frac{1}{b}$	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{b}$	.	.
(6)	$(pv_1)_M$	$+1$	.	.	.	.	.	.	.	.
(7)	$(pv_2)_M$	.	.	.	.	.	.	$+1$	.	.
(8)	$(pv_3)_M$	$+1$	-1	$+\frac{1}{2}$	.	$-\frac{1}{2}$	.	.	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
(9)	$(pv_4)_M$	.	-1	.	$+\frac{1}{2}$	.	$-\frac{1}{2}$	$+1$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
(10)	$(pv_5)_M$	$+1$	-1	$-\frac{1}{2}$	.	$+\frac{1}{2}$	.	.	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
					1		1		1	1

(14) $$Q_{w_B w_B} = \frac{3}{2}\frac{h^2}{a^4} \qquad Q_{by_B by_B} = 1 + \frac{3}{2}\frac{h^4}{a^4} \qquad Q_{\kappa_B \kappa_B} = \frac{2}{b^2}$$

$$\mu^2 pv_1 = \mu^2 \qquad \therefore \quad Q_{pv_1 pv_1} = 1.$$

Aus den Gleichungen (6) bis (11) erhalten wir somit

(15) $$Q_{pv_1 pv_1} = 1 \qquad Q_{pv_2 pv_2} = 1$$
$$Q_{pv_3 pv_3} = Q_{pv_4 pv_4} = Q_{pv_5 pv_5} = Q_{pv_6 pv_6} = 3.$$

Jetzt fehlen uns aber noch die Korrelationskoeffizienten der Orientierungsunbekannten. Auch da kann man, wenn man unbedingt die symbolische Gewichtsberechnung vermeiden will, mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz durchkommen. Zu diesem Zwecke gehen wir folgendermaßen vor: Es sei

(16) $$\xi = x + y$$

eine Funktion der *abhängigen* Unbekannten x und y, welche zum Beispiel durch vermittelnde Ausgleichung von Beobachtungen, oder auf eine beliebige andere Art, bestimmt worden sind. Wie dem auch sei, man hat immer die gut bekannte Formel

$$\mu^2_\xi = (Q_{xx} + 2\,Q_{xy} + Q_{yy})\,\mu^2$$

oder

(17) $$Q_{\xi\xi} = Q_{xx} + 2\,Q_{xy} + Q_{yy}$$

die in jedem Falle richtig ist. Wir erhalten somit für Q_{xy} den Wert

$$Q_{xy} = \frac{1}{2}\left\{ Q_{\xi\xi} - Q_{xx} - Q_{yy} \right\} \quad \text{oder}$$

(18) $$Q_{xy} = \frac{1}{2}\left\{ Q_{(x+y)\,(x+y)} - Q_{xx} - Q_{yy} \right\}.$$

Um zum Beispiel $Q_{\varphi_B bz_B}$ zu berechnen, bilden wir zuerst die Funktion $d\varphi_B + dbz_B$; die ersten beiden Gleichungen der Tabelle I ergeben

$$d\varphi_B + dbz_B = \left\{(\varphi_B)_M - (\varphi_B)_0\right\} + \left\{(bz_B)_M - (bz_B)_0\right\}$$

$$d\varphi_B + dbz_B = -\frac{1}{2}\frac{h}{ab}(v_3 - v_5) + \frac{1}{2}\frac{h}{ab}(1 + b)(v_4 - v_6)$$

$$Q_{(\varphi_B + bz_B)(\varphi_B + bz_B)} = \frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2b^2} \cdot 2 + \frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2b^2}(1 + 2b + b^2)\,2$$

$$Q_{(\varphi_B + bz_B)(\varphi_B + bz_B)} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2b^2}\left\{2 + 2b + b^2\right\}$$

$$Q_{\varphi_B bz_B} = \frac{1}{2}\left\{Q_{(\varphi_B + bz_B)(\varphi_B + bz_B)} - Q_{\varphi_B\varphi_B} - Q_{bz_B bz_B}\right\}.$$

Werden in dieser Formel die gefundenen Werte für $Q_{\varphi_B\varphi_B}$, $Q_{bz_B bz_B}$ und $Q_{(\varphi_B + bz_B)(\varphi_B + bz_B)}$ eingeführt, so erhält man

$$Q_{\varphi_B bz_B} = \frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2b^2}\left\{2 + 2b + b^2\right\} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2b^2} - \frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2}$$

$$Q_{\varphi_B bz_B} = +\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2b} + \frac{1}{4}\frac{h^2b^2}{a^2b^2} - \frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2}$$

(19)
$$\boxed{Q_{\varphi_B bz_B} = +\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2b}.}$$

Auf genau gleiche Art können die andern Korrelationskoeffizienten der Unbekannten, sowie auch diejenigen der Vertikalparallaxen, berechnet werden. Da diese Bestimmung nun keine Schwierigkeiten mehr bietet, wollen wir sie dem Leser überlassen. Die Resultate, welche man so erhält, stimmen mit denjenigen, die ich früher gegeben habe, überein.

Wir haben somit alle Formeln auf elementarem Wege, lediglich unter Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes, abgeleitet. Vergleicht der Leser aber diese Entwicklungen mit denjenigen, welche ich früher in der eingangs zitierten Publikation angegeben habe, so wird er konstatieren müssen, daß die symbolische Gewichtsberechnung halt doch bequemer und einfacher zum Ziele führt, als das Fehlerfortpflanzungsgesetz. Um jeden Zweifel wegzuschaffen, wollen wir noch kurz zeigen, wie $Q_{\varphi_B bz_B}$ mit Hilfe der symbolischen Gewichtsberechnung im vorliegenden Falle bestimmt werden kann. Die Tabelle I gibt uns, wenn wir die ersten beiden Gleichungen ins Auge fassen,

$$Q_{\varphi_B} = +\frac{1}{2}\frac{h}{ab}(-Q_{v_3} + Q_{v_4} + Q_{v_5} - Q_{v_6})$$

$$Q_{bz_B} = +\frac{1}{2}\frac{h}{a}(\quad . \quad + Q_{v_4} \quad . \quad - Q_{v_6})$$

$$Q_{\varphi_B bz_B} = +\frac{1}{4}\frac{h^2}{a^2b}(\quad . \quad + 1 \quad . \quad + 1\ ) = +\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2b}$$

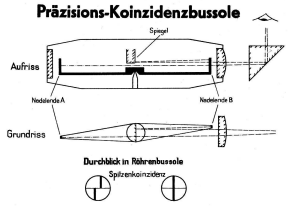
und schon steht das fertige Resultat da.

Planbeilage zu:

„Die magnetische Deklination als vermessungstechnisches Orientierungsmittel"

II.
Messungen Landestopographie

Präzisions-Koinzidenzbussole



Durchblick in Röhrenbussole

Spitzenkoinzidenz

Fig. 3a

Grundblatt

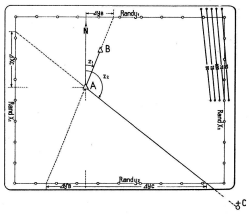


Fig. 3b

Okularteilung

Centesimalminuten

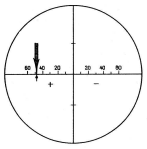
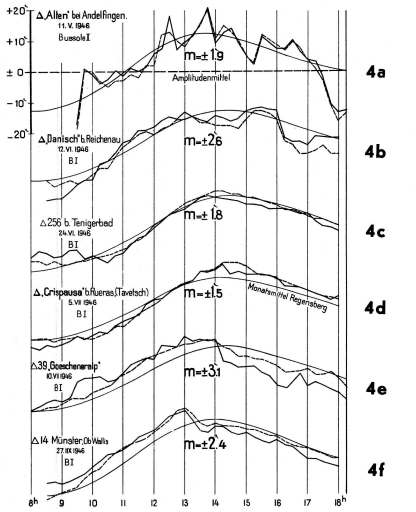


Fig. 3c

Tagesmessungen 1946



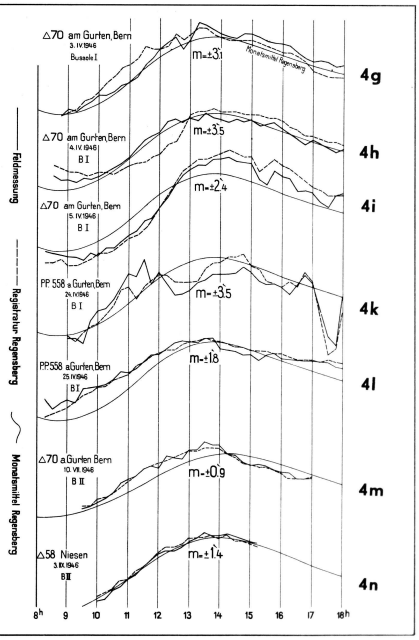


Fig. 4

Bdp Landestopographie, Bern

Alle Rechte vorbehalten

Die elementare Ableitung der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung, die von Prof. Kasper, in einer etwas andern Form, publiziert worden ist, wird bestimmt vielen Fachleuten das Studium dieses Problemes beträchtlich erleichtern oder erst ermöglichen. Dagegen wird sich der mit den modernen Theorien vertraute Fehlertheoretiker, zu denen bestimmt auch Prof. Kasper zu zählen ist, sowie der junge Student, der frühzeitig genug in die symbolische Gewichtsberechnung eingeführt worden ist, eher der symbolischen Berechnung, oder besser noch einer Kombination der beiden Methoden zuwenden, wenn er die größtmögliche Einfachheit und Allgemeinheit seiner Entwicklungen anstrebt. Im übrigen steht es jedem frei, diejenige Rechenmethode zu verwenden, die ihm am besten paßt. Die Hauptsache ist ja, daß wir nun wissen, *wie* dieses Problem *korrekt* gelöst werden kann, und da bildet der gedanklich neue Beweis von Prof. Kasper eine recht willkommene Verifikation der Resultate, welche ich früher auf ganz andere Art erhalten habe.

Handelt es sich jedoch lediglich darum, ein bestimmtes Orientierungsverfahren fehlertheoretisch zu beurteilen, ohne die Gewichts- und Korrelationskoeffizienten der Unbekannten berechnen zu wollen, so muß man unbedingt dem Rechenverfahren Prof. Kaspers den Vorzug geben.

Die magnetische Deklination als vermessungstechnisches Orientierungsmittel

(Schluß)

2. Instrumentelles

Wenn eingangs von Bussolentheodoliten deutscher und schweizerischer Herkunft, mit Ablesegenauigkeiten von ca. 1 Min. (a. Tlg.) die Rede war, so läßt dies darauf schließen, daß Konjunktur und Bedürfnis diesen Instrumententypus gerufen haben. Der renditenverpflichteten Privatindustrie muß das Zeugnis ausgestellt werden, feinstes Fingerspitzengefühl für wirtschaftliche Gegebenheiten zu entwickeln. Wo Reichenbach'sche Distanzmessung mit Vertikallatte genügt, wird nicht Präzisionsdistanzmessung mit Horizontallatte ausgeführt; wo Bussolenzüge mit Sprungständen und einem Gehülfen zum Ziele führen, wird nicht mit zweien gearbeitet und auf allen Punkten gemessen – und wo gar der Meßtisch mit graphischer Wiedergabe der Meßresultate Innehaltung der Toleranzen verspricht, wird sicher die teure Koordinatenrechnung gerne umgangen. Es ist also ganz unzweifelhaft, daß der Einsatz guter Bussoleninstrumente für topographische Belange sehr bedeutsam ist. Hunderte von Beobachtungsserien mit Röhren-Koinzidenz-Bussole (Kern-Prinzip), Fig. 3a und 3 b) und magnetischem Vollkreis (Wild-Prinzip) haben den Beweis erbracht, daß wir tatsächlich bei einem mittleren Nadel-Einstellfehler von ca. 1 Min. a. Tlg. angelangt sind. Erinnern wir uns indessen der reichen Variationen einer Deklinationskurve, so verwundern wir uns