

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural
<b>Band:</b>	45 (1947)
<b>Heft:</b>	9
<b>Artikel:</b>	Theorie und Praxis der gegenseitigen Orientierung von Steilaufnahmen
<b>Autor:</b>	Brandenberger, A.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-204726">https://doi.org/10.5169/seals-204726</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Orientierung mit möglichst wenig Arbeit zur höchsten Präzision führe, dürfte somit bereits beantwortet sein.

Dr. Brandenberger hat damit eine mathematische Darstellung der praktisch zur Anwendung kommenden Methode gegeben und eine Fehlerrechnung durchgeführt, die den tatsächlichen Vorgängen am Autogrammen bei der gegenseitigen Orientierung in weitestgehendem Maße Rechnung trägt. Er zeigt ferner, wie in der Praxis auch die unvermeidlichen instrumentellen Fehler der Auswertegeräte und die Bildfehler reduziert werden können.

Meines Erachtens dürfte die der praktischen Erfahrung entsprechende neuere Methode der gegenseitigen Orientierung nunmehr von keinem Theoretiker mehr ignoriert werden, nachdem diese seit Jahren angewendet wird und nun auch deren optimale Genauigkeit mathematisch nachgewiesen ist.

M. Zeller

## Theorie und Praxis der gegenseitigen Orientierung von Steilaufnahmen

Von Dr. A. Brandenberger

Die nachfolgende Abhandlung bezweckt, verschiedene strittige Probleme der *gegenseitigen Orientierung von Steilaufnahmen*, sowohl theoretisch wie praktisch, zu erörtern und abzuklären.

Bei der Einpassung von zwei Luftaufnahmen am Stereoauswertegerät trachtet man darnach, die *innere* und *äußere Orientierung* der beiden Aufnahmen, wie sie bei der Exposition vorhanden war, zu rekonstruieren. Die innere Orientierung einer Aufnahme ist als die relative Stellung des Negatives gegenüber dem Projektionszentrum der Kammer zu interpretieren. Im folgenden setzen wir die innere Orientierung der betrachteten Aufnahmen als bekannt voraus. Die äußere Orientierung einer Aufnahme ist gegeben durch die Lage des Aufnahmestandortes und die Orientierung der Kammerachse im Raum, sowie den Drehwinkel des Negatives um die Kammerachse. Der Aufnahmestandort ist in einem kartesischen Koordinatensystem (siehe Fig. 1) bestimmt durch die drei Koordinaten X, Y und Z. Die Orientierung der Kammerachse wird gegeben durch die zwei Orientierungswinkel  $\omega$  und  $\varphi$ .

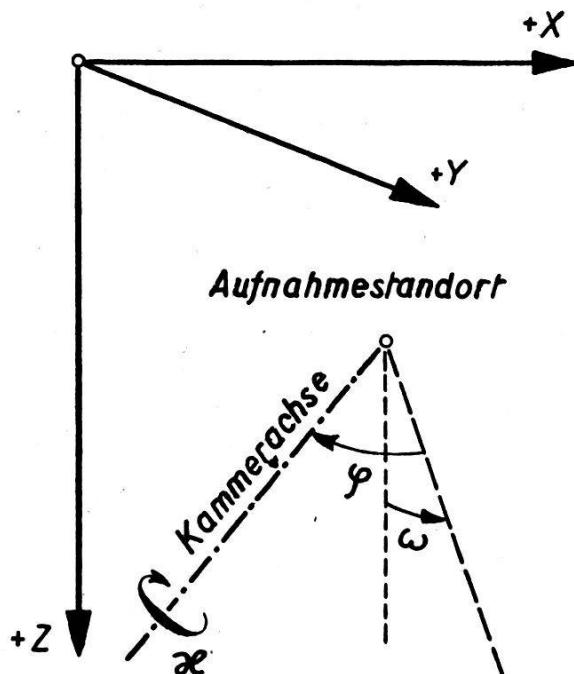


Fig. 1

$\kappa$  sei der Drehwinkel des Negatives um die Kammerachse.  $\omega$  wird als *Kippung* oder *Querneigung*,  $\varphi$  als *Längsneigung* und  $\kappa$  als *Kantung* bezeichnet. Die äußere Orientierung beider Aufnahmen ist also gegeben durch die Größen:

1. Aufnahme:  $X', Y', Z', \omega', \varphi', \kappa'$ ,
  2. Aufnahme:  $X'', Y'', Z'', \omega'', \varphi'', \kappa''$ .
- (1)

Da die äußere Orientierung der beiden Aufnahmen vorerst nur näherungsweise bekannt ist, muß am Auswertegerät zuerst die *gegenseitige Orientierung* durchgeführt werden. Sie ist die relative Orientierung einer Aufnahme zur andern. Um die gegenseitige Orientierung mathematisch einfach erfassen zu können, betrachten wir den wichtigsten Fall von Steilaufnahmen, nämlich *senkrechte Aufnahmen*. Für diese sind die Kammerachsen theoretisch lotrecht. In diesem Falle ist die gegenseitige Orientierung bestimmt, wenn die folgenden Differenzen bekannt sind:

$$\begin{aligned} X' - X'' &= bx, \\ Y' - Y'' &= by, \\ Z' - Z'' &= bz, \\ \omega' - \omega'' &= \Delta\omega, \\ \varphi' - \varphi'' &= -\gamma, \\ \kappa' - \kappa'' &= \Delta\kappa. \end{aligned} \quad (2)$$

$bx$ ,  $by$  und  $bz$  sind die *Komponenten der Basis b*,  $\Delta\omega$  ist die *Differenzkippung* (Kippungsdifferenz),  $\gamma$  die *Konvergenz* (Längsneigungsdifferenz) und  $\Delta\kappa$  die *Differenzkantung* (Kantungsdifferenz). Die Basiskomponente  $bx$  ist aus dem Flugplan näherungsweise bekannt und fällt als Element der gegenseitigen Orientierung weg, da diese unabhängig ist vom Maßstab des im Auswertegerät erzeugten Raummodells.

Das wichtigste Anwendungsgebiet von senkrechten Aufnahmen ist der *Folgebildanschluß*. Seine Durchführung setzt ein Universalauswertegerät voraus. Im folgenden spezialisieren wir uns daher auf den Wild-Autographen A5. Bei der Durchführung des Folgebildanschlusses am A5 entspricht die gegenseitige Orientierung der *Zuorientierung der einen Kammer zur andern*, d. h. die gegenseitige Orientierung wird in diesem Falle mit den Orientierungselementen einer Kammer durchgeführt. Bei der Zuorientierung der linken zur rechten Kammer werden beispielsweise die Elemente der gegenseitigen Orientierung  $by$ ,  $bz$ ,  $\Delta\omega$ ,  $\gamma$  und  $\Delta\kappa$  durch Verstellung von  $by'$ ,  $bz'$ ,  $\omega'$ ,  $\varphi'$  und  $\kappa'$  bestimmt. Da beim Folgebildanschluß die Größen  $by''$ ,  $bz''$ ,  $\omega''$ ,  $\varphi''$  und  $\kappa''$  normalerweise nicht 0 sind, so sind zu diesen Größen die Differenzen  $by \dots \Delta\kappa$ , die die gegenseitige Orientierung bestimmen, zu addieren, um die Größen  $by' \dots \kappa'$  zu erhalten. Ist die Kammer rechts in Nullstellung, wie dies bei der gegenseitigen Orientierung von unabhängigen Bildpaaren häufig der Fall ist, so sind die Größen  $by'' \dots \kappa'' = 0$ . In diesem Falle sind die Differenzen  $by \dots \Delta\kappa$  identisch mit den Orientierungselementen  $by' \dots \kappa'$  der linken Kammer. Wenn daher H. Härry in seiner Besprechung des neuen

Lehrbuches von Prof. Dr. M. Zeller diese, die gegenseitige Orientierung bestimmenden Differenzen  $by \dots \Delta\kappa$  als autographenfremd kritisiert, so ist diese Kritik absolut unbegründet, indem sie längst bekannte, elementare Begriffe der Photogrammetrie ignoriert.

Das primäre Kriterium für die Durchführung der gegenseitigen Orientierung ist die *Höhenparallaxe*. Wird diese in 5 geeignet gewählten Punkten des Gemeinsamkeitsgebietes der beiden Aufnahmen durch Richtigstellung der 5 Elemente  $by \dots \Delta\kappa$  der gegenseitigen Orientierung beseitigt, so entsteht ein zum entsprechenden Geländeabschnitt ähnliches Modell.

Für die Durchführung der gegenseitigen Orientierung am Auswertegerät gibt es prinzipiell zwei verschiedene Verfahren: Das *numerische Verfahren* und die *optisch-mechanische Methode*. Diese Verfahren setzen den funktionellen Zusammenhang zwischen der Höhenparallaxe und den Fehlern der gegenseitigen Orientierung voraus. Die Darstellung der Höhenparallaxe in Funktion der Fehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung ist in der photogrammetrischen Literatur bekannt. Für die Zuorientierung der linken zur rechten Kammer erhält man beispielsweise:

$$pv' = \frac{f}{Z} dby + \frac{fY}{Z^2} dbz - f \left( 1 + \frac{Y^2}{Z^2} \right) d\Delta\omega - \frac{fXY}{Z^2} d\gamma - \frac{fX}{Z} d\Delta\kappa. \quad (3)$$

$X$ ,  $Y$  und  $Z$  sind die Koordinaten des betrachteten Modellpunktes. Die Orientierung des entsprechenden Koordinatensystems geht aus Fig. 1 hervor. Der Koordinatenursprung befindet sich im Projektionszentrum der linken Autographenkammer.  $pv'$  ist, entsprechend der Zuorientierung der linken zur rechten Kammer, die im linken Bild beobachtete Höhenparallaxe.  $f$  ist die Bildweite der Kammern.  $dby \dots d\Delta\kappa$  sind die Fehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung. Obige Formel gilt für beliebige Modellformen. In der Praxis spielen horizontale Modelle eine besondere Rolle. In diesem Falle ist  $Z$  konstant. Handelt es sich um Aufnahmen mit der *Wild'schen Präzisionsfliegerkammer* und *60 %iger Überdeckung*, so ist  $Z = \frac{7}{2}b$  und man erhält:

$$pv' = \frac{2}{7} \cdot \frac{f}{b} dby + \frac{4}{49} \cdot \frac{fY}{b^2} dbz - f \left( 1 + \frac{4}{49} \cdot \frac{Y^2}{b^2} \right) d\Delta\omega - \frac{4}{49} \cdot \frac{fXY}{b^2} d\gamma - \frac{2}{7} \cdot \frac{fX}{b} d\Delta\kappa. \quad (4)$$

Für die weiteren Betrachtungen wählen wir die Formel (4) als Grundlage. In der Praxis wird die Höhenparallaxe meistens in den Punkten 1 .... 6 (siehe Fig. 2) des zu erzeugenden Modelles registriert. Die Punkte 1 und 2 entsprechen dabei den Durchstoßpunkten der beiden

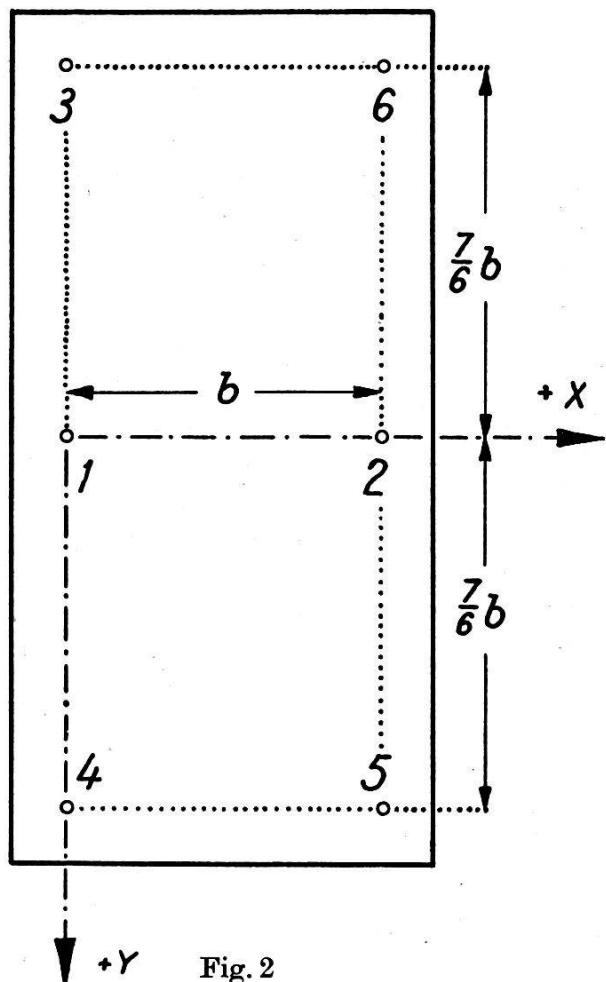


Fig. 2

Lenker bei vertikaler Stellung mit dem Modell (wenn man vom Konstruktionsabstand  $s$  der beiden Autographenkammern absieht).

Beim *numerischen Verfahren* werden nun die Höhenparallaxen in den Punkten 1 . . . 6 gemessen. Diese 6 Höhenparallaxen geben Anlaß zu 6 Gleichungen (4). Dieses Gleichungssystem enthält eine überschüssige Gleichung und ist daher mittels der Methode der kleinsten Quadrate zu lösen, womit man die Unbekannten  $dy$  . . .  $d\Delta\kappa$  erhält. Dieses numerische Verfahren ist kompliziert und erfordert eine relativ große Rechenarbeit, weshalb es in der Praxis nicht angewendet wird.

Hingegen geht man in der Praxis von den *optisch-mechanischen Orientierungsverfahren* aus, die durch Prof. v. Gruber begründet wurden. Diese Verfahren beruhen darin, daß man die für die gegenseitige Orientierung verwen-

deten Punkte (1 . . . 6) im Modell derart wählt, daß sie mit den Nullstellen der Unbekannten  $dbz$  . . .  $d\Delta\kappa$  der gegenseitigen Orientierung zusammenfallen. In den Nullstellen der einzelnen Orientierungsunbekannten können dann die restlichen Orientierungsunbekannten bestimmt werden. Betrachtet man beispielsweise in Fig. 2 den Punkt 1, so erkennt man, daß in ihm nur  $dy$  und  $d\Delta\omega$  zu Höhenparallaxe Anlaß geben. Beseitigt man in diesem Punkt durch Veränderung von  $dy$  oder  $\Delta\omega$  (d. h. bei der Zuorientierung der linken zur rechten Kammer durch Veränderung von  $dy'$  oder  $\omega'$ ) die Höhenparallaxe, so röhrt im Punkt 2 die restierende Höhenparallaxe nur noch von einer unrichtigen Differenzkantung  $d\Delta\kappa$  her, welche somit in diesem Punkte richtig gestellt werden kann durch Veränderung von  $\Delta\kappa$  (d. h. von  $\kappa'$ ). In den Punkten 1, 3 und 4 können in ähnlicher Weise  $dy$ ,  $dbz$  und  $d\Delta\omega$  bestimmt werden, da in diesen Punkten  $d\gamma$  und  $d\Delta\kappa$  keine Höhenparallaxe erzeugen. Sind damit die Orientierungsunbekannten  $dy$ ,  $dbz$ ,  $d\Delta\omega$  und  $d\Delta\kappa$  bestimmt (d. h.  $dy'$ ,  $bz'$ ,  $\omega'$  und  $\kappa'$  richtig gestellt), so ist eine restierende Höhenparallaxe im Punkte 5 bzw. 6 nur noch die Folge einer falschen Konvergenz  $d\gamma$ , welche somit durch Beseitigung der Höhenparallaxe in diesen Punkten durch Veränderung von  $\gamma$  (d. h. von  $\varphi'$ ) bestimmt werden kann.

Die Reihenfolge der Bestimmung der einzelnen Orientierungsunbekannten kann bei der optisch-mechanischen Orientierung nach v. Gru-

ber verschieden gewählt werden. So hat beispielsweise Prof. Dr. W. K. Bachmann in seiner Dissertation [1] eine andere Reihenfolge der Bestimmung der Orientierungsunbekannten gewählt.

Diese v. Gruber'schen Orientierungsverfahren haben den Vorteil, daß sie einfach und rasch zur Herstellung des Raummodells führen. Jedoch haben sie den nicht zu unterschätzenden Nachteil, daß sie ungenauer sind als das numerische Verfahren. Während nämlich bei letzterem die Bestimmung der einzelnen Orientierungsunbekannten  $dy \dots d\Delta\kappa$  aus den Höhenparallaxen in *allen* Punkten, in denen die Unbekannten zu Höhenparallaxe Anlaß geben, erfolgt, werden bei den optisch-mechanischen Orientierungsverfahren nach v. Gruber die Orientierungsunbekannten nicht aus den Höhenparallaxen aller Punkte, in denen die Unbekannten Höhenparallaxe erzeugen, bestimmt. Ferner ist darauf hinzuweisen, daß beim numerischen Verfahren die Bestimmung der Orientierungsunbekannten in einem Guß erfolgt, während bei den optisch-mechanischen Orientierungsverfahren nach v. Gruber die Orientierungsunbekannten schrittweise bestimmt werden. Dies hat aber den Nachteil, daß, wenn auf diese Weise in einem Punkt die Höhenparallaxe beseitigt und die entsprechende Orientierungsunbekannte bestimmt worden ist, die Bestimmung der noch verbleibenden Orientierungsunbekannten aus Höhenparallaxen erfolgt, die auch noch die Einflüsse der Fehler der vorher bestimmten Orientierungsunbekannten enthalten.

Da nun aber aus den schon erwähnten Gründen das eingangs erwähnte numerische Verfahren für die Praxis nicht in Frage kommt, wurde schon verschiedentlich die Frage nach dem Genauigkeitstechnisch günstigsten optisch-mechanischen Orientierungsverfahren gestellt, dessen Genauigkeit soweit wie möglich an diejenige des numerischen Verfahrens heranreicht. Wie nun aber auch auf andern Gebieten der Technik, ist hier die Praxis der Theorie vorausgeilt, indem verschiedene Praktiker dieses Problem bereits zum Teil oder ganz gelöst haben. Der Praktiker faßt nämlich die gegenseitige Orientierung tatsächlich als das auf, was sie ist, nämlich als ein *geometrisches* Problem, ohne dieses Problem durch hohe mathematische Theorien zu komplizieren.

Die gegenseitige Orientierung, als geometrisches Problem betrachtet, ist dadurch charakterisiert, daß, abgesehen von kritischen Modellformen, jede Orientierungsunbekannte eine spezifische Höhenparallaxe erzeugt, und daß namentlich nicht zwei Orientierungsunbekannte eine über das ganze Modell identische Höhenparallaxe verursachen. Zum einfacheren Verständnis dieser Tatsache haben wir in den Figuren 3a . . . e die durch die einzelnen Orientierungsunbekannten verursachten Höhenparallaxen (in der Bildebene gemessen) schematisch dargestellt.

Nachfolgende schematische Figuren stellen die Höhenparallaxen dar in Funktion der einzelnen Orientierungsunbekannten bei Zuorientierung der linken zur rechten Kammer. Demzufolge wird die Höhenparallaxe im linken Bild beobachtet. Dabei sind die Orientierungsunbekannten  $dy \dots d\Delta\kappa$  als positiv angenommen, sie entsprechen also positiven Veränderungen von  $by' \dots \kappa'$ . Das Koordinatensystem  $x, y$  in der be-

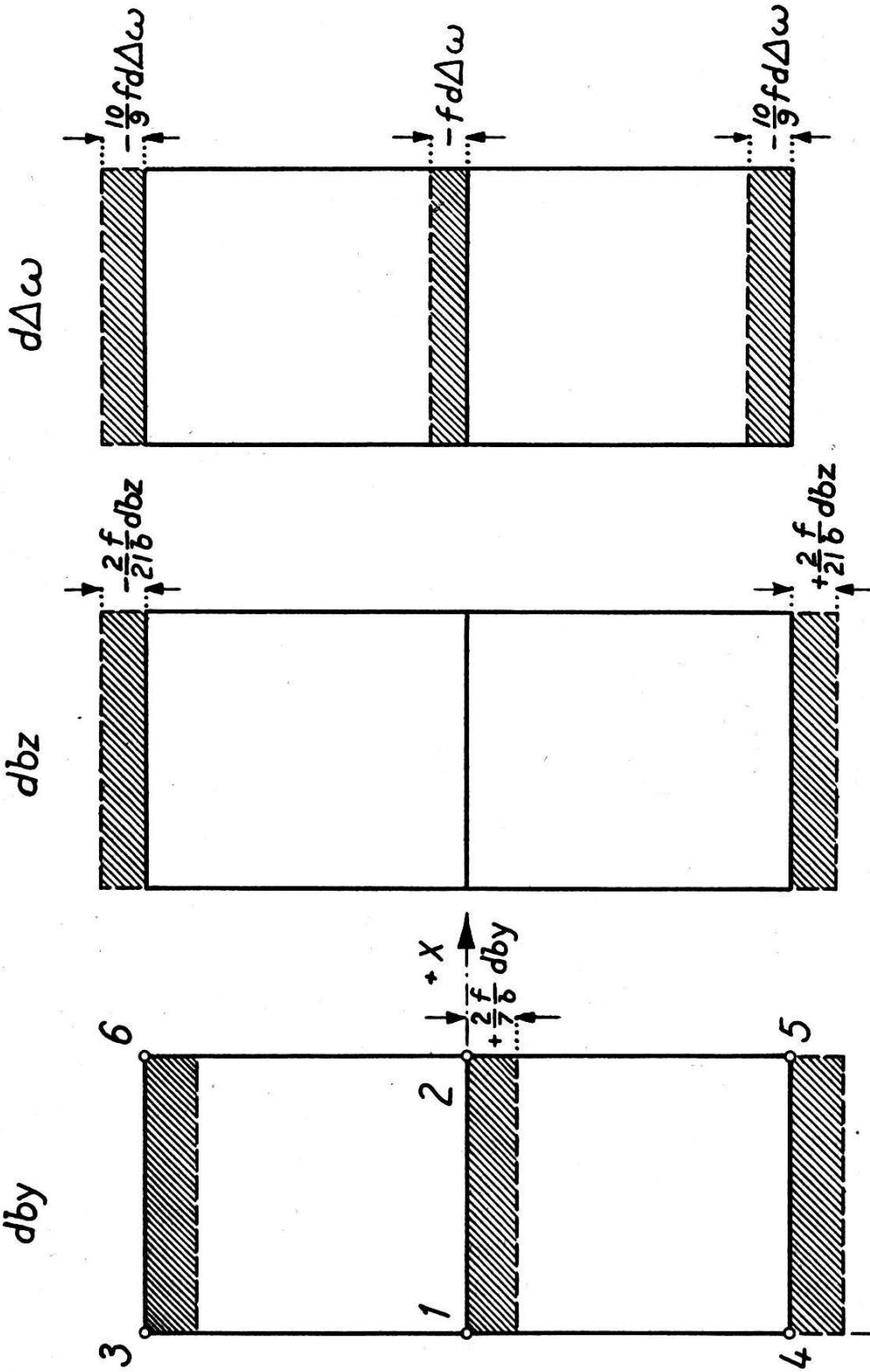


Fig. 3c

Fig. 3b

Fig. 3a

trachteten Bildebene ist so gewählt, daß  $x$  von links nach rechts wächst und parallel ist zu  $X$ , und  $y$  von hinten nach vorn wächst, also parallel ist zu  $Y$ . 1 . . . 6 sind wieder die Punkte, in denen normalerweise anlässlich der gegenseitigen Orientierung die Höhenparallaxe registriert resp. beseitigt wird.

Der Einfluß der Orientierungsunbekannten  $dby \dots d\Delta\kappa$  auf die Höhenparallaxe kann geometrisch leicht interpretiert werden. Zu diesem

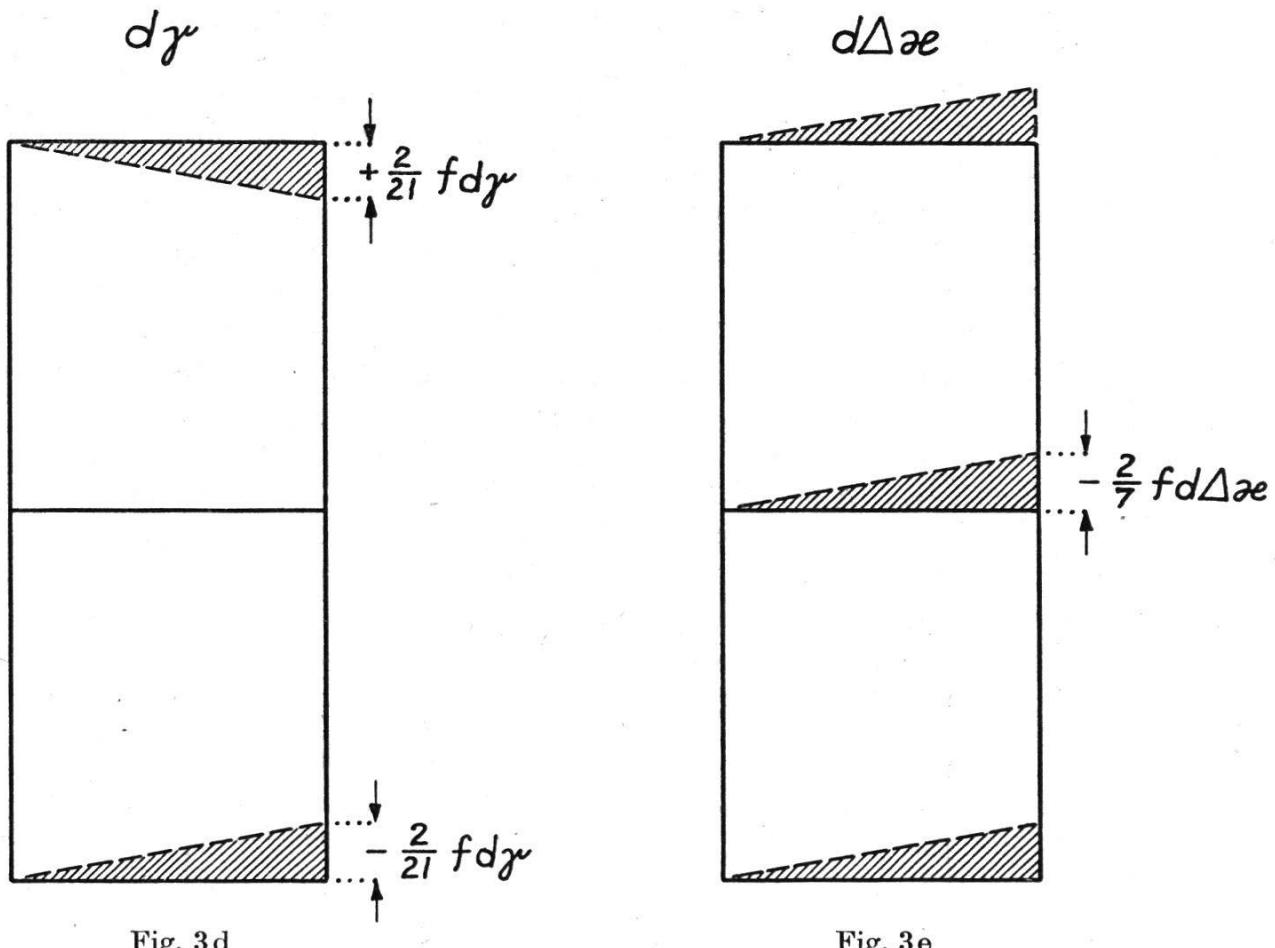


Fig. 3d

Fig. 3e

Zwecke betrachten wir die durch die beiden Aufnahmen gegebenen Strahlenbündel. Diese werden bei einem horizontalen Modell mit einer Ebene  $Z = \frac{7}{2}b = \text{const.}$  geschnitten. Ist die gegenseitige Orientierung fehlerlos, so ist keine Höhenparallaxe vorhanden, d. h. die Schnittpunkte entsprechender Bildstrahlen der beiden Aufnahmen schneiden sich in einem Punkt in der Ebene  $Z = \text{const.}$  (für  $Z = \frac{7}{2}b$  ist die Seitenparallaxe 0). Einer Veränderung  $dby$  von  $by$  (d. h. von  $by'$ ) entspricht dann eine *Translation des Strahlenbündels der linken Aufnahme in der Y-Richtung*. Entsprechende Bildstrahlen schneiden sich nicht mehr, sondern ihre Schnittpunkte mit der Ebene  $Z = \text{const.}$  liegen um den konstanten Betrag  $dby$  auseinander, der in der linken Bildebene gemessen als die konstante positive Höhenparallaxe  $+\frac{2}{7} \cdot \frac{f}{b} dby$  auftritt (siehe Fig. 3a).

Analog entspricht einer Veränderung  $dbz$  von  $bz$  (bzw.  $bz'$ ) eine *Translation des Strahlenbündels der linken Aufnahme in der Z-Richtung*. In der Bildebene entsteht die in Fig. 3 b dargestellte Höhenparallaxe. Diese ist unabhängig von  $X$ . Ihr Betrag wächst linear mit  $|Y|$ . Für  $-Y$  und  $+Y$  ist daher die Höhenparallaxe entgegengesetzt gleich groß. Einer Veränderung  $d\Delta\omega$  von  $\Delta\omega$  (bzw.  $\omega'$ ) entspricht eine *Rotation des Strahlen-*

bündels der linken Aufnahme um die X-Achse. Die in der Bildebene entstehende Höhenparallaxe ist in Fig. 3c dargestellt. Daraus ergibt sich, daß diese Höhenparallaxe unabhängig ist von X. Sie ist minimal für Y = 0 und erreicht ein Maximum im hinteren und vorderen Bildrand. Einer Veränderung  $dy$  von  $\gamma$  (bzw.  $\varphi'$ ) entspricht eine *Rotation des Strahlenbündels der linken Aufnahme um die Y-Achse*. In der Bildebene entsteht die in Fig. 3d dargestellte Höhenparallaxe. Deren Betrag wächst linear zu X und /Y/. Für —Y und +Y ist die Höhenparallaxe entgegengesetzt gleich groß. Einer Veränderung  $d\Delta\kappa$  von  $\Delta\kappa$  (bzw.  $\kappa'$ ) entspricht eine *Rotation des Strahlenbündels der linken Aufnahme um die Z-Achse*. In der Bildebene entsteht die in Fig. 3e dargestellte negative Höhenparallaxe. Diese ist unabhängig von Y. Ihr Betrag wächst linear zu X.

Die effektiv in den Punkten 1 . . . 6 auftretenden Höhenparallaxen setzen sich aus den in den Figuren 3 dargestellten partiellen Höhenparallaxen zusammen. Demzufolge erhält man für diese effektiven Höhenparallaxen die folgenden mathematischen Ausdrücke:

$$pv_3' = \frac{2}{7} \cdot \frac{f}{b} dy - \frac{2}{21} \cdot \frac{f}{b} dz - \frac{10}{9} fd\Delta\omega$$

$$pv_1' = \frac{2}{7} \cdot \frac{f}{b} dy - fd\Delta\omega$$

$$pv_4' = \frac{2}{7} \cdot \frac{f}{b} dy + \frac{2}{21} \cdot \frac{f}{b} dz - \frac{10}{9} fd\Delta\omega$$

(5)

$$pv_6' = \frac{2}{7} \cdot \frac{f}{b} dy - \frac{2}{21} \cdot \frac{f}{b} dz - \frac{10}{9} fd\Delta\omega + \frac{2}{21} fd\gamma - \frac{2}{7} fd\Delta\kappa$$

$$pv_2' = \frac{2}{7} \cdot \frac{f}{b} dy - fd\Delta\omega - \frac{2}{7} fd\Delta\kappa$$

$$pv_5' = \frac{2}{7} \cdot \frac{f}{b} dy + \frac{2}{21} \cdot \frac{f}{b} dz - \frac{10}{9} fd\Delta\omega - \frac{2}{21} fd\gamma - \frac{2}{7} fd\Delta\kappa$$

Um zum günstigsten optisch-mechanischen Orientierungsverfahren zu gelangen, muß man darnach trachten, die Orientierungsunbekannten  $dy \dots d\Delta\kappa$  aus den Höhenparallaxen aller Punkte zu bestimmen, in

denen die Orientierungsunbekannten zu Höhenparallaxe Anlaß geben. Unter dieser Voraussetzung gibt es nur *ein* Orientierungsverfahren, welches das günstigste ist. Es leitet sich aus den Figuren 3 und obigem System (5) der Höhenparallaxen sofort ab. So erhält man beispielsweise:

$$\frac{pv_1' + pv_3' + pv_4'}{3} - \frac{pv_2' + pv_5' + pv_6'}{3} = \frac{2}{7} f d\Delta\kappa.$$

und daraus:

$$d\Delta\kappa = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{f} \left( \frac{pv_1' + pv_3' + pv_4'}{3} - \frac{pv_2' + pv_5' + pv_6'}{3} \right) \quad (6a)$$

Analog ergibt sich:

$$\frac{pv_4' - pv_3'}{2} - \frac{pv_5' - pv_6'}{2} = \frac{2}{21} f d\gamma.$$

$$d\gamma = \frac{21}{2} \cdot \frac{1}{f} \left( \frac{pv_4' - pv_3'}{2} - \frac{pv_5' - pv_6'}{2} \right) \quad (6b)$$

$$\frac{pv_3' + pv_4' + pv_5' + pv_6'}{4} - \frac{pv_1' + pv_2'}{2} = -\frac{f}{9} d\Delta\omega.$$

$$d\Delta\omega = \frac{9}{f} \left( \frac{pv_1' + pv_2'}{2} - \frac{pv_3' + pv_4' + pv_5' + pv_6'}{4} \right) \quad (6c)$$

$$\frac{pv_4' - pv_3'}{2} = \frac{2}{21} \cdot \frac{f}{b} dbz.$$

$$dbz = \frac{21}{2} \cdot \frac{b}{f} \cdot \frac{pv_4' - pv_3'}{2} \quad (6d)$$

$$pv_1' + pv_2' + pv_3' + pv_4' + pv_5' + pv_6' = \frac{12}{7} \cdot \frac{f}{b} dby - \frac{58}{9} f d\Delta\omega - \frac{6}{7} f d\Delta\kappa.$$

Daraus erhält man, unter Berücksichtigung von (6a) und (6c):

$$dby = \frac{7}{24} \cdot \frac{b}{f} \left[ 2(31 pv_1' + 29 pv_2') - 25(pv_3' + pv_4') - 29(pv_5' + pv_6') \right] \quad (6e)$$

Bestimmt man anhand der Formeln (6) die Orientierungsunbekannten  $db\gamma \dots d\Delta\kappa$  und führt deren entgegengesetzte gleiche Werte als Verbesserungen der Elemente  $b\gamma \dots \Delta\kappa$  der gegenseitigen Orientierung am Autographen ein, so muß theoretisch ein Höhenparallaxfreies Modell entstehen. Da die Erfassung der Höhenparallaxen  $pv_1' \dots pv_6'$  jedoch nicht fehlerlos erfolgen kann, bleiben in den Punkten 1 . . . 6 Restparallaxen  $pv_1^* \dots pv_6^*$  zurück. Diese lassen sich leicht berechnen, indem man in den Parallaxgleichungen (5) die Werte der Orientierungsunbekannten entsprechend den Formeln (6) einsetzt und die so erhaltenen Höhenparallaxen von den ursprünglichen Höhenparallaxen subtrahiert. Damit erhält man für die Restparallaxen die folgenden Ausdrücke:

$$pv_1^* = \frac{2(pv_1' - pv_2') - (pv_3' + pv_4') + (pv_5' + pv_6')}{6}, \quad (7)$$

$$pv_2^* = -pv_1^*, \quad pv_3^* = pv_4^* = -\frac{1}{2}pv_1^*, \quad pv_5^* = pv_6^* = +\frac{1}{2}pv_1^*.$$

Bezeichnet man den mittleren Fehler einer Höhenparallaxmessung mit  $\mu_0$ , so lassen sich aus (7) die mittleren Restparallaxen berechnen und man erhält:

$$mpv_1^* = mpv_2^* = \pm \frac{\mu_0}{\sqrt{3}}, \quad (8)$$

$$mpv_3^* = mpv_4^* = mpv_5^* = mpv_6^* = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0}{\sqrt{3}}.$$

Daraus ergibt sich, daß die äußeren mittleren Restparallaxen  $mpv_3^* \dots mpv_6^*$  nur halb so groß sind wie die inneren mittleren Restparallaxen  $mpv_1^*$  und  $mpv_2^*$ , und daß namentlich alle mittleren Restparallaxen wesentlich kleiner sind als  $\mu_0$ .

Man kann nun zeigen, daß, wenn man die Orientierungsunbekannten  $db\gamma \dots d\Delta\kappa$  nach den Formeln (6) bestimmt, die gegenseitige Orientierung eine optimale Genauigkeit aufweist. Man kann nämlich die Orientierungsunbekannten *anhand des numerischen Verfahrens* formal bestimmen, d. h. als Funktionen der ursprünglichen Höhenparallaxen  $pv_1' \dots pv_6'$  ausdrücken. Zu diesem Zwecke löst man das Gleichungssystem (5) nach der Methode der kleinsten Quadrate (vermittelnde Ausgleichung) rein formal auf. Dadurch erhält man für die Orientierungsunbekannten dieselben Ausdrücke, wie sie durch die Formeln (6) gegeben sind, welch letztere durch einfache geometrische und mathematische Überlegungen erhalten wurden. Desgleichen ergeben sich dieselben Restparallaxen, wie sie in (7) und (8) dargestellt sind.

In ganz analoger Weise lassen sich für normal-konvergente und Weitwinkelauflnahmen die den Formeln (6) entsprechenden Ausdrücke für die Orientierungsunbekannten, sowie die Restparallaxen ableiten.

Bereits früher wurde erwähnt, daß einzelne Praktiker die Frage nach dem günstigsten optisch-mechanischen Orientierungsverfahren bereits gelöst haben. In diesem Falle muß der Praktiker die optisch-mechanische Orientierung entsprechend den Formeln (6) durchführen. Diese Art der Orientierung wird nun tatsächlich von verschiedenen Praktikern teilweise oder ganz angewendet. Dabei werden jedoch die Formeln (6) nicht rechnerisch ausgewertet, sondern sie werden auf Grund ihrer geometrischen Bedeutung erfaßt, d. h. die Orientierungsunbekannten werden auf Grund ihrer spezifischen Einflüsse auf die Höhenparallaxe *durch Registrierung der Höhenparallaxe über das ganze Modell* bestimmt. Das Entscheidende der praktischen gegenseitigen Orientierung besteht nämlich darin, daß man *das Modell* mit seinen örtlich verschiedenen Höhenparallaxen *als Ganzes* erfaßt und nicht wie der Theoretiker an einigen wenigen Punkten des Modells und den entsprechenden Höhenparallaxen kleben bleibt. So könnte z. B. der Praktiker, sofern er gezwungen ist, eine möglichst genaue gegenseitige Orientierung durchzuführen, die Korrektur der Differenzkantung  $d\Delta\kappa$  nicht nur aus den Höhenparallaxen  $pv_1' \dots pv_6'$  bestimmen, sondern aus einer entsprechend größeren Zahl von Höhenparallaxen in den Modellgeraden 3, 4 und 5, 6. Desgleichen kann die Korrektur der Differenzkippung  $d\Delta\omega$  nicht nur aus den Vertikalen 1, 3, 4 und 2, 5, 6 bestimmt werden, sondern aus einer beliebigen Anzahl von Vertikalen zwischen den erstgenannten beiden Vertikalen. Auf ähnliche Weise können gegebenenfalls auch die übrigen Orientierungsunbekannten schärfer erfaßt werden.

Der Erfolg dieser optimalen gegenseitigen Orientierung hängt von der Routine des Operateurs ab. Ein Routinier erreicht damit in kurzer Zeit eine Genauigkeit der gegenseitigen Orientierung, die der Genauigkeit der ursprünglichen optisch-mechanischen Orientierung nach v. Gruber weit überlegen ist. Obiges optimale Verfahren der gegenseitigen Orientierung ist aber auch der von Prof. Dr. W. K. Bachmann vorgeschlagenen 6maligen Wiederholung seines Orientierungsvorganges nicht nur genauigkeitstechnisch, sondern namentlich wirtschaftlich eindeutig überlegen, weil einerseits obiges optimale Orientierungsverfahren in *einem* Orientierungsvorgang schon zu kleineren Restparallaxen führt, als dies der Fall ist bei 6maliger Wiederholung des Orientierungsverfahrens nach Bachmann und andererseits das erwähnte optimale Verfahren der gegenseitigen Orientierung viel rascher zum Ziele führt.

Um namentlich dem Anfänger das genannte optimale Orientierungsverfahren noch verständlicher zu machen, wollen wir das Vorgehen rezeptartig andeuten. Zuerst wird nach dem Verfahren von v. Gruber gegenseitig orientiert bis zum Erhalt einer guten Näherung. Nachher werden die Restparallaxen in den Punkten 1..6 registriert. Dies geschieht so, daß die Restparallaxen mit der Meßmarke als Meßmittel gemessen werden. Diese 6 Restparallaxen werden schematisch, wie dies in Fig. 4 angedeutet ist, aufgezeichnet. Sind die in Fig. 4 eingezeichneten Restparallaxen im Modell registriert worden, so erkennt man, basierend auf den Figuren 3 und den Formeln (6), folgendes: Die Differenz zwischen

dem Mittel der Restparallaxen links und dem Mittel der Restparallaxen rechts beträgt  $+ 2\frac{1}{6}$  Marken. Diese Differenz ist gemäß Formel (6a) die Folge eines Fehlers  $d\Delta\kappa$  der Differenzkantung  $\Delta\kappa$  (d. h.  $\kappa'$ ). Diese ist daher um  $2\frac{1}{6}$  Marken zu korrigieren. Man erkennt, daß sich aus den Höhenparallaxen in den Punkten 1 und 2 der Fehler der Differenzkantung zu nur  $+ 1\frac{1}{2}$  Marken ergeben würde, womit nachgewiesen ist, daß diese Bestimmung nach v. Gruber infolge der unvermeidlichen Beobachtungs-

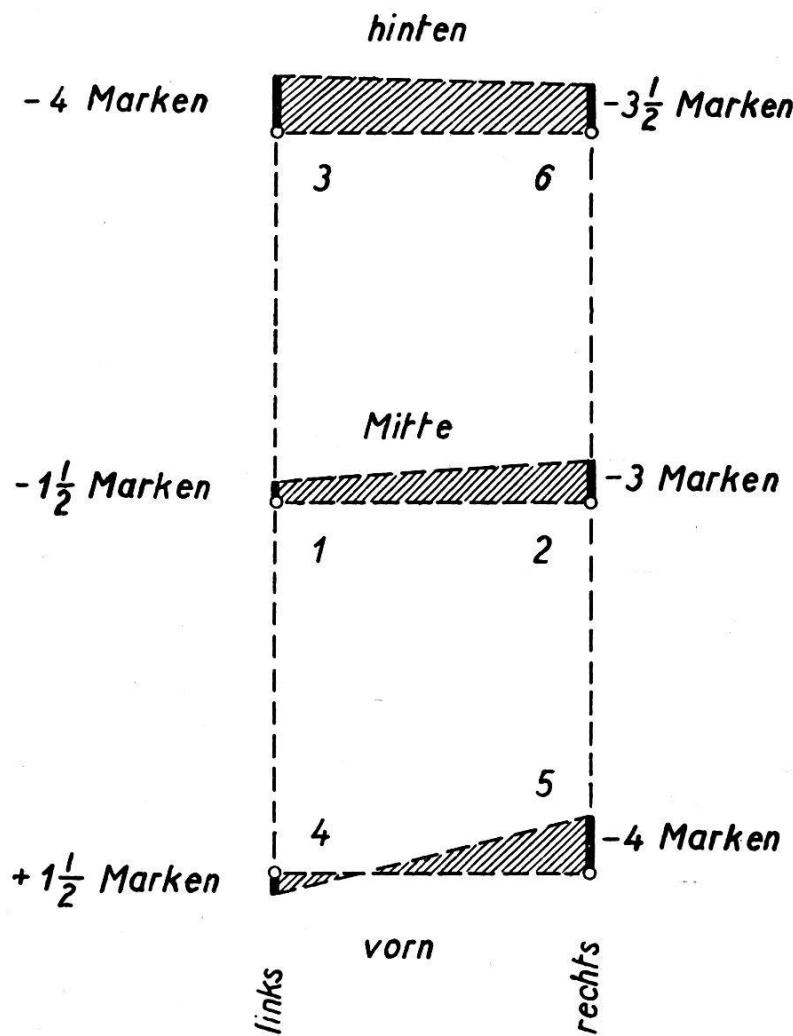


Fig. 4

fehler ungenauer ist. – Die halbe Differenz zwischen der Restparallaxe links vorn und derjenigen links hinten beträgt  $+ 2\frac{3}{4}$  Marken. Die halbe Differenz zwischen der Restparallaxe rechts vorn und derjenigen rechts hinten ist  $-1\frac{1}{4}$  Marke. Gemäß Formel (6b) sind diese beiden halben Differenzen zu subtrahieren. Man erhält  $+ 3$  Marken. Diese Differenz ist nach Formel (6b) die Folge eines Fehlers  $d\gamma$  der Konvergenz  $\gamma$  (d. h. von  $\varphi'$ ). Diese ist daher um 3 Marken zu korrigieren. – Die Differenz zwischen dem Mittel der Restparallaxen in der Mitte und dem Mittel der äußeren Restparallaxen beträgt  $+ 1\frac{1}{4}$  Marke. Diese Differenz ist nach Formel (6c) mit  $\omega'$  9fach überzukorrigieren, womit die Differenzkippung  $\Delta\omega$

(d. h.  $\omega'$ ) richtig gestellt ist. — Die halbe Differenz zwischen der Restparallaxe links vorn und derjenigen links hinten beträgt  $+ \frac{3}{4}$  Marken. Diese halbe Differenz ist gemäß Formel (6d) die Folge von  $dbz$ ,  $bz$  (d. h.  $bz'$ ) ist daher um  $\frac{3}{4}$  Marken zu korrigieren. — Die nun noch verbleibenden Höhenparallaxen in den Punkten 1 . . . 6 werden gemittelt und dieser Mittelwert weggestellt durch Veränderung von  $by$  (d. h. von  $by'$ ).

Daß dieses Verfahren der gegenseitigen Orientierung tatsächlich in der Praxis angewendet wird, beweist ein im Photogrammeterbüro Lips schon vor mehr als 10 Jahren von Dipl. Ing. Zurlinden eigens für diese Zwecke konstruiertes kleines Gerät, das gestattet, in 9 Punkten des Diagrammes (es handelt sich hier um normal-konvergente Aufnahmen) die Restparallaxen durch Verstellung von kleinen drehbaren Hebelen darzustellen. Aber auch in anderen Photogrammeterbüros der Schweiz werden zumeist sämtliche Restparallaxen registriert. Auch der Verfasser wendet das im vorangehenden Abschnitt dargelegte Verfahren seit Jahren an.

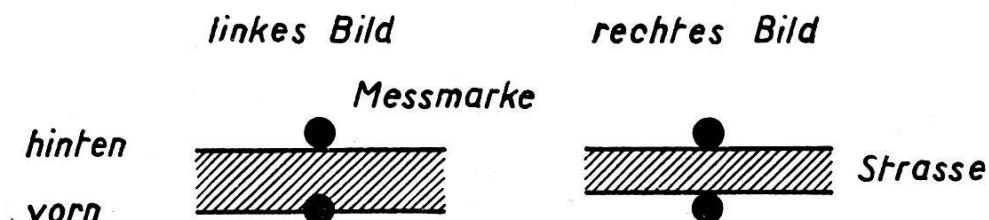


Fig. 5

Nun ist es allerdings so, daß der Routinier vielfach die Restparallaxen in den Punkten 1 . . . 6 gar nicht mehr aufzeichnet, sondern er merkt sich diese 6 Restparallaxen im Kopf und weiß dann sofort, welche Orientierungselemente noch verbessert werden müssen. Dabei geht die Routine so weit, daß der geübte Operateur beispielsweise direkt sagen kann, die Differenzkantung ist um  $2^c$  positiv zu verstellen, die Konvergenz um  $4^c$  negativ usw. Die Erfassung der Restparallaxen erfolgt dabei zudem so, daß nicht nur in 6 bestimmten Punkten 1 . . . 6 die Höhenparallaxe registriert wird, sondern daß diese erfaßt wird als Mittelwert der Restparallaxen der Umgebungen der Punkte 1 . . . 6. Zur Begründung dieser Maßnahme sei ein häufig vorkommender Fall erwähnt. Im rechten Bild wird die Meßmarke (siehe Fig. 5) auf den hinteren Straßenrand gestellt und im linken Bild die Höhenparallaxe beseitigt. Stellt man nun im rechten Bild die Meßmarke auf den vorderen Straßenrand, so ist die Meßmarke im linken Bild zum Teil in der Straße drin. Hier macht sich die verschiedene Größe der Bilder infolge Überstrahlung oder anderer Ursachen bemerkbar. Eine korrekte Erfassung der Höhenparallaxe wird hier nur erreicht, wenn man das Mittel aus beiden Einstellungen verwendet. Praktisch beschränkt man sich nun allerdings, wie schon erwähnt, nicht nur auf die Registrierung der Restparallaxe, die sich aus den vorerwähnten zwei Einstellungen ergibt, sondern man erfaßt einen Mittelwert aus mehreren Restparallaxen in den Zonen 1 . . . 6. Dies hat den Vorteil, daß dadurch

der Einfluß der Instrumenten- und Bildfehler auf die gegenseitige Orientierung reduziert wird. Dies ist wesentlich, weil beim geübten Operateur die Einflüsse der Instrumenten- und Bildfehler auf die gegenseitige Orientierung erwiesenermaßen die mittleren zufälligen Orientierungsfehler überwiegen, sofern nach obigem optimalem Verfahren gegenseitig orientiert wird.

Diese Darlegungen dürften zur Genüge gezeigt haben, wie man genauigkeitstechnisch und wirtschaftlich zu einer optimalen gegenseitigen Orientierung gelangt. Dabei ist selbstredend eine große Praxis notwendig; denn die Erfahrung lehrt eindeutig, daß ein Operateur, wenn er auch ein guter Theoretiker ist, hingegen nicht über die nötige Auswerterepraxis verfügt, nicht in der Lage ist, eine genaue und in allen Fällen brauchbare Einpassung und Auswertung durchzuführen. Aus obigen Ausführungen geht auch hervor, daß die Frage nach dem günstigsten Orientierungsverfahren tatsächlich gelöst ist und daß einerseits die ursprünglichen Verfahren von Prof. v. Gruber überholt sind und andererseits das von Prof. Bachmann vorgeschlagene Vorgehen praktisch nicht in Frage kommt. Dabei ist zudem die Forderung nach Parallaxfreiheit im Modell um jeden Preis, wie sie Bachmann in seiner Dissertation angestrebt hat, im Hinblick auf die Auswertung des Modelles nicht ausschlaggebend, indem der geübte Operateur selbst bei einer Marke Höhenparallaxe noch in der Lage ist auszuwerten. Ausschlaggebend ist hingegen, daß das Modell richtig ist und möglichst geringe Deformationen aufweist, indem ein absolut parallaxfreies Modell infolge der Einflüsse der Instrumenten- und Bildfehler überhaupt nicht erreicht werden kann. Es sei hier nur auf die Einpassung und Auswertung von Weitwinkelaunahmen hingewiesen, für welche es aus konstruktiven und photographischen Gründen zurzeit einfach nicht möglich ist, die Verzeichnung und Filmschrumpfung mit der für die Parallaxfreiheit des Modelles notwendigen Genauigkeit zu korrigieren. Nun gestattet aber gerade das beschriebene optimale Orientierungsverfahren, diese Fehlereinflüsse zu reduzieren.

Es wäre also falsch, der gegenseitigen Orientierung, die die Höhenparallaxe als Kriterium benutzt, zu große Bedeutung beizumessen. Zudem wird in der Praxis die gegenseitige Orientierung vielfach durch andere rigorosere Mittel, als die Elimination der Höhenparallaxe, noch weiter verbessert, indem beispielsweise bei unabhängigen Bildpaaren aus den in den Paßpunkten festgestellten Fehlern auf die Modelldeformationen geschlossen wird und diese damit eliminiert werden können. In der Praxis beschränkt man sich dabei, sofern es sich um die Auswertung in mittleren und kleineren Maßstäben handelt (1 : 5000 bis 1 : 25 000), auf die Reduktion der Höhendeformationen des Modelles, indem dadurch auch die Situationsdeformationen in genügendem Maße reduziert werden. Anders liegen die Verhältnisse allerdings bei der Auswertung von großen Maßstäben, wie z. B. im Maßstab 1 : 1000. Hier ist die Toleranz für die Höhenfehler eher größer als für die Situationsfehler. Man ist daher gezwungen, die Verbesserung der gegenseitigen Orientierung durch Reduktion der Höhen- und Situationsdeformationen zu bewerkstelligen. Wie bei-

spielsweise eine Situationsdeformation reduziert wird, ergibt sich aus der schematischen Figur 6. Diese stellt ein Modell dar, wie es entsteht für normal-konvergente Aufnahmen. In der Praxis werden auf dem Einpaßprotokoll die Situationsfehler in den Paßpunkten A . . . E lagemäßig richtig aufgezeichnet (in Fig. 6 durch Pfeile dargestellt). Als Maßeinheit

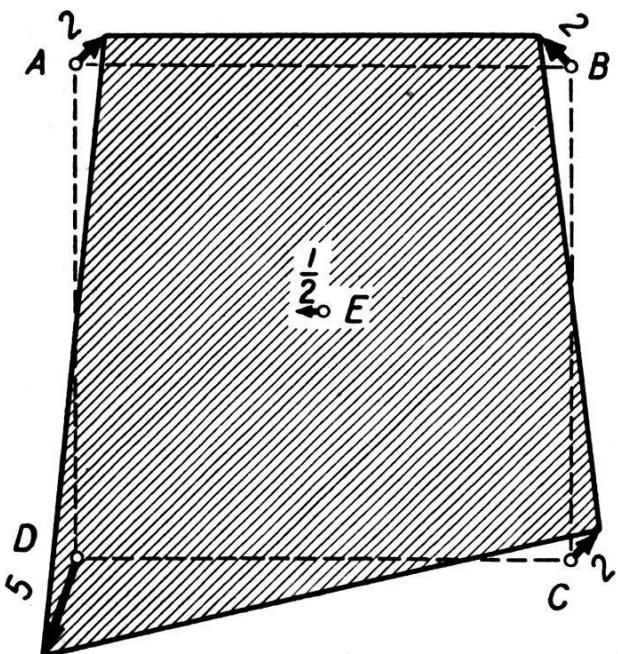


Fig. 6

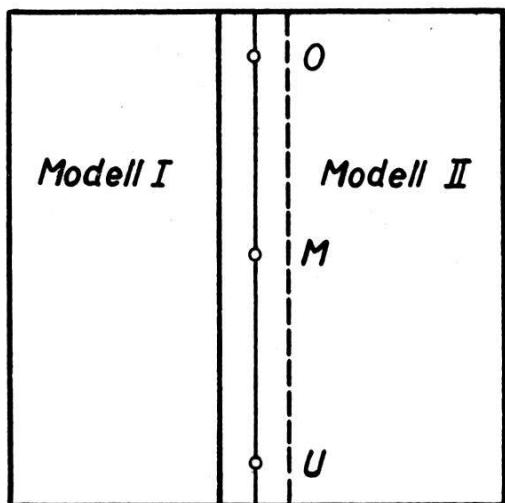


Fig. 7

dient  $1/10$  mm. Aus den Situationsfehlern, wie sie in der Figur 6 eingezeichnet sind, erkennt man nun, daß  $bz$ ,  $\Delta\omega$  und  $\Delta\kappa$  noch verbessert werden müssen. Wie groß die Verbesserungen dieser Elemente der gegenseitigen Orientierung sind, hängt vom Übersetzungsverhältnis vom Autographen zum Zeichentisch ab. Ist dieses Übersetzungsverhältnis bekannt, so kann jedoch ein geübter Operateur anhand der festgestellten Situationsfehler direkt sagen, um wieviel die einzelnen Elemente der gegenseitigen Orientierung noch verbessert werden müssen. Bezuglich weiterer Angaben über die Verbesserung der Modeldeformationen sei auf das Lehrbuch von Prof. Dr. M. Zeller [3] und auf die Dissertation des Verfassers [2] verwiesen.

Aber auch bei der Aerotriangulation wäre es falsch, der gegenseitigen Orientierung, die die Höhenparallaxe als Kriterium benutzt, zu große Bedeutung beizumessen, indem auch hier die gegenseitige Orientierung mit anderen wirksameren Mitteln noch verbessert werden kann. Um dieses Vorgehen kurz zu erläutern, betrachten wir Figur 7. I sei das aus den Aufnahmen 1 und 2 erzeugte erste Teilmодell eines Bildstreifens. Dieses Modell wird anhand einer genügenden Anzahl von gegebenen terrestrischen Paßpunkten im Raum absolut orientiert. Gleichzeitig sind dabei auch die Modeldeformationen zu reduzieren. Das aus den Aufnahmen 2 und 3 erstellte Teilmодell II ist nun an das Modell I anzuschließen. Dies

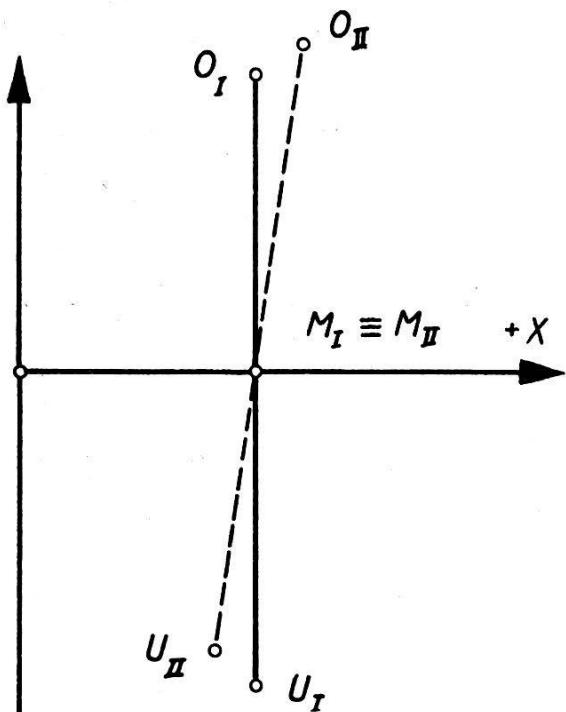


Fig. 8a

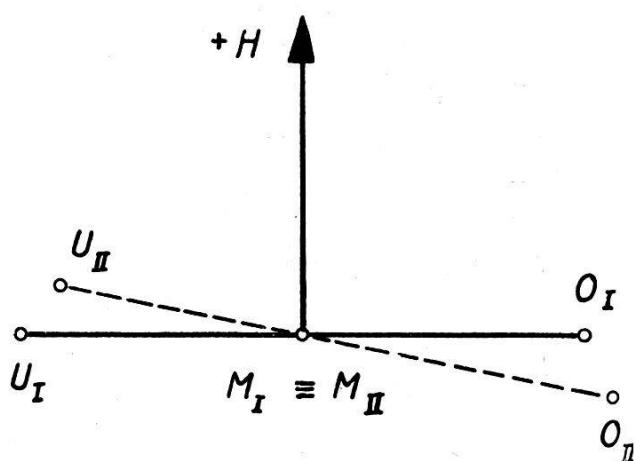


Fig. 8b

geschieht mit 3 Übergangspunkten  $O$ ,  $M$  und  $U$ , deren Koordinaten und Höhen im Modell I bestimmt werden. Im Modell II erscheinen diese 3 Übergangspunkte wieder. Der Anschluß des Modelles II an das Modell I ist nun bewerkstelligt, wenn die im Modell II abgelesenen Koordinaten und Höhen der Punkte  $O$ ,  $M$  und  $U$  identisch sind mit denjenigen, die sich aus dem Modell I ergaben. Tatsächlich ist nun aber im allgemeinen diese Identität infolge der durch die Fehler der gegenseitigen Orientierung (basierend auf der Höhenparallaxe als Kriterium) bedingten Modellformationen im Modell II nicht vorhanden. Wird beispielsweise das Modell II an das Modell I derart angeschlossen, daß die Koordinaten und Höhen des Punktes  $M$  im Modell II identisch sind mit denjenigen, die sich für denselben Punkt aus dem Modell I ergaben, d. h. daß  $M_I \equiv M_{II}$  ist (siehe Fig. 8a und b), so ergeben sich für die Punkte  $O$  und  $U$  im Modell II (in den Figuren 8a und b durch  $O_{II}$  und  $U_{II}$  dargestellt) im allgemeinen nicht genau dieselben Koordinaten und Höhen wie im Modell I (in Fig. 8a und b durch  $O_I$  und  $U_I$  dargestellt). Aus diesen Differenzen kann auf die Deformationen im Modell II geschlossen und die gegenseitige Orientierung des Aufnahmepaares 2, 3 verbessert werden. So muß beispielsweise aus den  $X$ -Differenzen der Punkte  $O_I$  und  $O_{II}$  bzw.  $U_I$  und  $U_{II}$ , die abgesehen von den Einflüssen der Instrumenten- und Bildfehler entgegengesetzt gleich groß sind, auf eine falsche Kantung der Aufnahme 2 geschlossen werden. Treten ferner in den genannten Punkten  $Y$ -Differenzen auf, so sind diese, abgesehen von den Einflüssen der Instrumenten- und Bildfehler, gleich groß, sofern der Maßstab des Modelles II auf denjenigen des Modelles I abgestimmt wurde. Solche  $Y$ -Differenzen zwischen den Punkten  $O_I$  und  $O_{II}$  bzw.  $U_I$  und  $U_{II}$  können ihre Ur-

sache nur in einer falschen Kippung der Aufnahme 3 haben. Die genannten beiden Fehlereinflüsse machen sich aber auch als entgegengesetzt gleiche Höhendifferenzen zwischen den oben erwähnten Punkten bemerkbar (siehe Fig. 8 b). Durch Registrierung dieser Koordinaten- und Höhendifferenzen und Beseitigung derselben mit den entsprechenden Elementen der gegenseitigen Orientierung, gelingt es nun aber, diese rigoros zu verbessern. Analoge Verbesserungsmöglichkeiten bestehen auch, abgesehen von der Konvergenz, für die übrigen Elemente der gegenseitigen Orientierung. Diese Art der Verbesserung der gegenseitigen Orientierung beim Folgebildanschluß wurde am Photogrammetrischen Institut der E. T. H. erprobt und hat sich bewährt.

Ohne noch weiter auf praktische Kniffe einzutreten, fassen wir abschließend zusammen: *Das Ziel bei der Einpassung von unabhängigen Bildpaaren und bei der Triangulierung von Bildstreifen ist die Rekonstruktion der absoluten Orientierung der Aufnahmen.* Wie bereits in [3] und in meiner Dissertation [2] festgestellt wurde, ist die gegenseitige Orientierung, die auf der Elimination der Höhenparallaxe basiert, nur ein Mittel zum Zweck und daher als solches zu werten. Diese gegenseitige Orientierung liefert für jede Modellform eine andere Genauigkeit und versagt für gewisse Modellformen ganz (kritische Modellformen). Die Bedeutung, die der gegenseitigen Orientierung durch Elimination der Höhenparallaxe namentlich von den Theoretikern beigemessen wird, ist für die Praxis nicht in gleichem Maße gerechtfertigt, ganz abgesehen davon, daß es weniger die Theorie, sondern in erster Linie die Praxis war, welche zum genauigkeitstechnisch und wirtschaftlich günstigsten Verfahren dieser Art der gegenseitigen Orientierung geführt hat.

Faßt man die Luftphotogrammetrie als Ganzes auf, im Bestreben, diese Methode für die Praxis zu verwenden, so ist es unmöglich, die hier gestellten Aufgaben durch die Theorie allein befriedigend zu lösen, da diese in der Photogrammetrie meistens zu stark idealisieren muß, um überhaupt zu einem Resultat zu gelangen. Hier führt nur ein großes praktisches Können, das einerseits auf der Erfahrung basiert und andererseits die Theorie, so weit sie als Mittel zum Zweck dienlich ist, anwendet, zum Erfolg. Daß dabei der instrumentellen und photographischen Seite der hier auftretenden Probleme und damit den mehr oder weniger konstanten systematischen Fehlerquellen entscheidende Bedeutung zu kommt, kann auch wieder nur vom erfahrenen Praktiker ermessen werden, der diese Fehler tatsächlich konstatiert und gemessen hat, während der Theoretiker diese Fehler sehr oft stiefmütterlich behandelt, weil sie meistens mit den klassischen Methoden der Fehlertheorie schwer oder überhaupt nicht faßbar sind.

#### *Literaturverzeichnis:*

- [1] W. K. Bachmann „Théorie des erreurs de l'orientation relative“, 1943.
- [2] A. Brandenberger „Fehlertheorie der äußeren Orientierung von Steilaufnahmen“, 1947.
- [3] M. Zeller „Lehrbuch der Photogrammetrie“, 1947.