

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 45 (1947)

**Heft:** 8

**Artikel:** Zur fehlertheoretischen Behandlung neuer Probleme

**Autor:** Bachmann, W.K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-204723>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

mal funktionieren können. Bis heute sind 100 Scheunen neu gebaut worden und 110 weitere sind im Bau begriffen.

Durch die große Wasserströmung ist in der Umgebung der Sprengstelle ein Gebiet von 2,5 km<sup>2</sup> mit wenig fruchtbarem Sand überführt worden. Dieses ist zur Aufforstung vorgesehen. Die beiden tiefen Löcher sollen als Teiche in einer zu erstellenden Parkanlage erhalten bleiben. So wird überall versucht, die Spuren des Krieges zu verwischen, denn stark ist der Glaube an die Zukunft.

## Zur fehlertheoretischen Behandlung neuer Probleme

von Prof. Dr. W. K. Bachmann

In der Juni-Nummer dieser Zeitschrift hat Prof. Dr. H. Kasper die Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung auf eine neue Art behandelt. Ich bin recht froh, daß diese fehlertheoretischen Fragen, die mir vor Jahren manchen Schweißtropfen kosteten und zu zahlreichen Diskussionen Anlaß gegeben haben, nun von einem Fachgenossen aufgegriffen worden sind.

Prof. Kasper hat erstmals gezeigt, wie die Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung, welche ich im Jahre 1943 aufgestellt habe, auf elementare Art behandelt werden kann. Dabei hat er das Hauptgewicht auf die Berechnung der mittleren Restparallaxen gelegt, um auf diese Art verschiedene mechanisch-optische Orientierungsverfahren fehlertheoretisch leicht miteinander vergleichen zu können, währenddem es mir vor allem an der Bestimmung der Gewichts- und Korrelationskoeffizienten der Orientierungsunbekannten gelegen war, um auf diese Art die fehlertheoretischen Grundlagen für die Ärotriangulation zu schaffen.

Die Abhandlung Prof. Kaspers zeigt uns wieder einmal klar, wie vorsichtig man bei der Behandlung neuer Fehlerprobleme vorgehen muß, um nicht zu Fehlschlüssen geführt zu werden, wie dies in der Photogrammetrie schon so oft passiert ist. Andernteils zeigt sie uns aber auch, wie Fehlerprobleme, deren Lösungen ursprünglich recht viel Mühe kostete, nach und nach, d. h. wenn die korrekte Lösung einmal bekannt ist, vereinfacht werden können, so daß sie am Schlusse der ganzen Entwicklung als Konsequenz zum größten Teil schon bekannter Tatsachen und Erkenntnisse dastehen, und man sich meistens wundert, daß die korrekte Lösung nicht schon früher gefunden worden ist.

Es liegen nun zwei grundverschiedene Darstellungen der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung vor, die zu demselben Resultat führen, so daß das Ergebnis als absolut sicher zu bezeichnen ist. Da trotzdem in der neueren photogrammetrischen Literatur oft noch nach der nun als falsch erkannten zu formalistischen Methode fehlertheoretisch gerechnet wird, scheint es nicht unnötig, hier auf einige prinzipielle Fragen der Fehlertheorie zurückzukommen. Aus dem gleichen Grunde werden wir nächstens hier noch eine andere Ableitung der Fehlertheorie

der gegenseitigen Orientierung publizieren, die wahrscheinlich, mit Prof. Kaspers Verfahren zusammen, die begrifflich einfachste Lösung darstellen dürfte.

Die klassische Fehlertheorie und die Methode der kleinsten Quadrate sind dem Vermessungsfachmann schon längst in Fleisch und Blut übergegangen, so daß er sie in fast allen gebräuchlichen Fällen der Geodäsie rein mechanisch anwenden kann, ohne dabei irgendwie einen Fehlschluß zu riskieren. Es zeigen sich höchstens in der höheren Geodäsie noch rechentechnische Schwierigkeiten, bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Es sind dies jedoch meistens rein algebraische Probleme, die mit der Erkenntnistheorie nichts zu tun haben. Damit soll jedoch nicht behauptet werden, daß die Lösung dieser rein algebraischen Probleme keine Schwierigkeiten biete. Ich glaube, daß es genügt, auf die Entwicklungs- und Substitutionsmethode von Boltz hinzuweisen, um zu zeigen, daß wir diese algebraischen Untersuchungen, die meist sehr schwierig zu behandeln sind, recht hoch einschätzen müssen.

Es darf jedoch nicht vergessen werden, daß die Methode der kleinsten Quadrate, mit ihrer Forderung  $[pvv] = \text{Minimum}$ , im Grunde genommen nichts anderes als eine vernünftige Regel, also ein Prinzip ist. Über die vielen „Beweise“ zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate, die von den größten Mathematikern geführt worden sind, mache ich mir schon längst keine Illusionen mehr, und bin sicher, daß die meisten Fachleute, die sich mit diesen Fragen befaßt haben, keine andere Einstellung haben. In all diesen Beweisen finden wir irgendwo eine Hypothese, deren Richtigkeit nicht geprüft werden kann; sie basieren daher schlußendlich alle wieder auf einer Annahme, das heißt, einem Prinzip. Wenn aber schon ein Prinzip angenommen werden muß, so ist es bestimmt am besten, dasselbe so zu wählen, daß die Berechnungen möglichst einfach ausfallen, wenn dabei die theoretischen Resultate gut mit der Praxis in Einklang stehen. Es ist dies aber der Fall, wenn wir direkt  $[pvv] = \text{Minimum}$  einführen.

Es besteht heute kein Zweifel mehr, daß die Fehlertheorie des öfters zu abstrakt oder zu mathematisch behandelt worden ist. Es hat dies bestimmt nicht zuletzt seinen Grund darin, daß es vor allem große *Mathematiker* waren, die dieser Theorie auf die Beine geholfen haben. Der Mathematiker hat jedoch immer das Bestreben, seinen Entwicklungen eine möglichst große Allgemeinheit zu geben, um auf diese Art alle Fälle in einer einzigen Formel, oder in einem einzigen Rechenverfahren, zusammenzufassen. Dieses Bestreben ist absolut natürlich; man muß sich dabei jedoch klar sein, daß es uns gewissen Gefahren aussetzt. Es ist nämlich möglich, daß die Verallgemeinerung der Methode so weit getrieben wird, daß dieselbe schließlich zur rein mathematischen Theorie ausartet, die mit den eigentlichen praktischen Vorgängen, die zu den mathematischen Untersuchungen Anlaß gegeben haben, nichts mehr gemein haben. Ist man jedoch einmal an diesem Punkt angelangt, so ist es möglich, daß diese verallgemeinerte Entwicklung gar nicht mehr die Lösung der gestellten Aufgabe darstellt. Es handelt sich in diesem Falle um einen aus-

schließlich mathematischen Gedankengang, der, wenn auch in mathematischer Hinsicht absolut richtig, nicht die Lösung des Problemes darstellt, wenn die praktisch-physikalische Seite desselben nicht oder nur ungenügend berücksichtigt worden ist.

Zur Illustration dieser Tatsachen möchte ich ein einfaches Beispiel anführen, das von dem Mathematiker *Bertrand* stammt und nachher auch von Poincaré aufgegriffen wurde. In seinem Buche [1] schreibt Bertrand auf Seite 175, wo er auf die Annahme des arithmetischen Mittels gleichgenauer Beobachtungen als ausgeglichener Wert zu sprechen kommt:

„Quant on mesure une grandeur, on mesure, par cela même, toutes les fonctions de cette grandeur, son carré par exemple, ou le logarithme du nombre qui la représente. Pourquoi la valeur la plus probable du carré ne serait-elle pas la moyenne des valeurs obtenues pour le carré, et la valeur probable du logarithme, la moyenne des logarithmes?“

Auf Seite 176 schreibt Bertrand weiter:

„Il ne faut pas, pour écarter l'objection, faire une distinction entre les grandeurs directement mesurées et celles qui résultent d'un calcul. Un mécanicien pourrait, bien aisément, annexer à une balance une aiguille marquant le carré ou le logarithme du poids. Ce carré ou ce logarithme deviendrait alors la grandeur mesurée. Le postulatum admis dans un cas devient donc impossible dans l'autre.“

Es ist nur zu bedauern, daß der große Bertrand dieses Experiment, das, wie er so treffend sagt, „bien aisément“ hätte durchgeführt werden können, nicht gemacht hat, da er sonst den vermeintlichen Widerspruch gewiß hätte leicht beheben können. Dieses einfache Beispiel ist meiner Ansicht nach äußerst wertvoll, da es klar zeigt, *wo die Mathematik aufhört und wo die Physik anfängt*. Bertrand scheint vergessen zu haben, daß wir nicht imstande sind, mit der *Mathematik* den Zeiger einer Waage zu ändern, sondern, daß wir die Mechanik (also einen Teil der Physik) dazu brauchen, was ja schon daraus hervorgeht, daß diese Abänderung vom *Mechaniker* und nicht vom *Mathematiker* besorgt werden muß. Durch diese Abänderung der Waage werden eben die physikalischen Eigenschaften derselben tiefgehend verändert, so daß die Beobachtungen, welche wir mit der ursprünglichen Waage gemacht haben, nach dem Eingreifen des Mechanikers jede Gültigkeit in bezug auf die veränderte Waage verloren haben und nicht umgerechnet werden dürfen. Es ist eben doch so, daß die wirklich gemachten Beobachtungen, wie zum Beispiel das Ablesen des Gewichtes an der ursprünglichen Waage, etwas besonderes *physikalisches* an sich haben, während dem, bei Annahme der ursprünglichen Waage, das Quadrat des Gewichtes eine *abgeleitete Größe* ist. Geht man jedoch von der abgeänderten Waage aus, die zum Beispiel das Quadrat des Gewichtes angeben soll, so ist das Quadrat des Gewichtes die physikalische Größe, währenddem das Gewicht selber eine abgeleitete Größe darstellt.

Die Anzahl der Beispiele könnte beliebig vermehrt werden. Auch in der Photogrammetrie finden wir genau dieselben Verhältnisse vor, ob-schon da das Problem der vielen Unbekannten wegen in einer viel ver-wickelteren Form auftritt. Es ist das große Verdienst des Holländers Prof. Schermerhorn, diesen Fragenkomplex der Photogrammetrie erst-mals klar dargestellt zu haben.

All diese Probleme zeigen, daß wir uns vor einer rein formalen Fehlerrechnung wie vor der Pest hüten müssen. Ich glaube, daß es nun bald an der Zeit wäre, eine ganz allgemeine Theorie der Messung und der Meßgeräte aufzustellen. Dieser Vorschlag darf jedoch nicht falsch ausge-legt werden. Wenn ich von einer allgemeinen Theorie der Messung und der Meßinstrumente rede, soll es sich nicht um ein rein mathematisches Gebilde handeln. Obschon wir die Mathematik zur Ausarbeitung einer solchen Theorie brauchen, darf deren Bedeutung nicht übertrieben wer-den: Sie soll uns lediglich als Werkzeug dienen. Man wird nur zu einem korrekten Resultat gelangen können, wenn man von den physikalischen Eigenschaften der Meßinstrumente ausgeht. Vor einigen Jahren habe ich zusammen mit Prof. Dr. Baeschlin eine solche Theorie aufgestellt; die-selbe ist jedoch nie publiziert worden, da wir die praktische Bedeutung unserer Untersuchung anzweifelten. Es hatte sich jedoch damals schon gezeigt, daß die Photogrammetrie in einer allgemeinen Theorie des Mes-sens eine besondere Stellung einnimmt.

Ich möchte jetzt noch auf das Fehlerfortpflanzungsgesetz und die symbolische Gewichtsberechnung zurückkommen, um zu untersuchen, welchem dieser beiden Rechenverfahren wir den Vorzug geben sollen. Es ist ohne Zweifel, daß viele routinierte Fachleute dem Fehlerfortpflan-zungsgesetz „seiner Einfachheit halber“ den Vorzug geben werden. Es ist jedoch leicht ein Gegenbeispiel dazu zu bringen: In meinen Vorlesun-gen sage ich den Studenten mit Absicht während längerer Zeit nichts vom Fehlerfortpflanzungsgesetz – obschon ja dasselbe altherkömmlich die Grundlage jeder respektablen fehlertheoretischen Vorlesung sein sollte –, sondern ich führe sie in den ersten 14 Tagen schon durch sorg-fältig ausgewählte Definitionen und Beweise in die symbolische Ge-wichtsberechnung ein. Erst nachher mache ich sie auf den Spezialfall un-abhängiger Unbekannter aufmerksam, bei welchem die Korrelations-koeffizienten zu Null angesetzt werden. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz tritt somit als Spezialfall der symbolischen Gewichtsberechnung zu Tage. Ich war übrigens erstaunt, daß es meine Studenten meistens vorziehen, durchgehend die symbolische Gewichtsberechnung anzuwenden, und zwar auch, wenn es sich um unabhängige Unbekannte handelt. Es ist sicher, daß da unsere Nachfolger etwas zu weit gehen; jedoch zeigt dies ganz klar, daß in didaktischer Hinsicht die symbolische Gewichtsberech-nung dem Fehlerfortpflanzungsgesetz vorzuziehen ist, da sie das letztere als Spezialfall enthält. Wenn wir also von der Gewohnheit absehen, müssen wir der symbolischen Gewichtsberechnung unbedingt den Vorzug geben. Nebenbei sei noch bemerkt, daß auch bei der Ableitung der Ge-wichts- und Korrelationskoeffizienten bei bedingter oder vermittelnder

Ausgleichung von Beobachtungen die Anwendung der symbolischen Gewichtsberechnung Vorteile bietet, insofern man auf diese Art nicht immer wieder auf die unabhängigen Beobachtungen zurückgreifen muß. So leite ich zum Beispiel in meinen Vorlesungen die klassischen Gewichtsgleichungen der vermittelnden Ausgleichung, sowie den mittleren Fehler und die Korrelationskoeffizienten der Unbekannten nach bedingter Ausgleichung lediglich mit Hilfe der symbolischen Gewichtsberechnung ab.

Bei Verwendung der symbolischen Gewichtsberechnung muß man sich jedoch zuerst die nötige Klarheit verschaffen über ihre Anwendungsmöglichkeiten, damit diese wunderschöne Methode nicht zu einem reinen Formalismus degeneriert, der mit dem eigentlichen Problem nichts mehr zu tun hat. Aus diesem Grunde habe ich früher in [2] die Abhandlungen „Théorie des erreurs de l'observation des variables secondaires“ und „Calcul symbolique des coefficients de poids“ den photogrammetrischen Fehlerproblemen vorangestellt. Wir müssen uns zuerst klar sein über das was die symbolische Gewichtsberechnung eigentlich will, und wie sie korrekt angewendet wird; erst nachher dürfen wir „den Rechenapparat in Bewegung setzen“.

Aus den obigen Erklärungen scheint mir hervorzugehen, daß die Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung im Grunde genommen eben doch ein prinzipiell neues Problem ist. Meines Erachtens wäre es jedoch unrichtig, dieses spezielle Problem zu stark in den Vordergrund zu rücken. Ich glaube, daß es viel wichtiger ist, aus den bisher auf diesem Gebiete begangenen Fehlern die Lehre zu ziehen. Man kann heute schon eine ganze Menge neuer Probleme in Angriff nehmen, die auf ähnliche Art gelöst werden können und es zum Teil auch schon sind. Es hätte jedoch keinen Wert, jetzt schon näher darauf einzugehen, da sie von der Technik heute noch nicht gestellt werden und sie übrigens der Unkenntnis gewisser physikalischer Faktoren wegen, Gefahr laufen könnten, später zu Irrtümern Anlaß zu geben.

Eines muß jedoch noch gesagt werden. Der gegenwärtige Stand der Fehlertheorie erlaubt uns, eine noch nicht konstruierte Maschine weitgehend fehlertheoretisch zu untersuchen. Es handelt sich da zum Beispiel in der Photogrammetrie um ein recht weites Gebiet, das dem Fehlertheoretiker noch offen steht. So könnte untersucht werden, welche Methode der gegenseitigen Orientierung mit möglichst wenig Arbeit zur höchsten Präzision führt. Dabei würde man bestimmt nicht auf diejenige Methode stoßen, die in meinen Untersuchungen als Grundlage angenommen wurde. Auch die Publikation Prof. Kaspers gibt uns noch keinen Aufschluß darüber, obschon mit dieser Rechenmethode das Ziel sehr leicht zu erreichen sein dürfte. Zu noch dankbareren Resultaten würde man mit der Anwendung dieser neuen Verfahren der Fehlertheorie auf die photogrammetrische Instrumentenkunde gelangen. Man könnte auf diese Art mit nicht allzu großer Mühe in instrumenteller Hinsicht zu recht interessanten Resultaten geführt werden, für welche jedoch die Industrie, der gegenwärtigen Überkonjunktur wegen, leider nur wenig Interesse zeigen dürfte.

Es ist klar, daß durch die neue Behandlung der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung, die während langen Jahren allein dastehenden Fehlerformeln von R. Finsterwalder nun als unrichtig erkannt wurden. Das gleiche Schicksal erleiden auch die Fehlertheorie der Aerotriangulation und die Modellverzerrungsformeln von O. v. Gruber. Ich warne jedoch vor einer verächtlichen Behandlung dieser Ergebnisse. Diese gehören ebensogut, wie die neueren Untersuchungen, zu einem historisch gewachsenen Ganzen, das nicht zerstückelt werden darf. Eine neue Idee kommt selten dem einsamen Wanderer auf einem abgelegenen Weglein entgegen, sondern sie entwickelt sich meistens aus all dem, was uns bisher umgeben hat, und aus den Eindrücken, welche in uns alles Erlebte hinterlassen hat. Eine Idee liegt meistens in der Zeit; es genügt, diesbezüglich an die Schaffung der Differentialrechnung zu denken. Es ist deshalb unsere Pflicht, auch diesen, nun teilweise überholten Resultaten von O. v. Gruber und R. Finsterwalder in der Geschichte der Photogrammetrie den gebührenden Platz einzuräumen.

#### *Literaturverzeichnis:*

- [1] J. Bertrand „Calcul des Probabilités“ 1907
- [2] W. K. Bachmann „Etudes sur la Photogrammétrie aérienne“ 1945.

### **Zum Aufruf der Beamten-Grundbuchgeometer**

Der neu gewählte Vorstand dieses Verbandes ist in der Juli-Nummer d. J. mit einem Aufruf an die jüngere Generation der in Beamtenstellung wirkenden Berufskollegen herangetreten mit der Einladung, sich der Berufsgruppe der schweizerischen Beamtengeometer anzuschließen.

Es soll in nächster Zeit ein Zirkularschreiben an alle Vermessungsämter gelangen und das wird gut und nötig sein, wenn in der heutigen Zeit des Umbruches (dem auch der Jahresbericht des Zentralverbandes treffende Worte widmet) die Aufklärung geboten wird, ob in der Berufsgruppierung Bestehendes aufzugeben sei oder aber, ob bleibende alte, wie kommende neue Aufgaben klar umrissen sich stellen und damit die Berufenen, die Aufgerufenen zu einer mitwirkenden Stellungnahme veranlassen.

Wo eine Planung einsetzt, erwachsen der gesamten Geometerschaft orientierende und beratende Pflichten, die einer Neufixierung gleichkommen und so begrüßen die bisherigen Mitglieder die Einleitung einer verjüngten Basis aufs Wärmste. Daß das Hauptgewicht der Diskussion dann den Vertretern der gehobeneren Vor- und Ausbildung gebührt mit ihrem sachlichen Einwachsen in die gegenwärtige Struktur des Vermessungsdienstes, der Vermessungsbeflissenen aller Stufen und Arbeitssektoren, das braucht nicht besonders betont zu werden.

Die Arbeit der aktiven Bisherigen wird ihre Geltung beibehalten; beginnt die Vorarbeit für den internationalen Geometerkongreß des Jahres 1949, so wird in Kommissionen und Referaten der beamtete Fachmann seine Stellung einnehmen neben dem frei erwerbenden Kollegen und beide werden im nahen Jubiläumsjahr der Geometerschaft durch Arbeiten wie Persönlichkeiten schweizerische Entwicklung dokumentieren.

\* Das in Aussicht gestellte Zirkular wird ja nähergelegene Aspekte