L'ellipsoïde d'erreur [fin]

Autor(en): **Bachmann, W.K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **38 (1940)**

Heft 11

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-198530

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES
Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie
Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats
Expediton, Inseraten- und Abonnements-Annahme:
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR A.G., WINTERTHUR

No. 11 • XXXVIII. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung" Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats 12. November 1940 Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile	Abonnemente: Schweiz Fr. 12.—, Ausland Fr. 16.— jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9.— jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

L'ellipsoïde d'erreur.

Par *W. K. Bachmann*, géomètre officiel, licencié ès sciences.

(Fin.)

5. *Interprétation géométrique de la réduction.*

Les résultats que nous venons d'obtenir admettent une interprétation géométrique très simple. Pour rendre mon exposé moins abstrait, je ne considérerai que le cas de trois inconnues, étant donné que le cas général, comportant n inconnues, se traite exactement de la même façon. Soit donc un ellipsoïde d'erreur E non dégénéré dans l'espace à trois dimensions $0\ \xi, \eta, \zeta$. Nous nous proposons de décomposer cet ellipsoïde en une ellipse et un vecteur de direction arbitraire. Désignons cette direction par $0\ \xi'$. Considérons le cylindre tangent à E, ayant ses génératrices parallèles à $0\ \xi'$. La ligne de contact est une conique C. Choisissons un nouveau système de coordonnées $0\ \xi', \eta', \zeta'$ en prenant pour $0\ \eta'$ et $0\ \zeta'$ deux diamètres conjugués quelconques de la conique C. Dans ce nouveau système, l'équation de l'ellipsoïde est de la forme

$$\frac{\xi'^2}{m_1^2} + \frac{\eta'^2}{m_2^2} + \frac{\zeta'^2}{m_3^2} = 1$$

Nous constatons que cet ellipsoïde d'erreur peut être considéré comme figure d'erreur, résultant de trois vecteurs indépendants ayant respectivement les trois axes de coordonnées pour directions et dont les longueurs sont m_1, m_2, m_3. Il est essentiel de remarquer que la direction $0\ \xi'$ a été choisie arbitrairement. Lorsqu'il s'agit de décomposer un ellipsoïde, nous procédons donc comme suit; nous choisissons une direction quelconque passant par le centre de l'ellipsoïde, et nous cherchons l'intersection de cette direction avec l'ellipsoïde donné. Le vecteur ainsi obtenu sera le vecteur erreur. Considérons ensuite le cylindre projetant de l'ellipsoïde et ayant ses génératrices parallèles au vecteur erreur. La ligne de contact est une ellipse. L'ellipsoïde donné peut alors être considéré comme figure d'erreur résultant de la composition de cette ellipse et du vecteur erreur. Dans le cas général, comportant n variables ($n > 3$), nous introduirons un espace à n dimensions et nous procèderons comme indiqué ci-dessus.

6. *Application.*

Nous allons considérer une application très simple de la théorie développée. Déterminons l'erreur à craindre sur une fonction des inconnues dans le cas d'observations médiates et ensuite pour les observations conditionnelles.

a) *Cas des observations médiates.*

Dans ce qui suit, nous nous baserons essentiellement sur l'invariance de l'ellipsoïde relative aux transformations linéaires. Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les erreurs vraies des n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$; l'ellipsoïde d'erreur s'écrit alors

$$[a^i\, a^k]\, \xi_i\, \xi_k = m^2 \tag{15}$$

et les équations aux erreurs sont de la forme

$$v = a^i\, x_i + l \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{16}$$

Effectuons maintenant la substitution linéaire

$$x_i = g_i^r\, \bar{x}_r \tag{17}$$

Les nouvelles équations aux erreurs étant

$$\bar{v} = a^i\, g_i^r\, \bar{x}_r + l \tag{18}$$

cherchons l'ellipsoïde d'erreur correspondant. Au lieu de considérer les équations aux erreurs transformées, et d'en former les équations normales pour trouver ensuite l'équation de l'ellipsoïde, nous pouvons utiliser l'équation (15) dans laquelle nous effectuons la substitution. En vertu de l'invariance de l'ellipsoïde par rapport aux substitutions linéaires, nous tombons ainsi immédiatement sur l'ellipsoïde d'erreur cherché. Nous obtenons ainsi

$$[a^i\, a^k]\, g_i^r\, g_k^l\, \bar{\xi}_r\, \bar{\xi}_l = m^2 \tag{19}$$

Cette dernière relation permet par conséquent de déterminer les erreurs à craindre sur les variables $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, c'est-à-dire sur une fonction linéaire quelconque des inconnues. Mais dans tous les calculs d'erreurs, seul le voisinage immédiat du minimum de $[pvv]$ nous intéresse. Par conséquent, si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction arbitraire des inconnues, nous la développons en série et négligeons les termes d'ordre supérieur au premier. Nous avons ainsi la possibilité de calculer l'erreur moyenne non seulement sur une fonction linéaire des inconnues, mais sur une fonction arbitraire de ces dernières. Il suffit en effet de disposer convenablement des coefficients g_i^r, ce qui est toujours possible d'une infinité de façons. On choisira ensuite les g_i^r qui restent arbitraires de telle sorte que les calculs deviennent aussi simples que possible.

b) *Cas des observations conditionnelles.*

Soient r équations de condition entre les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$a_k^i\, x_i + a_k^0 = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{20}$$

Si $l_1, l_2, \ldots, l_n$ désignent les valeurs observées des inconnues, nous avons

$$v_k = x_k - l_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{21}$$

Considérons pour l'instant toutes les variables comme indépendantes, c'est-à-dire que nous faisons pour le moment abstraction des équations de condition. Dans ce cas, l'ellipsoïde a pour équation

$$\Sigma\, \xi_i\, \xi_i = m^2 \tag{22}$$

où m désigne toujours l'erreur à craindre sur une mesure de poids égal à l'unité. Notons en passant que l'erreur moyenne sur l'unité de poids est calculée d'après la formule bien connue

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \tag{23}$$

où r désigne le nombre des équations de condition. Tenons maintenant compte des équations de condition. En différentiant les relations (20), nous obtenons r équations homogènes

$$a_k^i\, \delta x_i = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

ou bien en remplaçant les δx_i par les erreurs vraies ξ_i, ce qui est parfaitement permis

$$a_k^i\, \xi_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{24}$$

Ajoutons à ces r équations un nouveau système de n–r équations

$$a_l^r\, \xi_r = \bar{\xi}_l \qquad l = (r+1), (r+2), \ldots, n \tag{25}$$

Supposons le déterminant du système ainsi formé différent de zéro, de façon à pouvoir résoudre par rapport aux variables ξ_i. Effectuons cette résolution et introduisons ces valeurs dans l'équation (22); l'équation de l'ellipsoïde devient alors

$$A^{st}\, \bar{\xi}_s\, \bar{\xi}_t = m^2 \tag{26}$$

Mais nous avons les relations (25) où les coefficients sont arbitraires. En disposant convenablement de ces coefficients, nous sommes donc en état de calculer l'erreur sur une fonction quelconque des variables x_i.

Il serait facile de citer des applications plus intéressantes, mais je ne tiens pas à les indiquer ici, afin que mon exposé ne soit pas trop long.

Lausanne, le 17 Août 1940.

Kostenverleger für die Verpflockung und Vermarkung für vorwiegend ländliche Verhältnisse.

Von *Rud. Werffeli.*

Im Tarif für die Vermarkungsarbeiten bei Grundbuchvermessungen vom Juni 1935 sind unter Pos. 11 und 12 die Entschädigungen für einfache Kostenverleger und für einfache Auszüge aus demselben, als Rechnungstellung an die Grundeigentümer aufgeführt.

Für diejenigen Kantone, welche keine einfachen Kostenverleger zulassen, gelten somit diese reduzierten Ansätze nicht, sondern es müßte von Fall zu Fall der Mehraufwand von den zuständigen Kommissionen taxiert werden.

Zweck der folgenden Ausführungen ist jedoch, den Begriff eines einfachen Kostenverlegers zu umschreiben, damit in Zukunft überall ein einfacher Verleger für die Vermarkung eingeführt werden kann. Die Taxationskommissionen haben sich gegebenenfalls bei den Aufsichtsbehörden diesbezüglich zu bemühen, denn es ist ihre Pflicht, die rationelle Durchführung aller Arbeiten zu sichern.

In erster Linie darf bei einem einfachen Kostenverleger angenommen werden, daß die Vermarkungskosten von Staatsstraßen ganz vom Staat getragen werden, so daß die anstoßenden Grundstücke nicht belastet werden, auch nicht mit einem Ansatz pro Anstoßlänge. Um es vorweg zu nehmen, stellen wir den Grundsatz auf, daß der Verleger nicht kleinlich, mit gesuchten Begründungen möglichst viele Grundstücke belasten darf, sondern daß eher darnach getrachtet wird, abgelegene, wertlosere Gebiete zu entlasten. Es darf auch vorausgesetzt werden, daß die Kosten der Vermarkung sämtlicher Gemeindestraßen als Betreffnis der Gemeinde gerechnet werden, so daß auch hier die Anstößer nicht betroffen werden. Die Vermarkung der Flurwege gehört voraussichtlich rechtlich zum Unterhalt derselben und wäre daher den einzelnen Flurkorporationen durch besondere Verleger für die Wegberechtigten zu verrechnen. Diese besonderen Verleger könnten durch die Korporationen selbst erstellt werden. Der Geometer müßte die Gesamtkosten jedes einzelnen Flurweges gesondert angeben. Es ist aber besonders in ländlichen Verhältnissen zu empfehlen, die Kosten der Vermarkung der Flurwege gleich wie die Gemeindestraßen durch den Beitrag der Gemeinde zu decken. Wo dies durch Gemeindebeschluß, oder wegen finanzieller Lage der