

L'ellipsoïde d'erreur. Partie II

Autor(en): **Bachmann, W.K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **38 (1940)**

Heft 10

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-198528>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SCHWEIZERISCHE Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR A.G., WINTERTHUR

No. 10 • XXXVIII. Jahrgang

der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“
Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats

8. Oktober 1940

Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile

Abonnements:

Schweiz Fr. 12. —, Ausland Fr. 16. — jährlich

Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für
Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl.

Unentgeltlich für Mitglieder des
Schweiz. Geometervereins

L'ellipsoïde d'erreur.

Par W. K. Bachmann, géomètre officiel, licencié ès sciences.

II^{me} Partie.

Théorie analytique de l'ellipsoïde d'erreur à n dimensions.

1. Etablissement de l'équation de l'ellipsoïde.

Supposons que l'on ait mesuré n quantités distinctes et que ces mesures soient entachées d'erreurs vraies $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Par hypothèse, ces erreurs suivent la loi de Gauss. Si toutes les mesures ont été effectuées avec la même précision, toutes les erreurs suivent la même loi. S'il n'en est pas ainsi, l'erreur moyenne m_i varie alors d'une observation à l'autre. Nous avons par conséquent dans ce dernier cas

$$dp_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} m_1} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1^2}{m_1^2}} d\varepsilon_1 \quad \text{pour la première observation}$$

$$dp_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi} m_n} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_n^2}{m_n^2}} d\varepsilon_n \quad \text{pour la } n^{\text{me}} \text{ observation.}$$

Considérons un espace à n dimensions, dans lequel nous reportons sur les axes de coordonnées les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ à partir de l'origine. Nous obtenons ainsi une représentation géométrique de ces n ob-

servations. Envisageons maintenant l'ensemble de ces n mesures. Nous pouvons déterminer dans cet espace les surfaces de probabilité constante. Tous les points situés sur une telle surface ont même probabilité, c'est-à-dire que les systèmes correspondants d'observations ont même probabilité également. La probabilité en un point quelconque de cet espace est donnée par la relation

$$dP = \prod_{i=1}^{i=n} dp_i = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{i=n} m_i} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1^2}{m_1^2} + \frac{\varepsilon_2^2}{m_2^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n^2}{m_n^2} \right)} d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_n$$

Par conséquent, les surfaces de probabilité constante sont

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varepsilon_i^2}{m_i^2} = \text{constante}$$

Nous *définissons* alors comme ellipsoïde d'erreur moyenne la surface particulière

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varepsilon_i^2}{m_i^2} = 1$$

Cette définition devient immédiatement plausible si l'on remarque que cet ellipsoïde découpe sur les axes de coordonnées les segments $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Si $m_1 = m_2 = \dots = m_n$, l'ellipsoïde devient une sphère à n dimensions.

Considérons maintenant les transformations linéaires

$$S \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = a_1^1 \xi_1 + a_1^2 \xi_2 + \dots + a_1^n \xi_n \\ \varepsilon_2 = a_2^1 \xi_1 + a_2^2 \xi_2 + \dots + a_2^n \xi_n \\ \vdots \\ \varepsilon_n = a_n^1 \xi_1 + a_n^2 \xi_2 + \dots + a_n^n \xi_n \end{cases}$$

dans lesquelles nous considérons les quantités $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ comme contravariantes. Les premiers membres de ces équations étant des invariants, les quantités a_i^k sont nécessairement covariantes. Cherchons le transformé de l'ellipsoïde

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varepsilon_i^2}{m_i^2} = 1 \quad \text{ou bien} \quad \sum_{i=1}^{i=n} p_i \varepsilon_i^2 = m^2$$

Dans le but de simplifier les écritures, nous utiliserons par la suite une règle fréquemment appliquée dans le calcul tensoriel et qui consiste à supprimer les signes de sommation partout où ils ne sont pas indispensables. Nous écrirons par exemple

$$a_r^i \xi_i \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_r^i \xi_i$$

ou
$$a_i^j b_k^l x_j x_l \quad \text{au lieu de} \quad \sum_j \sum_l a_i^j b_k^l x_j x_l$$

Le lecteur remarquera qu'il faut chaque fois procéder à la sommation lorsque le même indice figure en haut et en bas dans un même terme. Si, exceptionnellement, il ne doit être procédé à cette sommation, je mettrai l'indice en question entre parenthèses, par exemple

$$a_r^{(i)} \xi_i \quad \text{est égal à} \quad a_r^i \xi_i$$

au sens habituel, mais est généralement différent de $\sum_i a_r^i \xi_i$.

Nous avons donc

$$\varepsilon_r = a_r^i \xi_i$$

$$p_r \varepsilon_r \varepsilon_r = p_r a_r^i a_r^k \xi_i \xi_k$$

et en effectuant la somme, nous obtenons

$$[p \varepsilon \varepsilon] = [p a^i a^k] \xi_i \xi_k \quad \text{et, par suite,} \quad \sum_i p_i \varepsilon_i^2 = m^2$$

devient

$$(2) \quad [p a^i a^k] \xi_i \xi_k = m^2 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

ce qui est l'équation cherchée de l'ellipsoïde d'erreur moyenne. C'est en même temps la relation fondamentale pour toute cette théorie. Etant donné n observations et les formules de transformation S , nous pouvons immédiatement écrire l'équation de l'ellipsoïde d'erreur moyenne, qui est donnée par (2). Il s'agit maintenant de montrer l'importance de cet ellipsoïde dans le calcul des erreurs. En particulier, nous allons indiquer un procédé permettant de décomposer cette loi de probabilité à n dimensions en des lois plus simples à $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 3, 2, 1 dimensions.

2. Calcul de l'erreur moyenne des inconnues.

Il est facile de montrer que l'erreur moyenne de la variable x_i (dont ξ_i est l'erreur vraie) est donnée par la valeur maximum que peut prendre la variable ξ_i sur l'ellipsoïde. Effectuons les calculs pour x_n . En différenciant la relation (2), nous trouvons

$$[p a^i a^k] \xi_k d \xi_i = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Pour trouver le maximum de ξ_n , nous devons annuler tous les coefficients des différentielles $d\xi_i$, excepté celui de $d\xi_n$. Nous obtenons ainsi les $(n-1)$ relations

$$(3) \quad [p a^i a^k] \xi_k = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, (n-1)$$

que nous devons joindre à l'équation (2) afin d'éliminer les variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$. Cette élimination s'effectue très rapidement au point de vue formel si l'on procède comme suit: nous multiplions la i^{me} équation (3) par ξ_i et nous les additionnons, ce qui nous donne

$$(4) \quad [p a^i a^k] \xi_i \xi_k = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n-1 \\ k = 1, 2, \dots, n-1, n \end{array}$$

En soustrayant l'équation (4) de (2), il nous reste uniquement

$$(5) \quad [p a^{(n)} a^k] \xi_{(n)} \xi_k = m^2$$

Nous éliminons alors les variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ entre les équations que nous écrivons sous la forme

$$\begin{array}{ll} [p a^i a^k] \xi_k = 0 & i = 1, 2, \dots, (n-1) \\ \xi_{(n)} \{ [p a^{(n)} a^k] \xi_k \} = m^2 & k = 1, 2, \dots, (n-1), n \end{array}$$

Pour effectuer la réduction de ce système, nous procédons exactement comme pour un système d'équations normales, et nous voyons tout de suite, que nous obtenons après $(n-1)$ réductions successives

$$[a^{(n)} a^{(n)} \cdot (n-1)] \xi_{(n)}^2 = m^2$$

ou bien

$$\xi_{n_{\max}}^2 = \frac{m^2}{[a^{(n)} a^{(n)} \cdot (n-1)]}$$

Ainsi, $\xi_{n_{\max}}$ représente bien l'erreur moyenne à craindre sur l'inconnue X_n cqfd. Si nous désirons connaître l'erreur moyenne d'une autre variable, nous pouvons par exemple changer l'ordre des variables dans les équations aux erreurs, ce qui est un procédé bien connu.

3. Invariance de l'ellipsoïde d'erreur par rapport aux substitutions linéaires.

Considérons r équations aux erreurs à n inconnues et de poids égaux à l'unité

$$v_r = a_r^i x_i + l_r \quad i = 1, 2, \dots, n \quad r > n$$

Si ξ_i désigne l'erreur vraie sur la variable x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) l'ellipsoïde d'erreur moyenne a pour équation

$$E \equiv [a^i a^k] \xi_i \xi_k = m^2$$

Soit maintenant la transformation linéaire

$$x_i = e_i^r \bar{x}_r$$

Supposons que l'on introduise ces nouvelles variables $\bar{x}_k$ à la place des x_i dans les équations aux erreurs; ces dernières deviennent

$$v = a^i e_i^k \bar{x}_k + l$$

Posons donc $\bar{a}^k = a^i e_i^k$; on a d'une façon générale

$$\bar{a}^r = a^i e_i^r$$

$$\bar{a}^s = a^k e_k^s$$

Les équations aux erreurs transformées sont

$$\bar{v} = \bar{a}^r \bar{x}_r + l$$

et l'ellipsoïde d'erreur y relative devient

$$[\bar{a}^r \bar{a}^s] \bar{\xi}_r \bar{\xi}_s = m^2$$

En tenant compte des relations précédentes, nous trouvons

$$[a^i e_i^r a^k e_k^s] \bar{\xi}_r \bar{\xi}_s = m^2$$

ou bien

$$(6) \quad \bar{E} \equiv [a^i a^k] e_i^r e_k^s \bar{\xi}_r \bar{\xi}_s = m^2$$

Effectuons maintenant le changement de variables directement dans l'équation de E ; celle-ci devient

$$[a^i a^k] e_i^r e_k^s \bar{\xi}_r \bar{\xi}_s = m^2$$

Mais cette dernière équation coïncide avec (6) d'où il résulte l'invariance de l'ellipsoïde d'erreur par rapport aux transformations linéaires. Dans le cas de deux inconnues, cette propriété est du reste évidente.

4. Réduction de l'ellipsoïde d'erreur.

a) Cas de trois inconnues.

Les règles qui précèdent nous permettent de former automatiquement l'équation de l'ellipsoïde d'erreur aussitôt les équations normales et l'erreur moyenne m connues. Considérons le cas de trois inconnues et soient les trois équations normales

$$(7) \quad \begin{cases} [paa] x + [pab] y + [pac] z + [pal] = 0 \\ [pab] x + [pbb] y + [pbc] z + [pbl] = 0 \\ [pac] x + [pbc] y + [pcc] z + [pcl] = 0 \end{cases}$$

Pour former l'équation de l'ellipsoïde d'erreur, nous négligeons dans ces équations les termes constants. Nous multiplions ensuite ces équations respectivement par x, y, z , et nous les additionnons. L'ellipsoïde d'erreur s'obtient alors en égalant cette somme à m^2 après avoir remplacé x, y et z par ξ, η, ζ respectivement; ceci nous donne

$$(8) \quad [paa] \xi^2 + [pbb] \eta^2 + [pcc] \zeta^2 + 2 [pab] \xi \eta + 2 [pac] \xi \zeta + 2 [pbc] \eta \zeta = m^2$$

Reprenons maintenant le système (7) et réduisons-le une fois; nous trouvons

$$(9) \quad \begin{cases} [pbb.1] y + [pbc.1] z + [pbl.1] = 0 \\ [pbc.1] y + [pcc.1] z + [pcl.1] = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire d'une manière tout à fait formelle l'équation de l'ellipsoïde d'erreur relatif aux équations (9):

$$(10) \quad [pbb.1] \eta^2 + 2 [pbc.1] \eta \zeta + [pcc.1] \zeta^2 = m^2$$

En cherchant la valeur maximum de ζ , nous obtenons

$$(11) \quad \zeta_{\max}^2 = \frac{m^2}{[pcc.2]}$$

Ainsi $\zeta_{\max}$ représente encore l'erreur à craindre sur la variable z . En remarquant en outre que la courbe (10) est indépendante du système des coordonnées (ce qui résulte de l'invariance démontrée plus haut), nous constatons que c'est encore un ellipsoïde d'erreur relatif au système (7); nous l'appellerons l'ellipsoïde réduit du système (7), et nous le désignerons par E_1 . En comparant les relations (8) et (10), nous trouvons facilement la règle permettant de passer d'un ellipsoïde à sa première réduction. Nous pouvons de même procéder à la réduction de l'ellipsoïde E_1 , ce qui nous donne

$$[pcc.2] \zeta^2 = m^2$$

b) Cas de n inconnues.

Soit l'ellipsoïde d'erreur à n dimensions

$$[a^i a^k] \xi_i \xi_k = m^2 \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

Déterminons les réductions successives de celui-ci. Réduisons premièrement par rapport à la variable ξ_1 et désignons la réduction ainsi obtenue

par E_1 . Ce dernier ellipsoïde ne sera plus qu'à $(n-1)$ dimensions et son équation s'obtiendra en éliminant ξ_1 entre les relations

$$\begin{aligned} [a^1 a^k] \xi_k &= 0 \\ [a^i a^k] \xi_i \xi_k &= m^2 \end{aligned}$$

Pour effectuer cette élimination, nous multiplions la première équation par ξ_1 , et en la soustrayant de la seconde, nous trouvons

$$[a^i a^k] \xi_i \xi_k - [a^{(1)} a^k] \xi_{(1)} \xi_k = m^2$$

Nous éliminons alors ξ_1 entre les deux équations

$$\begin{aligned} (12) \quad & [a^{(1)} a^k] \xi_k = 0 \\ & [a^i a^k] \xi_i \xi_k - [a^{(1)} a^k] \xi_{(1)} \xi_k = m^2 \end{aligned}$$

Explicitons ces relations; la première s'écrit

$$(13) \quad [a^1 a^1] \xi_1 + [a^1 a^2] \xi_2 + \dots + [a^1 a^n] \xi_n = 0$$

Dans la seconde, nous faisons premièrement varier la lettre i et elle devient ainsi

$$\begin{aligned} (14) \quad & \xi_2 \{ [a^2 a^1] \xi_1 + [a^2 a^2] \xi_2 + \dots + [a^2 a^n] \xi_n \} \\ & + \xi_3 \{ [a^3 a^1] \xi_1 + [a^3 a^2] \xi_2 + \dots + [a^3 a^n] \xi_n \} \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & + \xi_n \{ [a^n a^1] \xi_1 + [a^n a^2] \xi_2 + \dots + [a^n a^n] \xi_n \} = m^2 \end{aligned}$$

Nous constatons que le système (13) et (14) se réduit de la même façon qu'un système d'équations normales. En tirant ξ_1 de la première équation et en introduisant sa valeur dans la seconde, nous trouvons

$$\begin{aligned} & \xi_2 \{ [a^2 a^2 \cdot 1] \xi_2 + \dots + [a^2 a^n \cdot 1] \xi_n \} \\ & + \xi_3 \{ [a^3 a^2 \cdot 1] \xi_2 + \dots + [a^3 a^n \cdot 1] \xi_n \} \\ & \vdots \\ & + \xi_n \{ [a^n a^2 \cdot 1] \xi_2 + \dots + [a^n a^n \cdot 1] \xi_n \} = m^2 \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$E_1 \equiv [a^i a^k \cdot 1] \xi_i \xi_k = m^2$$

où i et k varient séparément de 2 à n .

On obtient de même pour la r^{me} réduction

$$E_r \equiv [a^i a^k \cdot r] \xi_i \xi_k = m^2$$

où i et k varient séparément de $(r + 1)$ à n .

Nous avons ainsi la possibilité d'indiquer (au point de vue formel) immédiatement une réduction quelconque d'un ellipsoïde donné.

(A suivre.)

Kreisschreiben

des

Bundesrates an die Kantonsregierungen über die Arbeitsbeschaffung im Bodenverbesserungswesen.

(Vom 20. August 1940.)

Getreue, liebe Eidgenossen,

Die gegenwärtige Lage zwingt uns, vorsorglich zur allfälligen Beschäftigung von Arbeitslosen im ganzen Lande herum weitgehend Arbeitsgelegenheiten bereit zu stellen. Die Bodenverbesserungen eignen sich vor allem für die Arbeitsbeschaffung, weil bei diesen Unternehmen auch eine sehr große Zahl ungelernter Arbeitskräfte beschäftigt werden kann. Gleichzeitig erreichen wir damit eine Vermehrung unserer Lebensmittelproduktion, der unter den heutigen Verhältnissen erhöhte Bedeutung zukommt. Bei der Aufstellung Ihrer Arbeitsbeschaffungsprogramme ersuchen wir Sie daher, ganz besonderes Gewicht auf die Bodenverbesserungsunternehmen zu legen.

Der beiliegenden Zusammenstellung des eidgenössischen Meliorationsamtes kann entnommen werden, daß zurzeit 812 baureife, genehmigte und subventionierte Unternehmen mit einem Gesamtkostenaufwand von rund 65 Millionen Franken sofort in Angriff genommen bzw. durchgeführt werden können. Überdies wurden weitere 344 Projekte angemeldet mit einem approximativen Kostenaufwand von ca. 52 Millionen Franken, von denen verschiedene bereits zur Subventionierung eingereicht sind.

Vorerst möchten wir Sie ersuchen, dafür besorgt zu sein, daß die bereits subventionierten Unternehmen mit tunlichster Beschleunigung in Angriff genommen bzw. ausgeführt werden, sobald die hiefür erforderlichen Arbeitskräfte vorhanden sind.

Für das laufende Jahr steht uns noch ein ordentlicher Kredit von Fr. 1,300,000.— zur Verfügung.

Aus dem Kredit für Wehrbereitschaft und Arbeitsbeschaffung gemäß Bundesbeschluß vom 6. April 1939 verbleibt für Bodenverbesserungen noch ein Betrag von Fr. 6,900,000.—.

Im Interesse der Arbeitsbeschaffung und Vermehrung unserer Lebensmittelproduktion werden die Bodenverbesserungsunternehmen wie bis anhin mit 25–30 % unterstützt. Unter der Voraussetzung entsprechender Leistungen durch die Kantone und Gemeinden sind wir